Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre II : Espaces de Sobolev (3)

Table des matières

1 Quelques propriétés utiles dans les espaces de Sobolev

Proposition 1.0.1. *Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Soit $H : U \longrightarrow \Omega$ un difféomorphisme (i.e. H est bijective et H, H^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$) telle que :*

$$\mathrm{Jac}H \in L^\infty(U), \; \mathrm{Jac}H^{-1} \in L^\infty(\Omega).$$

Alors $u \circ H \in W^{1,p}(U)$ et on a

$$\forall i : \frac{\partial(u \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H(y))\frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y), \quad x_j = H_j(y).$$

Démonstration. Pour $p < \infty$.

i) Par densité (Voir cours 2), Il existe une suite $\{u_n\}_n$ de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \forall i : \partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset U.$$

ii) Montrons que si $v \in L^p(\Omega)$ alors $v \circ H \in L^p(U)$. On a

$$\begin{aligned} \int_U |u \circ H(y)|^p \mathrm{d}y &= \int_\Omega |u(x)|^p |\mathrm{Jac}H^{-1}| \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_\Omega |u(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \quad (\text{car } \mathrm{Jac}H^{-1} \in L^\infty(U)) \end{aligned}$$

Donc $v \circ H \in L^p(U)$..

iii) Montrons que si $v_n \longrightarrow v$ dans $L^p(\Omega)$ alors $v_n \circ H \longrightarrow v \circ H$ dans $L^p(U)$. D'après le théorème de Lebesgue inverse, il existe une sous-suite $\{v_{n_k}\}$ telle que

$$v_{n_k} \longrightarrow v \text{ p.p. } x \in \Omega \text{ et } |v_{n_k}| \leq g \in L^p(\Omega) \ \forall n.$$

Par conséquent

$$v_{n_k} \circ H \longrightarrow v \circ H \text{ p.p. } y \in U \text{ et } |v_{n_k} \circ H| \leq g \circ H \in L^p(U) \quad \forall k.$$

En appliquant le théorème de convergence dominé de Lebesgue, on obtient

$$v_{n_k} \circ H \longrightarrow v \circ H \text{ dans } L^p(U).$$

Montrons maintenant que $v_n \circ H \longrightarrow v \circ H$ dans $L^p(U)$. Par absurde, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$, il existe une sous-suite $\{v_{n_k} \circ H\}_k$ tels que

$$\|v_{n_k} \circ H - v \circ H\|_{L^p(U)} \geq \varepsilon. \tag{1.1}$$

Or, la suite $\{v_{n_k}\}_k$converge vers v dans $L^p(\Omega)$, elle admet donc une sous-suite notée $\{v_{\varphi(n_k)}\}$ telle que

$$\|v_{\varphi(n_k)} \circ H - v \circ H\|_{L^p(U)} \longrightarrow 0.$$

Ce qui contredit avec (1.1).

iv) On est prêt maintenant à montrer que que $u \circ H \in W^{1,p}(U)$. On a d'après i) $u_n \circ H \longrightarrow u \circ H$ dans $L^p(U)$. Comme u_n et H sont de classe $\mathcal{C}^1$ alors

$$\forall i : \frac{\partial (u_n \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H(y)) \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y). \tag{1.2}$$

D'autre part, d'après ii) on a pour tout compact $K \subset U$

$$\frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H) := \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}} \circ H \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial_{x_j}} \circ H := \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H) \text{ dans } L^p(K)$$

et comme $\frac{\partial H}{\partial y_j} \in L^\infty(K)$ alors

$$\frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H) \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H) \frac{\partial H_j}{\partial y_i},$$

D'où on peut passer à la limite au sens des distributions dans (1.2) et on obtient

$$\forall i : \frac{\partial (u_n \circ H)}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial_{x_j}}(H) \frac{\partial H_j}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u_n}{\partial x_j} \circ H \frac{\partial H_j}{\partial y_i} \in L^p(U).$$

Pour $p = \infty$. Il est claire que $u \circ H \in L^\infty(\Omega)$. D'autre part, soit Ω' un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\Omega' \subset \Omega$. Alors $u \in W^{1,p}(\Omega')$ et on a d'après ce que précède :

$$\forall i : \frac{\partial (u \circ H)}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial_{x_j}}(H(y)) \frac{\partial H_j}{\partial y_i}(y) \in L^\infty(\Omega).$$

Donc $u \circ H \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Ce qui finit la preuve. $\square$

Proposition **1.0.2.** *Soient $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $G(0) = 0$ et $|G'(t)| \leq M$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors*

$$G \circ u \in W^{1,p}(\Omega) \quad \text{et} \quad \partial_i(G \circ u) = G'(u)\partial_i u, \ \forall i.$$

Démonstration. Pour $p < \infty$, on a d'après le théorème des accroissement finis $|G(t)| \leq Mt$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Alors $|G \circ u| \leq Mu \in L^p(\Omega)$, et donc $G \circ u \in L^p(\Omega)$. D'autre part par densité, il existe une suite $\{u_n\}_n$ de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ telle que

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ et } \forall i : \partial_i u_n \longrightarrow \partial_i u \text{ dans } L^p(K) \text{ pour tout compact } K \subset U.$$

Alors, comme G et u_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, on a

$$\partial_i(G \circ u_n) = G'(u)\partial_i u_n \tag{1.3}$$

On montre comme dans la preuve précédente que

$$G \circ u_n \longrightarrow G \circ u \text{ dans } L^p(\Omega), \ G'(u)\partial_i u_n \longrightarrow G'(u)\partial_i u \text{ dans } L^p(K),$$

pour tout compact $K \subset \Omega$. D'où en passant à la limite au sens des distributions dans (1.3), on obtient

$$\partial_i(G \circ u) = G'(u)\partial_i u \in L^p(\Omega).$$

Pour $p = \infty$, On procède comme à la fin de la preuve précédente. □

2 Injection de Sobolev

Théorème **2.1.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, on a les injections continues suivantes*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & si \quad p < N, \ pout\ tout\ 1 \leq q < \infty \\ L^q(\Omega), & si \quad p = N, \ pour\ tout\ q \geq 1 \\ C^\alpha(\overline{\Omega}) & si \quad p > N, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. En particulier, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalités suivants :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.2}$$

$$|u|_\alpha \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{2.3}$$

où C_1, $C_2 > 0$, dépendent seulement de N, p et le diamètre de Ω.

En dimension 1, on a le résultat important suivant

Proposition **2.1.1.** *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Alors pour tout $1 \leq p \leq \infty$ L'espace $W^{1,p}(I)$ s'injecte de manière continue dans $\mathcal{C}(\overline{I})$. C'est-à-dire*

$$\exists C > 0, \ \forall u \in W^{1,p}(I), \ \exists v \in \mathcal{C}(\overline{I}) : u = v \ p.p.\ sur\ I\ et\ \|u\|_{W^{1,p}(I)} \|v\|_{\mathcal{C}(\overline{I})}.$$

Théorème 2.2 (de Rellich-Kondrachov). *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et soit $1 \leq p \leq \infty$. Alors on a les injections compactes suivantes*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow_c \begin{cases} L^q(\Omega) & \text{si } p < N, \text{ pout tout } 1 \leq q < p^* \\ L^q(\Omega) & \text{si } p = N, \text{ pout tout } 1 \leq q < \infty \\ \mathcal{C}(\overline{\Omega}) & \text{si } p > N, \end{cases} \tag{2.4}$$

(où $p^* = \frac{Np}{N-p}$).

Un résultat important qui découle de ce théorème est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 2.3 (Inégalité de Poincaré). *Soit Ωouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constant $C > 0$ telle que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{2.5}$$

3 Espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $W^{-1,p'}(\Omega)$

Définition 3.1. *L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ est l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Notation 3.1. *Pour $p = 2$, l'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ sera noté dorénavant par $H_0^1(\Omega)$.*

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un sous espace de $W^{1,p}(\Omega)$ et il est caractérisé par :

Théorème 3.1.

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow (u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ et } Tu \equiv 0). \tag{3.1}$$

En particulier, si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors $u_{|\partial\Omega} \equiv 0$.

Proposition 3.1.1. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ u & \longmapsto & \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N} \end{array}$$

définit une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ noté par $\|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$, équivalente à la norme $\|.\|_{W^{1,p}(\Omega)}$. De plus $(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}$ est un espace de Banach.

Définition 3.2. *L'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ est l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ (où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Autrement dit un élément f de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle\ ,\ \rangle$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que*

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v\rangle$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Notation 3.2. *Pour $p = 2$ alors $p' = 2$. Alors l'espace $W^{-1,2}(\Omega)$ est le dual de l'espace $W_0^{1,2}(\Omega) := H_0^1(\Omega)$. Il sera noté par $H^{-1}(\Omega)$.*

Théorème 3.2. *(**Caractérisation de** $W^{-1,p'}(\Omega)$). Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors Il existe*

$$f^0, f^1, \ldots, f^N \quad \textit{dans } L^p(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^{N} f^i v_{x_i} \right) \mathrm{d}x \tag{3.2}$$

et

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^{N} |f^i|^p \right)^{1/p}. \tag{3.3}$$

En particulier si $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ alors

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \textit{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$