RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ MOHAMED BOUDIAF -M'SILA-

FACULTÉ DE THECHNOLOGIE

N° d'ordre: ....

Cours

Mathématiques 02

Spécialité:

ST

Par:

Toufik HERAIZ

Thème

LES MATRICES

Année Universitaire : 2021/ 2022

Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Chapitre 1: Les Matrices

1.1 Généralités

1.1.1 Définition et notations

Définition 1.1.1 *On appelle matrice à coefficients dans un corps* $\mathbb{k}$ *la donnée d'un nombre* p *de colonnes, un nombre* n *de lignes, et un ensemble de* np *éléments de* $\mathbb{k}$ *rangés dans un tableau de* n *lignes et* p *colonnes.*

On numérote les coefficients avec deux indices: le premier indique le numéros de la ligne (on les numérote de haut vers le bas), le second est le numeros de la colonne (on les numérote de gauche vers la droite). Ainsi, le coefficient a_{ij} est le coefficient se situe à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et la $j^{ème}$ colonne. On note alors $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ la matrice.

Taille d'une matrice: Un matrice de n lignes et p colonnes, noté $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, est dite de taille $n\times p$ (lire "n croix p" en respectant l'ordre de lecture).

Exemple 1.1.1 *Si* $A=(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq 3\\ 1\leq j\leq 2}}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ -2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$ *alors* $a_{11}=1$, $a_{21}=-2$, $a_{31}=3$, $a_{32}=6$.

$$(i+2j)_{\substack{1\leq i\leq 2\\ 1\leq j\leq 3}}=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7\\ 4 & 6 & 8\end{pmatrix}$$

Notation 1.1.1 *On note* $M_{n,p}(\mathbb{k})$ *l'ensemble des matrices de taille* $n\times p$ *à coefficients dans* $\mathbb{k}$.

1.1.2 Matrices particulières

Matrices colonnes

Ce sont les matrices à une colonne: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$

Matrices lignes

Ce sont les matrices à une ligne: $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$

Matrices carrées

Ce sont les matrices qui ont le même nombre de lognes et de colonnes. Ce nombre de lignes et de colonnes s'appelle l'ordre de la matrice. Les coefficients ayant même indices de ligne et de colonne (ce sont les élément notés a_{ii}) s'appellent les coefficients diagonaux.

Par exemple $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 3. Les éléments diagonaux sont 2, 3 et -4.

On note $M_n(\mathbb{k})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{k}$.

Matrices triangulaires inférieures

Une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est dite triangulaire inférieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $j > i$, c'est à dire tous ses coefficients strictement au dessus de la digonale sont nuls

Exemple 1.1.2 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices triangulaires supérieures

Une matrice carrée $(a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ est dite triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$, c'est à dire tous ses coefficients strictement au dessous de la digonale sont nuls

Exemple 1.1.3 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Matrices diagonales

Ce sont les matrices carrées à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. Les seuls coefficients pouvant être non nuls sont donc ceux de la diagonale.

On note $Diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ la matrice diagonale dont les coefficients sont $(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Exemple 1.1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Matrices scalaires

Ce sont les matrices diagonales dont tous ses coefficients diagonaux sont égaux.

Exemple 1.1.5 $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \pi & 0 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$

Matrice identité

C'est la matrice scalaire dont tous ses coefficients diagonaux valent 1. On note I_n la matrice identité d'ordre n.

Exemple 1.1.6 $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice nulle

c'est la matrice, non nécessairement carré, dont tous les coefficients sont nuls. On note par $0_{n,p}$ la matrice nulle de n lignes et p colonnes. Par exemple $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2 Calcul matriciel

1.2.1 Egalité des matrices

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\1\le j\le q}}$ sont égales, ce qu'on note $A = B$ si

- elles ont même nombre de lignes $(n = m)$.

- elles ont même nombre de colonnes $(p = q)$.

- Les coefficients à la même position sont égaux $(a_{ij} = b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$.

1.2.2 Addition des matrices

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ deux matrices de $M_{n,p}(\Bbbk)$, la somme $A+B$ de A et B est la matrice de n lignes et p colonnes dont chaque coefficient est somme des coefficients de même position de A et de B. Alors $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$.

Proposition 1.2.1 *Si A, B et C trois matrices de $M_{n,p}(\Bbbk)$.*

- L'addition est associative: $(A + B) + C = A + (B + C)$.

- la matrice nulle à n ligne et p colonnes est un élément neutre pour l'addition: $A+0_{n,p} = A$.

- Toute matrice admet un symétrique par rapport la lois de l'addition: Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$en posant $-A = (-a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ on a $A + (-A) = 0_{n,p}$.

- L'addition est commutative: $A + B = B + A$.

Remarque 1.2.1 $A - B = A + (-B)$

1.2.3 Produit d'une matrice par un scalaire de $\Bbbk$

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\Bbbk)$, et $\lambda \in \Bbbk$. Le produit (externe) de λ par A est la matrice

$$\lambda A = \lambda\,(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}.$$

Exemple 1.2.1 $3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 12\\ -6 & 0 & 9\end{pmatrix}.$

Proposition 1.2.2 *Soient α, β deux éléments de $\Bbbk$, A et B deux matrices de $M_{n,p}(\Bbbk)$. alors*

1. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
2. $(\alpha+\beta)\,A = \alpha A + \beta A$
3. $(\alpha\beta)\,A = \alpha(\beta A)$
4. $1A = A$.

1. $0.A = 0_{n,p}$
2. $(-1)\,.A = -A$

1.2.4 Produit de deux matrices

Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit $A = (a_1, a_2, ..., a_p)$ une matrice ligne de $M_{1,p}(\Bbbk)$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\Bbbk)$, **noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.** Le produit de A par B, noté AB, est l'élément de $\Bbbk$ $\;AB = (a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_pb_p)$.

Exemple 1.2.2 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2\times 1) + (3\times 4) + (-2\times 3) = (8)$

Produit d'une matrice par une matrice colonne

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\Bbbk)$, et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}$ une matrice colonne de $M_{p,1}(\Bbbk)$.

Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes. Le produit de A par B, noté AB, est la matrice colonne de n lignes dont la ligne n°i est le coefficien du produit de la ligne n°i de A avec la colonne B et ce pour chaque $i = 1, 2, ..., n$.

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ip} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_1 + \dots a_{1i}b_i + \dots + a_{1p}b_p \\ \vdots \\ a_{i1}b_1 + \dots + a_{ii}b_i + \dots + a_{ip}b_p \\ \vdots \\ a_{n1}b_1 + \dots + a_{ni}b_i + \dots + a_{np}b_p \end{pmatrix}.$$

Exemple 1.2.3 $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 2 \times 3 + 0 \times 1 \\ -2 \times 2 + 1 \times 3 + 4 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Produit d'une matrice par une matrice

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ une matrice de $M_{n,p}(\mathbb{k})$, et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le p \\ 1 \le j \le q}}$ une matrice de $M_{p,q}(\mathbb{k})$.

Noter que A a autant de colonnes que B a de lignes.

Le produit de A par B, noter AB, est la matrice de n lignes et q colonnes ($AB \in M_{n,q}(\mathbb{k})$) dont la colonne n°$j$ est le produit de A par la colonne n°j de B et ce pour chaque numéros de colonne $j = 1, 2, \dots, q$

Autrement dit, pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et tout $j \in \{1, 2, \dots, q\}$ le coefficient d'indice ij de AB est

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}.$$

Exemple 1.2.4 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1 & 1 \times 3 + 0 \times 0 + 1 \times 2 \\ 2 \times 4 + 3 \times 2 + 4 \times 1 & 2 \times 3 + 3 \times 0 + 4 \times 2 \\ 2 \times 4 + 1 \times 2 + 0 \times 1 & 2 \times 3 + 1 \times 0 + 0 \times 2 \end{pmatrix} =$ $\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 18 & 14 \\ 10 & 6 \end{pmatrix}$

Propriétés

1. Le produit des matrices A et B n'est défini que si le nobre de colonnes de A est égal au nombre de ligne de B.

2. Le produit des matrices est associative: Si A une matrice de taille $n \times p$, B une matrice de taille $p \times m$ et C une matrice de taille $m \times q$ (de sorte qu'on peut calculer AB, et BC). Alors $(AB)\,C = A(BC)$.

3. Défaut de commutativité: Le produit matriciel n'est pas commutatif

4. L'élément neutre: Si $A \in M_{n,p}(\mathbb{k})$, on a $AI_p = A$ et $I_n A = A$

5. Distributivité par rapport à l'addition: Si A, B et C telles que A et B ont même nombre de lignes et même nombre de colonnes (de sorte qu'on peut calculer $(A + B)$ et le nombre de lignes de C est égale au nombre de colonnes de A (alors de B). Alors

$$(A + B)\,C = AC + BC.$$

Remarque 1.2.2 *Le produit de deux matrices peut-etre nul alors qu'aucune des matrices n'est nulle. par exemble, si*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \text{ alors } AB = 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ mais } A \neq 0$$

et $B \neq 0$.

Puissances

Si $k \geq 0$ est un entier et si $A \in M_n(\mathbb{k})$ une matrice carrée. On définit la puissance k^e de A de la façon suivante:

$$A^k = \begin{cases} \qquad\qquad I_n & \text{si } k = 0 \\ A^{k-1}A = \underbrace{A...A}_{produit\ de\ k\ fois\ de\ A} & \text{si } k \geq 1. \end{cases}.$$

Proposition 1.2.3 *Soit A une matrice carrée, soit k et l sont deux entiers.*

1. $A^k A^l = A^{k+l}$

2. $\left(A^k\right)^l = A^{kl}$

3. $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$ pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$.

4. Si $A = Diag(a_1, a_2, ..., a_n)$ est une matrice diagonale alors $A^k = Diag(a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k)$.

1.3 Inverse d'une matrice

1.3.1 Déterminant

Le déterminant d'une matrice n'est défini que si la matrice est carrée

Définition 1.3.1 *Soit* $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{k})$ *une matrice carrée, Le déterminant de* A*, noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$*, est l'élément de* $\mathbb{k}$ *définit par "descente" de la façon suivante:*

. Si $n = 1$ alors $A = (a_{11})$ et $\det(A) = a_{11}$

. Si $n \geq 2$ alors $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et

$$\det(A) = a_{11}\triangle_{11} - a_{21}\triangle_{21} + ... + (-1)^{n-1}\, a_{n1}\triangle_{n1}$$

Où $\triangle_{i1}$ est le déterminant de la matrice de $M_{n-1}(\mathbb{k})$ obtenue en enlevant à A la ligne n°i est la prepière colonne.

Exemple 1.3.1 *On calcule* $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Exemple 1.3.2 *Le déterminant de la matrice* $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *est*

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-3-10) - 1(12+4) + 0 = -42$$

Proposition 1.3.1 *Si on multiple l'une des lignes d'une matrice par un élément de* $\mathbb{k}$ *alors le déterminant de cette matrice est multiplié par le même élément de* $\mathbb{k}$.

1.3.2 Transposé d'une matrice

Définition 1.3.2 *Si* $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ *est une matrice à* n *lignes et* p *colonnes, on appelle transposée de* A *et on note* A^t *la matrice à* p *lignes et* n *colonnes dont le coefficient de la ligne n°*i *et la colonne n°*j *est* a_{ji}. *Ainsi,* $\left((a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}\right)^t = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}}$.

Les colonnes de A^t sont les lignes de A ou, ce que revient au même, les lignes de A^t sont les colonnes de A.

Exemple 1.3.3 *La transposée de* $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ *est* $A^t = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 5 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 3 & -4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Proposition 1.3.2 *Soit* A *et* B *deux matrices* $\lambda \in \Bbbk$.*Alors,*

1. $(A^t)^t = A \quad (A \in M_{n,p}(\Bbbk))$
2. $(\lambda.A)^t = \lambda.A^t \quad (A \in M_{n,p}(\Bbbk))$
3. $(A + B)^t = A^t + B^t \quad (A, B \in M_{n,p}(\Bbbk))$
4. $(AB)^t = B^t.A^t \quad (A \in M_{n,p}(\Bbbk), B \in M_{p,q}(\Bbbk))$. Il faut prendre garde au changement de l'ordre de la multiplication lorsqu'on prend la transposée d'un produit.

1.3.3 Inverse d'une matrice

Définition et propriétés

Définition 1.3.3 *Soit* $A \in M_n(\Bbbk)$ *une matrice carrée d'ordre* n. *Une matrice* B *carrée d'ordre* n *est appelée inverse à droite de* A *si* $AB = I_n$ *et inverse à gauche de* A *si* $BA = I_n$. *Où* I_n *est la matrice d'identité d'ordre* n.

Si une matrice A admet un inverse à droite B et un inverse à gauche C alors $B = C$ et on peut donc dire que B est un inverse de A sans ambigüité.

Définition 1.3.4 *Une matrice carrée* A *est dite inversible si elle admet un inverse à droite et à gauche. Cet inverse est alos unique. On note* A^{-1} *l'inverse de la matrice inversible* A. *Si* $A \in M_n(\Bbbk)$, *on a* $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Proposition 1.3.3 *Soit A une matrice inversible et $\lambda \in \mathbb{k}^*$.*

1. La matrice A^{-1} est inversible d'inverse A.
2. La matrice λA est inversible d'inverse $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$.

Preuve. (Exercice) ■

Théorème 1.3.1 *Soit A et B deux matrices carrées iversibles de même taille. Alors le produit AB est inversible et son inverse est $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Théorème 1.3.2 *Si A une matrice carrée alors $\det(A) \neq 0 \Longleftrightarrow A$ est inversible. De plus si A est inversible alors $\det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det(A)}$*

Calcule d'inverse

Il existe diverses méthodes pour calculer l'inverse d'une matrice A.

Méthode des cofacteurs

Définition 1.3.5 *On appelle matrice des cofacteurs, $C = com(A)$, la matrice de coefficients*

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det\left(A_{ij}\right)$$

Où A_{ij} est la matrice obtenue en elelvant de la matrice A la ligne n°i et la colonne n°j

Exemple 1.3.4 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$com(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.3.3 *Si A est inversible alors*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (comA)^t$$

Exemple 1.3.5 *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$\det(A) = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times (-4) - 3 \times (-5) + 2 \times (1) = 9$

$\det(A) \neq 0$ alors la matrice A est inversible.

$$com(A) = \begin{pmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} (comA)^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 12 \\ 5 & 2 & -6 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -7 & 2 & 4 \\ 12 & -6 & -3 \end{pmatrix}$.

Il est claire que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.