Module : **Formulation variationnelle**

Exercice 1. *Soit $u \in H^1(\Omega)$. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes*

1. $u \in (H_0^1(\Omega))^\perp$.
2. $-\Delta u + u = 0$ *dans* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
u \in (H_0^1(\Omega))^\perp \quad & \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad (u,v)_{H^1(\Omega)} = 0,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \\
& \Longleftrightarrow \quad \left\{ \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = 0,\ \forall v \in H_0^1(\Omega) \right. \\
& \overset{\text{Par densité}}{\Longleftrightarrow} \quad \left. \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = 0 \ \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \right\} \\
& \Longleftrightarrow \quad \langle -\Delta u + u, v\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}} = 0,\ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \\
& \Longleftrightarrow \quad -\Delta u + u = 0,\ \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega).
\end{aligned}$$

Exercice 2. *Montrer l'injection continue suivante*

$$H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1]).$$

Solution : D'après l'exercice 01 question 3 de la série précédente, il existe $\overline{u} \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. et $\overline{u}(x) = \int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + c$, $\forall x, y \in [0,1]$, et il est claire que $c = u(y)$. Alors, on a

$$\text{p.p. } x \in]0,1[\colon u(x) = \int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + \overline{u}(y)$$

En intégrant par rapport à y sur $(0,1)$, on obtient

$$\text{p.p. } x \in]0,1[\colon |u(x)| = |\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 \overline{u}(y)\mathrm{d}y| \leq \int_0^1 |u'|\mathrm{d}t + \int_0^1 |u|\mathrm{d}x$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\text{p.p. } x \in]0,1[\colon |u(x)| \leq \|u\|_{L^2(0,1)} + \|u'\|_{L^2(0,1)} = \|u\|_{H^1(0,1)}.$$

D'où

$$\|u\|_{L^\infty(0,1)} \leq \|u\|_{H^1(0,1)}$$

ce qui donne l'injection continue de $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$.
(l'inclusion $H^1(0,1) \subset C([0,1])$ est dans le sens où si $u \in H^1(I)$, il existe une fonction $\overline{u} \in \mathcal{C}(\overline{I})$ telle que $u = \overline{u}$ p.p. sur I).

Exercice 3. *Soit I un intervalle borné, $u \in \mathcal{D}(\Omega)$*

1. *Montrer que*

$$\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq |I|^3\|u'\|^2_{L^2(I)}, \quad \text{où } |I| = mes(I).$$

2. *Déduire l'inégalité suivant :*

$$\int_I u(x)^2\mathrm{d}x \leq \frac{|I|^2}{2}\int_I |u'(t)|^2\mathrm{d}t + \frac{1}{|I|}\left(\int_I |u(x)|\mathrm{d}x\right)^2.$$

3. *Est ce que cet inégalité est vérifié pour u dans $H^1(I)$?.*

Solution :

1. On a

$$\begin{aligned}(u(x)-u(y))^2 = |\int_y^x u'(t)\mathrm{d}t|^2 &\leq \left(\int_I |u'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\\ &\overset{\text{Cauchy-Schwartz}}{\leq} \int_I 1^2\mathrm{d}t\int_I u'^2\mathrm{d}t\\ &= |I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\end{aligned}$$

En intégrant sur I par rapport à x et y, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\leq \int_{I\times I}|I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= |I|\ \|u'\|^2_{L^2(I)}\int_{I\times I}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |I|^3\ \|u'\|^2_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned}\int_{I\times I}(u(x)-u(y))^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{I\times I}(u(x)^2+u(y)^2+-2u(x)u(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_I\left(\int_I u(x)^2\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y + \int_I\left(\int_I u(y)^2\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x - 2\int_I u(x)\mathrm{d}x\int_I u(y)\mathrm{d}y\\ &= 2|I|\int_I u(x)^2\mathrm{d}x - 2\left(\int_I u(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

En substituant dans l'inégalité de la question 1), on obtient

$$2|I|\int_I u(x)^2\mathrm{d}x \leq |I|^3\ \|u'\|^2_{L^2(I)} + 2\left(\int_I u(x)\mathrm{d}x\right)^2,$$

en divisant sur $|I|$, on obtient le résultat.

3. Oui. En effet, d'après le théorème de densité (Voir cours 2 chapitre 2), l'espace $\mathcal{C}^{\infty}([0,1])$ est dense dans $H(0,1)$. C'est à dire pour tout $u \in H(0,1)$, il existe une suite $(u_n)_n$ de $\mathcal{C}^{\infty}([0,1])$ telle que
$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } H^1(0,1).$$
Ce qui implique que
$$u_n \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^2(0,1), \quad \text{et } u_n' \longrightarrow u, \quad \text{dans } L^2(0,1).$$
Et d'après la question 2), comme $u_n \in \mathcal{C}^{\infty}([0,1])$, alors elle satisfait l'inégalité
$$\int_I u_n^2 \mathrm{d}x \leq \frac{|I|^2}{2}\int_I |u_n'|^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{|I|}\left(\int_I |u_n|\mathrm{d}x\right)^2.$$
En passant à la limite, on obtient l'inégalité pour $u \in H(0,1)$.

Exercice **4.** *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ et connexe. Montrer l'inégalité de Poincaré*
$$\exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) : \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}. \tag{0.1}$$

Solution : On a
$$(0.1) \Longleftrightarrow \exists C > 0, \forall u \in H_0^1(\Omega) : \frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^N}} \leq C.$$
Par l'absurde, On suppose que : Il existe une suite $(u_n)_n \subset H_0^1(\Omega)$ telle que
$$\forall n : \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|\nabla u_n\|_{(L^2(\Omega))^N}} \geq n. \tag{0.2}$$
On pose $v_n := \dfrac{u_n}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}$. Alors, on a
$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = \frac{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{L^2(\Omega)}} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{(L^2(\Omega))^N} := \frac{\|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_n\|_{(L^2(\Omega))^N}} \leq \frac{1}{n}, \ \forall n. \tag{0.3}$$
Et on a
$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} := \|v_n\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2, \ \forall n.$$
Donc la suite $(v_n)_n$ est borné dans $H^1(\Omega)$ qui s'injecte dans $L^2(\Omega)$ de manière compacte. Alors On peut extraire une sous-suite de $(v_n)_n$, notée encore par $(v_n)_n$ telle que
$$v_n \longrightarrow v, \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$
D'autre part, d'après (0.3), on a $\|v\|_{L^2(\Omega)} = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ et on a $\nabla v_n \longrightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$. Donc
$$v_n \longrightarrow v \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ et } \nabla v_n \longrightarrow \nabla v = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega)^N.$$
D'où Comme Ω est connexe alors $v = C$ dans Ω et $C \neq 0$ car $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$. Mais $v \in H_0^1(\Omega)$, alors la trace de v : $Tv := 0$ et comme $v = C$ dans Ω alors $v = \overline{v}$ p.p. dans Ω, où $\overline{v} = C$ dans $\overline{\Omega}$. D'où
$$Tv = T\overline{v} := \overline{v}_{|\partial\Omega} = C \text{ car } \overline{v} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}).$$
Donc $C = 0$. D'où on obtient la contradiction.