Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Master 1 : Analyse fonctionnelle , 2019/2020 — Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Chapitre III : Problèmes aux limites et formulation variationnelle (2)

Table des matières

1 Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre (2) **1**
1.1 Problème de Neumann homogène 1
1.2 Problèmes aux limite mixtes 2
1.2.1 Conditions aux limites mêlées 2
1.2.2 Condition aux limites périodiques 3

1 Problèmes aux limites linéaires de seconde ordre (2)

1.1 Problème de Neumann homogène

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Le problème de Neumann homogène est donné par

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

où L est défini par défini sous forme divergentielle par

$$\boxed{Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u} \tag{1.2}$$

et $\frac{\partial u}{\partial n}$ désigne la dérivée normale extérieur de u, c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial n}(x) := \nabla u(x).\overrightarrow{n(x)}$ et $\overrightarrow{n(x)}$ et le vecteur unitaire de la normale extérieur à $\partial\Omega$ en x.

Dans la suite on va considérer le cas particulier où

$$Lu = -\Delta u + u$$

et on étudie la question d'existence du problème de Neumann suivant

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

Supposons que $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (1.3) telle que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega}) := \{\overline{u}_{|\overline{\Omega}} : \overline{u} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)\}$ et supposons que $f \in L^2(\Omega)$. Soit $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) := \{\overline{v}_{|\overline{\Omega}} : \overline{v} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)\}$. On multiplie l'équation de (1.3) par v et en intègre par partie, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv dx = \int_\Omega fv dx$$

Comme $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, alors $\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS = 0$. D'où on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \tag{1.4}$$

Comme l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, alors l'inégalité précédente est satisfaite pour tout $v \in H^1(\Omega)$ (à vérifier en exercice). On a donc u satisfait la formule suivante

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{1.5}$$

et cette équation à un sens dès que $u \in H^1(\Omega)$. inversement supposons que $u \in H^1(\Omega)$ satisfait (1.5). Si de plus $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, alors d'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega -\Delta v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x, \ \forall v \in H^1(\Omega) \tag{1.6}$$

Si on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors (1.6) devient

$$\int_\Omega -\Delta v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv \mathrm{d}x = \int_\Omega fv \mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.7}$$

ce qui donne $-\Delta u + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. et cette dernier équation est satisfait p.p. dans Ω. D'où l'équation (1.6) implique que

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS, \ \forall v \in H^1(\Omega)$$

c'est à dire $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ dans $(H^{1/2}(\Omega))'$. Donc u satisfait le problème (1.3). On donne alors la définition suivante

Définition 1.1. *On dit que u est une solution faible de* (1.3) *si $u \in H^1(\Omega)$ et satisfait la formulation variationnelle* (1.5). *Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors u s'appelle solution classique.*

1.2 Problèmes aux limite mixtes

1.2.1 Conditions aux limites mêlées

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } I =]0,1[\\ u(0) = 0, \ u'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Supposons que que $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ est une solution de (1.8), alors en multiplions l'équation par $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, on obtient

$$\int_0^1 u'v' \mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 uv \mathrm{d}x = \int_0^1 fv \mathrm{d}x.$$

On a $u'(1)=0$ et on choisit v telle que $v(0)=0$, alors l'équation ci-dessus devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0)=0. \tag{1.9}$$

On donne le résultat suivant

Proposition 1.0.1. *1. L'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]) : v(0)=0\}$ *est dense dans l'espace*

$$H := \{v \in H^1(\Omega) : v(0)=0\}.$$

2. L'espace $H^1(\Omega)$ *est un espace de Hilbert.*

Démonstration. En exercice □

D'après la densité, l'équation (1.9) est équivalente à la formulation variationnelle suivante

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H. \tag{1.10}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution unique $u \in H$ de (1.10), qui est appelée solution faible de (1.8).

Exercice 1. *Si* $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ *est une solution faible de* (1.8). *Montrer qu'elle est solution classique (i.e.* u *satisfait l'équation de* (1.8) *et les conditions aux limites).*

1.2.2 Condition aux limites périodiques

Soit à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} -u'' + u = f \text{ dans } I =]0,1[, \quad f \in L^2(0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(1) = u'(1) \end{cases} \tag{1.11}$$

Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ une solution classique de (1.11). On a pour tout $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$:

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]) \tag{1.12}$$

Si on choisit v telle que $v(0)=v(1)$, alors

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)) = 0.$$

D'où l'équation (1.12) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0)=v(1). \tag{1.13}$$

Exercice 2. *1. Montrer que l'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]), \ v(0)=v(1)\}$ *est dense dans l'espace*

$$H := \{v \in H^1(\Omega) : v(0)=v(1)\}.$$

2. Montrer que l'espace H *est un espace de Hilbert.*

D'après la question 1 de l'exercice, l'équation (1.13) est équivalent à

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H, \tag{1.14}$$

c'est la formulation variationnelle associée au problème (1.11).

Exercice 3. *Montrer que si $u \in H \cap \mathcal{C}^2([0,1])$ et satisfait (1.14) alors elle satisfait le problème (1.11).*

On donne alors la définition suivante

Définition 1.2. *On dit que u est une solution faible de (1.3) si $u \in H$ et satisfait la formulation variationnelle (1.14). Si $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ alors u s'appelle solution classique.*