Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Master 1 : Analyse fonctionnelle , 2019/2020
Faculté des mathématiques
Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre III : Problèmes aux limites et formulation variationnelle

Table des matières

1 Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre

Notation 1.1. Si H est un espace de Hilbert alors on note par (u,v) le produit scalaire entre u et v dans H, et par $\langle f, v\rangle$ le produit de dualité entre $f \in H'$ et $v \in H$.

$$\delta^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases}$$

1.1 Quelques définitions

Nous nous intéressons à un problème d'EDP elliptique linéaire de second ordre suivant

$$Lu = f \text{ dans } \Omega$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnu, $u := u(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, L est un opérateur différentiel d'ordre 2 défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u} \tag{1.1}$$

ou sans forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u} \tag{1.2}$$

où les fonctions a^{ij}, b^i, c sont les coefficients de l'opérateur L.

Un opérateur important de ce type est l'opérateur Laplacien défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ (il suffit de prendre } a^{ij} = \delta^{ij}, b_i = c = 0).$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est l'inconnu, $u := u(x)$, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée. La condition $u = 0$ sur $\partial\Omega$ s'appelle la condition au limite de Dirichlet.

Remarque 1.1. *Si les coefficients a^{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$ sont de classe C^1 alors l'opérateur L donné par sa forme divergentielle peut être écris sans forme divergentielle et vice versa. En effet l'équation en forme divergence (1.1) devient*

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}^i(x) u_{x_i} + c(x) u \tag{1.3}$$

où $\tilde{b}^i = b^i - \sum_{j=1}^{n} a^{ij}_{x_j}$, et cette équation est bien sans forme de divergence.

Dans ce qui suit on suppose que $a^{ij} = a^{ji}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$.

Définition 1.1. On dit que l'opérateur L est uniformément elliptique s'il existe $\theta > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x) \xi_i \xi_j > \theta |\xi|^2 \tag{1.4}$$

pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$.

Remarque 1.2. *La condition d'ellipticité signifie que pour tout $x \in \Omega$, la matrice symétrique $A(x) = (a^{ij}(x))_{ij}$ est définie positive et ses valeurs propres sont plus grands que θ.*

Exercice 1. Montrer que les opérateurs suivant sont uniformément elliptiques :

1. L'opérateur Laplacien : $\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.
2. L'opérateur : $Lu = \operatorname{div}(a(x)\nabla u)$, où $a(x) \geq c_0 > 0$ pour tout $x \in \Omega$.

1.2 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème suivant sert à démontrer l'existence de la solution pour les problèmes elliptiques linéaires.

Théorème 1.1 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$. Supposons que*

$$B : H \times H \to \mathbb{R}$$

est une application bilinéaire (forme bilinéaire), vérifiant les deux conditions suivantes *i) B est continue, c'est à dire :*

$$\exists \alpha > 0 : |B(u,v)| \leq \alpha \|u\| \|v\|, \ \forall u, v \in H$$

ii) B est coercive (ou elliptique) sur H, c'est à dire

$$\exists \beta > 0 : B(u,u) \geq \beta \|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Soit $f : H \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue (i.e. $f \in H'$). Alors il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H \tag{1.5}$$

Remarque 1.3. *Si le corps est $\mathbb{C}$, alors l'énoncé du théorème est comme suivant :*
Soit a est une forme sesquilinéaire sur H(i.e. linéaire par rapport la première variable et semiliniéaire par rapport la deuxième) et continue telle que

$$\exists \beta > 0 : Re B(u,u) \geq \beta \|u\|^2, \ \forall u \in H.$$

Alors pour tout $f \in H'$, il existe un élément unique $u \in H$ tel que

$$B(u,v) = \langle f, v \rangle, \ \forall v \in H \tag{1.6}$$

Preuve. Soit u un élément fixé de H. Il est claire que l'application $v \mapsto B(u,v)$ est une forme linéaire continue sur H. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un élément unique $w \in H$ (qui dépends de u) tel que $B(u,v) = (w,v), \ (\forall v \in H)$. Notons $Au = w$ alors,

$$B(u,v) = (Au, v), \ \forall v \in H. \tag{1.7}$$

On montre que l'application $A : H \to H$, qui à u associe Au est linéaire et continue. En effet, pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u_1, u_2 \in H$, on a

$$\begin{aligned}
(A(\lambda u_1 + \mu u_2), v) &= B[\lambda u_1 + \mu u_2), v] \text{ par (1.7)} \\
&= \lambda B[u_1, v] + \mu B[u_2, v] \\
&= \lambda(Au_1, v) + \mu(Au_2, v) \text{ de nouveau par(1.7)} \\
&= (\lambda Au_1 + \mu Au_2, v)
\end{aligned}$$

Cette égalité est obtenu pour tout $v \in H$, d'où $A(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda Au_1 + \mu Au_2$. Pour la continuité, on a

$$\|Au\|^2 = (Au, Au) = B[u, Au) \leq \alpha \|u\| \|Au\|.$$

Par conséquent $\|Au\| \leq \alpha \|u\|$, pour tout $u \in H$. Donc A est continue. Maintenant, on montre que A est bijective. On commence par l'injectivité. Comme A est linéaire, il suffit de montrer que ($Au = 0 \Longrightarrow u = 0$). On a

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u,u) = (Au, u) \leq \|Au\| \|u\|,$$

d'où $\beta \|u\| \leq \|Au\|$, il vient que si $Au = 0$ alors $u = 0$.

Montrons que A est surjective c'est à dire l'image de A : $Im(A) = H$. On montre d'abord que $Im(A)$ est fermé et puis on montre qu'il est dense dans H. Soit $(u_n)_n$ une suite dans H telle que $(Au_n)_n$ converge vers $w \in H$, alors pour tout $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\beta\|u_p - u_q\|^2 \leq B[u_p - u_q, u_p - u_q] = (A(u_p - u_q), u_p - u_q) \leq \|Au_p - Au_q\|\|u_p - u_q\|.$$

ce qui implique

$$\|u_p - u_q\| \leq \frac{1}{\beta}\|Au_p - Au_q\|.$$

Comme $(Au_n)_n$ est convergente, on en déduit que $(u_n)_n$ est de Cauchy. D'où la suite $(u_n)_n$ converge vers un élément $u \in H$. On a par continuité de A,

$$\|Au - w\| = \lim_{n\to\infty} \|A(u - u_n)\| \leq \lim_{n\to\infty} (\alpha\|u - u_n\|) = 0,$$

d'où $Au = w$ et donc $w \in Im(A)$.

On montre que $Im(A)$ est dense dans H. Il suffit de montrer que $(Im(A))^{\perp} = \{0\}$. Soit $v \in (Im(A))^{\perp}$. Alors $(Av, v) = 0$, ce qui implique que $\beta\|v\|^2 \leq B[v, v] = (Av, v) = 0$ et donc $v = 0$. Il vient que $(Im(A))^{\perp} = \{0\}$. Donc $Im(A)$ est dense dans H. L'image de A est fermé et dense dans H, d'où $Im(A) = H$ et la surjectivité de A.

Ensuite, d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $w \in H$ tel que

$$\langle f, v\rangle = (w, v), \ \forall v \in H.$$

Grâce à la bijectivité de A en en déduit qu'il existe un élément unique $u \in H$ tel que $Au = w$ et par conséquent

$$B(u, v) = (Au, v) = (w, v) = \langle f, v\rangle, \ \forall v \in H.$$

Ce qui termine la preuve. □

Un résultat plus générale, est celui de Stampacchia

Théorème 1.2. *Soient H un espace de Hilbert sur le corps $\mathbb{R}$ et C un convexe fermé de H. a une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors pour tout $f \in H'$, il existe un élément unique $u \in C$ tel que*

$$a(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle, \ \forall v \in C. \tag{1.8}$$

Remarque 1.4. Si de plus C est un sous espace vectoriel, alors l'inégalité (1.8) est équivalent à

$$a(u, w) = \langle f, w\rangle, \ \forall w \in C.$$

Il suffit de prendre $v = \pm w + u \in C$. Dans le cas où $C = H$, on obtient le théorème de Lax-Milgram.

Démonstration. Comme $f \in H'$, alors d'après le théorème de Riesz, il existe un élément unique $\phi \in H$ tel que

$$\langle f, v\rangle = (\phi, v), \ \forall v \in H.$$

(Rappelons que (,) désigne le produit scalaire sur H). Considérons l'opérateur $A : H \longrightarrow H$ défini par $(Au, v) = a(u, v), \forall v \in H$ (voir la preuve du théorème de Lax-Milgram (1.1)). Alors, l'inégalité (1.8) est équivalent à

$$(Au - \phi, v - u) \geq 0, \ \forall v \in C.$$

On a pour tout $\beta > 0$:

$$((Au - \phi, v - u) \geq 0, \ \forall v \in C) \Longleftrightarrow ((\beta(Au - \phi) + u - u, v - u) \geq 0, \ \forall v \in C)$$

C'est à dire u est la projection sur C de $\beta(Au - \phi) + u - u$. Autrement dit u est un point fixe de l'opérateur T défini sur H par

$$v \longmapsto T(v) := Pr_C(\beta(Au - \phi) + u - u).$$

Donc il suffit de montrer que T est contractante pour certaine valeur $\beta > 0$ (en exercice). Ce qui fini la preuve. □

Exercice 2.

1. Dans le théorème de Lax-Milgram, montrer que si en plus a est symétrique alors u est caractérisé par

$$J(u) = \min_{v \in H} J(v) \text{ où } J(v) := \frac{1}{2}a(v, v) - \langle f, v\rangle.$$

2. Même question pour le théorème de Stampacchia avec le minimum sur C.

1.3 Existence pour le problèmes de Dirichlet

Les problèmes elliptiques de Dirichlet sont les problèmes aux limite suivant

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = \psi & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.9}$$

où L est défini par défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u} \tag{1.10}$$

La condition aux limites $u = \psi$ sur $\partial\Omega$ s'appelle condition de Dirichlet sur le bord de Ω (homogène si $\psi \equiv 0$ et non non homogène si $\psi \neq 0$).

1.3.1 Formulation variationnelle et solution faible

On commence par le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

Tout d'abord et dans tout la suit, on suppose que

$$a^{ij},\ b^i,\ c \in L^\infty(\Omega)\ (i,j = 1,\dots,N) \tag{1.12}$$

Supposons que u est une solution du problème (1.11) appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et $f \in L^2(\Omega)$.

En multipliant l'EDP $Lu = f$ par une fonction test $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ et en intégrant par parties, on obtient :

$$\boxed{\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^n b^i u_{x_i} v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x.} \tag{1.13}$$

Le terme au bord s'annule car $u = v = 0$ sur $\partial\Omega$. Les termes de l'identité ci-dessus sont bien défini dès que $u \in L^2(\Omega)$ et $\nabla u \in (L^2(\Omega))^N$. C'est-à-dire $u \in H_0^1(\Omega)$. Grâce à la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, cette identité reste valable pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$.

Maintenant supposons que $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfait l'équation (1.13). Alors l'équation $Lu = f$ dans Ω est évidement satisfait seulement au sens des distributions (à vérifier en exercice), et la condition au bords $u = 0$ sur $\partial\Omega$ est satisfait au sens de trace (i.e. $Tu = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$) tenant en compte la régularité du domaine $\partial\Omega$. Dans ce cas, on dit que u est une solution faible du problème (1.11). De plus, si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ alors $u \equiv Tu$ pour tout $x \in \partial\Omega$ et l'identité $Lu = v$ devient vrai pour tout $x \in \Omega$. dans ce cas u s'appelle solution forte (ou bien solution classique). Pour résumer on donne la définition suivant :

Définition 1.2. Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.

1. L'identité

$$\boxed{\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b^i u_{x_i} v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv \mathrm{d}x = \langle f, v\rangle, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).} \tag{1.14}$$

s'appelle formulation variationnelle associée au problème (1.11).

2. La forme bilinéaire associée à l'opérateur L est définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$\boxed{B(u,v) := \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_\Omega b^i u_{x_i} v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv \mathrm{d}x} \tag{1.15}$$

3. On dit que $u \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.11) si elle satisfait la formulation variationnelle (1.13)

4. La solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ est dite solution forte (ou bien solution classique) si elle appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

1.3.2 Existence de la solution

On applique le théorème de Lax-Milgram pour avoir l'existence de la solution. On a le résultat suivant :

Théorème 1.3. *Si L est un uniformément elliptique e $a^{ij}, b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. avec $c \geq \mu > 0$ où μ est un constant assez grand. Alors le problème de Dirichlet* (1.11) *admet une solution faible unique.*

Démonstration. La solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ -par définition- vérifier la formulation variationnelle

$$B(u,v) = \langle f, v\rangle, \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

où B est la forme bilinéaire définie par

$$B(u,v) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \mathrm{d}x + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega b^i u_{x_i} v \mathrm{d}x + \int_\Omega cuv \mathrm{d}x.$$

On va appliquer le théorème de Lax-Milgram (1.1). Pour cela, on démontre que B et continue et coercive sur $H_0^1(\Omega)$.

Commençons par la continuité : On a

$$|B(u,v)| \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij} u_{x_i} v_{x_j}| \mathrm{d}x + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |b^i u_{x_i} v| \mathrm{d}x + \int_\Omega |cuv| \mathrm{d}x$$

Commençons à majorer le premier terme

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}||u_{x_i}||v_{x_j}| \mathrm{d}x \leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i,j=1}^{n} u_{x_i} v_{x_j}| \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega |\nabla u||\nabla v| \mathrm{d}x$$

où $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{1\leq i,j\leq N} \|a^{ij}\|_{L^\infty(\Omega)}$ et d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} |a^{ij}||u_{x_i}||v_{x_j}| \mathrm{d}x \leq C_1 \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} = C_1 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

Pour le deuxième et le troisième termes, on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwartz et puis Poincaré :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |b^i u_{x_i} v| \mathrm{d}x &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i} v| \mathrm{d}x \leq C\|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \nabla u||v| \mathrm{d}x \\ &\leq C_2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \end{aligned}$$

(où $\|b\|_{L^\infty(\Omega)} = \sum_{1\leq i\leq N} \|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}$). Et on a

$$\int_\Omega |c||u||v| \mathrm{d}x \leq \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned}|B(u,v)| &\leq (C_1+C_2+C_3)\,\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\\ &= C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}\end{aligned}$$

Ce qui donne la continuité de B dans $H_0^1(\Omega)$. Montrons maintenant que B est coercive. i.e.

$$\exists\beta>0 : B(u,u)\geq\beta\|u\|^2,\ \forall u\in H_0^1(\Omega).$$

On a d'après la condition d'ellipticité (1.4) :

$$\begin{aligned}\theta\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x &\leq \int_\Omega\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x)u_{x_i}u_{x_j}\mathrm{d}x\\ &= B(u,u)-\int_\Omega\sum_{i=1}^n b^iu_{x_i}u\mathrm{d}x-\int_\Omega cu^2\mathrm{d}x\\ &\leq B(u,u)+\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega|\nabla u||u|\mathrm{d}x-\mu\int_\Omega u^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy (avec ε), on a

$$\int_\Omega|\nabla u||u|\mathrm{d}x\leq\frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2\varepsilon}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x$$

où $\varepsilon>0$ est choisi assez petit de sorte que

$$\frac{\varepsilon}{2}\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\leq\frac{\theta}{2}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\theta}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x &\leq B(u,u)+\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|b\|_{L^\infty(\Omega)}-\mu\right)\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x\\ &= B(u,u)+(C-\mu)\int_\Omega|u|^2\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Si on choisit $\mu\geq C$ alors, on obtient

$$B(u,u)\geq\frac{\theta}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}x:=\beta\|u\|_{H_0^1(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

d'où la coercivité de B sur $H_0^1(\Omega)$. Comme $f\in H^{-1}(\Omega):=(H_0^1(\Omega))'$, alors d'après le théorème de Lax-Milgram, il existe un élément unique $u\in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$B(u,v)=\langle f,v\rangle,\ \text{pour tout } v\in H_0^1(\Omega).$$

Donc u est l'unique solution faible du problème (1.11). □

Exemple 1.1. Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.16}$$

Alors, $Lu = -\Delta u + u$ et $a^{ij} = \delta^{ij}$, $b_i = 0$ et $c = 1$. la formulation variationnelle associée est

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x.$$

La forme bilinéaire associé est définie par

$$B(u,v) = \int_\Omega \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x$$

On a B est continue car

$$\begin{aligned} |B(u,v)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq (\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} (\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)})^{1/2} \\ &= \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C \|u\|_{H^1_0(\Omega)} \|v\|_{H^1_0(\Omega)} \end{aligned}$$

Pour la coercivité, on a

$$B(u,u) = \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \geq \|u\|^2_{H^1_0(\Omega)}.$$

Considérons maintenant le problème de Dirichlet non homogène

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ u = \psi & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.17}$$

Pour la simplicité, on considère $Lu := -\Delta u + u$. Alors, on essaye de donner un sens à la solution du problème de Dirichlet non homogène (1.17). Si u est une solution appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, alors elle satisfait pour tout $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\Omega)$:

$$\int_\Omega \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x.$$

cette équation à un sens pour $u \in H^1(\Omega)$. Inversement, si $u \in H^1(\Omega)$ vérifie l'équation précédent, alors elle vérifie l'équation $Lu = f$ au sens des distributions et d'après le théorème de trace (voir cours de chapitre 2) la condition au bords a un sens si $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Supposons que $\psi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. Alors il existe une fonction $g \in H^1(\Omega)$ telle que $Tg = \psi$ dans $\partial\Omega$. Posons $w = u - g$. Alors le problème de Dirichlet (1.17) est équivalent au problème de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} Lw = f - Lg & \text{dans} \quad \Omega \\ w = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.18}$$

et u est une solution de (1.17) si et seulement si w est une solution de (1.18).

Exercice **3.** Montrer que si $f \in H^{-1}(\Omega)$ alors $f - Lg \in H^{-1}(\Omega)$.

On donc la définition suivante

Définition **1.3.** Soit $f \in H^{-1}(\Omega)$.

1. On dit que $u \in H^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.17) si $w \in H_0^1(\Omega)$ est une solution faible du problème (1.18).
2. La solution faible $u \in H^1(\Omega)$ est dite solution forte (ou bien solution classique) si elle appartient à $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Alors on conclut par le résultat d'existence suivant

Théorème **1.4.** *Pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $\psi \in H^{1/2}(\Omega)$, le problème de Dirichlet non homogène* (1.17) *admet une solution faible unique $u \in H^1(\Omega)$.*