Université de Mohammed Boudiaf, M'sila — Faculté des mathématiques
Master 1 : Analyse fonctionnelle, 2019/2020 — Mr. Bougherara Brahim

Module : **Formulation variationnelle**

Rappel. Pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^N$, on note $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ avec $0 \le k \le \infty$, l'espace

$$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) = \{\overline{u}_{|\overline{\Omega}} : \overline{u} \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N)\}.$$

Si Ω est borné et régulier alors $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$ et en particulier $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ et aussi dense danse dans $H^1(\Omega)$ pour tout $1 \le k \le \infty$. si Ω n'est pas borné alors $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

Exercice 1. *Considérons le problème suivant*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \ \text{dans}\ I =]0,1[, & f \in L^2(0,1) \\ u(0) = u(1), \ u'(1) = u'(1) \end{cases} \tag{0.1}$$

1. *Soit* $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$ *une solution classique de* (0.1). *Donner la formulation variationnelle satisfait par* u, *(En acceptant que l'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1)\}$ *est dense dans l'espace*
$$H := \{v \in H^1(0,1) : v(0) = v(1)\})$$
2. *Montrer l'existence et l'unicité de la solution faible* u *(Solution de la formulation variationnelle).*
3. *Si la solution faible* $u \in \mathcal{C}^2([0,1]$, *montrer qu'elle est solution classique de*(0.1)

Solution :

1. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ une solution classique de (0.1). On multiplie l'équation de(0.1) par $v \in \mathcal{C}^1([0,1])$, et en intégrant par parties, on obtient :

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]) \tag{0.2}$$

Si on choisit v telle que $v(0) = v(1)$, alors

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = v(0)(u'(1) - u'(0)) = 0.$$

D'où l'équation (0.2) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1]),\ v(0) = v(1). \tag{0.3}$$

Grâce à la densité, l'équation (0.3) est équivalent à

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H, \tag{0.4}$$

c'est la formulation variationnelle associée au problème (0.1).

2. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire a définie sur H par

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v' \mathrm{d}x + \int_0^1 uv \mathrm{d}x$$

et la forme linéaire ℓ définie par

$$\ell(v) = \int_0^1 fv \mathrm{d}x, \ \forall v \in H.$$

Pour la coercivité de a, on a

$$a(u,u) = \int_0^1 u'^2 \mathrm{d}x + \int_0^1 u^2 \mathrm{d}x = \|u\|_{H^1(0,1)}^2$$

Ce qui implique la coercivité. Pour la continuité, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans L^2 et puis dans $\mathbb{R}^2$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} a(u,v) & \leq & \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\ & \leq & \left(\|u'\|_{L^2}^2 + \|u\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \left(\|v'\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right)^{1/2} \\ & \leq & \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \end{array}$$

ce qui donne la continuité de la forme bilinéaire. Pour la continuité de la forme linéaire, on a

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(0,1)} = C\|v\|_{H^1(0,1)}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution faible $u \in H$.

3. Soit $u \in \mathcal{C}^2([0,1]) \cap H$ une solution faible. Alors u vérifie l'équation (0.4). On choisissant $v \in \mathcal{D}(0,1)$ dans (0.4), et comme $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$, en intégrant par partie, (0.4) devient

$$\int_0^1 (-u'' + u)v \mathrm{d}x = \int_0^1 fv \mathrm{d}x$$

ce qui implique que $-u'' + u = f$ dans Ω. Maintenant, on choisit $v \in \mathcal{C}^1([0,1]$, $v(1) = v(0)$. et on intègre le premier terme dans (0.4) par partie, on obtient

$$-\int_0^1 u''v \mathrm{d}x + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) + \int_0^1 uv \mathrm{d}x = \int_0^1 fv \mathrm{d}x$$

Comme $-u'' + u = f$, alors on en déduit que $u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0$. Comme $v(0) = v(1)$, alors on obtient $u'(0) = u'(1)$. Donc u satisfait le problème (0.1).

Exercice 2. *Considérons le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \textit{dans } I =]0,1[\\ u'(0) - ku(0) = 0, u(1) = 0 \end{cases} \tag{0.5}$$

avec $f \in L^2(0,1)$.

1. *Montrer que l'espace* $H := \{w \in H^1(0,1) : w(1) = 0\}$ *est un espace de Hilbert.*
2. *Si* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$ *est une solution (classique) de* (0.5)*, Montrer que*

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1], v(1) = 0.$$

3. *Montrer que l'espace* $\{v \in \mathcal{C}^1([0,1] : v(1) = 0\}$ *est dense dans* H.
4. *Déduire la formulation variationnelle du problème* (0.5) *:*

$$\boxed{\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in H.} \qquad (0.6)$$

5. *Pour* $k \geq 0$*, montrer que l'équation précédente admet une solution unique* $u \in H$ *(c'est la solution faible de* (0.5)*).*
6. *Si la solution faible* $u \in \mathcal{C}^2([0,1])$*, montrer qu'elle est classique (i.e.* u *satisfaite* (0.5)*).*

Solution :

1. Tout d'abord, on montre que H est un sous espace fermé de $H^1(0,1)$. On $H \subset H^1(0,1)$ (par définition). Soit $(u_n)_n$ une suite de H qui converge vers u dans $H^1(0,1)$. Montrons que $u \in H$. D'après l'injection continue $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1]$, on a $u_n, u \in \mathcal{C}([0,1]$
$$\|u_n - u\|_{\mathcal{C}([0,1]} \leq C\|u_n - u\|_{H^1(0,1)} \longrightarrow 0, \quad \text{quand } n \to \infty.$$
D'où $u_n \longrightarrow u$ uniformément dans $\overline{\Omega}$. Donc
$$\forall x \in [0,1] : u_(x) \longrightarrow u(x)$$
en particulier pour $x = 1$, on a $u_n(1) \longrightarrow u(1)$. Comme $u_n \in H$ alors $u_n(1) = 0$, donc $u(1) = 0$. D'où $u \in H$. Ce qui implique que H est fermé. Montrons que H est complet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy de $H \subset H^1(0,1)$ (par rapport la norme de $H^1(0,1)$) donc la suite est convergente dans $H^1(0,1)$, car $H^1(0,1)$ est complet, comme H est fermé, alors la limite de u_n est dans H. Donc la suite est convergent dans H. D'où H est complet avec la norme $\|.\|_{H^1(0,1)}$. Comme $(H^1(0,1), \|\|_{H^1(0,1)})$ est un espace de Hilbert, alors $(H, \|\|_{H^1(0,1)})$ est aussi.
2. On multiplie l'équation par $v \in \mathcal{C}^1([0,1] : v(1) = 0$, et on intègre par partie, on obtient
$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x - u'(1)v(1) + u(0)v(0) + \int_0^1 uv\mathrm{d}x = \int_0^1 fv\mathrm{d}x.$$
Comme $v(1) = 0$ et $u'(0) = ku(0)$ alors on obtient
$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x,\ \forall v \in \mathcal{C}^1([0,1], v(1) = 0.$$

3. Soit $w \in H$ alors $u \in H^1(0,1)$. Comme $\mathcal{C}^1([0,1])$ est dense dans $H^1(0,1)$, alors il existe une suite $(\phi_n)_n$ de $\mathcal{C}^1([0,1])$ telle que

$$\phi_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} w, \quad \text{dans } H^1(0,1).$$

On pose $w_n = \phi_n \eta_n$, où $\eta_n \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ et la fonction de troncature définie par

$$\eta_n(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in]1-1/2n, 1] \\ \text{entre 0 et 1} & si \quad x \in [1-1/n, 1-1/2n] \\ 1 & si \quad x \in [0, 1-1/n] \end{cases} \tag{0.7}$$

Alors $w_n \in \mathcal{C}^1([0,1])$, $w_n(1) = 0$, et on peut démontrer que $w_n \longrightarrow w$ dans $H^1(0,1)$ (Voir le cours de densité).

4. Soit $v \in H$, alors grâce à la densité, il existe une suite $v_n \in\in \mathcal{C}^1([0,1])$, $v_n(1) = 0$, convergente vers v dans $H^1(0,1)$. D'après la question 2, on a

$$\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv_n\mathrm{d}x + ku(0)v_n(0) = \int_0^1 fv_n\mathrm{d}x, \tag{0.8}$$

Comme $v_n \longrightarrow v$ dans $H^1(0,1)$, alors $v_n \longrightarrow v$ et $v_n' \longrightarrow v'$ dans $L^2(0,1)$ et grâce à l'injection de Sobolev $H^1(0,1) \hookrightarrow \mathcal{C}([0,1])$, $v_n(0) \longrightarrow v(0)$. On en déduite que

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x - \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x\right| &= |\int_0^1 u'(v_n' - v')\mathrm{d}x| \\ &\leq \int_0^1 |u'||v_n' - v'|\mathrm{d}x \\ &\overset{Cauchy-Schwartz}{\leq} \|u'\|_{L^2}\underbrace{\|v_n' - v'\|_{L^2}}_{\to 0} \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

D'où$\int_0^1 u'v_n'\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x$. De la même manière on obtient

$$\int_0^1 uv_n\mathrm{d}x \to \int_0^1 uv\mathrm{d}x, \int_0^1 fv_n\mathrm{d}x - \int_0^1 fv\mathrm{d}x.$$

En passant donc à la limite dans (0.8), on obtient

$$\boxed{\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H.} \tag{0.9}$$

5. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire a définie sur H par

$$a(u,v) := \int_0^1 u'v'\mathrm{d}x + \int_0^1 uv\mathrm{d}x + ku(0)v(0), \ \forall u, v \in H$$

et la forme linéaire ℓ définie par

$$\ell(v) = \int_0^1 fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in H.$$

Pour la coercivité de a, on a

$$a(u,u)=\int_0^1 u'^2\mathrm{d}x+\int_0^1 u^2\mathrm{d}x+ku(0)^2\geq\int_0^1 u'^2\mathrm{d}x+\int_0^1 u^2\mathrm{d}x=\|u\|^2_{H^1(0,1)}$$

($k\geq 0$). Pour la continuité, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz dans L^2 et puis dans $\mathbb{R}^2$ et on utilise l'injection $H^1(0,1)\hookrightarrow\mathcal{C}([0,1])$, on obtient

$$\begin{array}{rcl} a(u,v) & \leq & \|u'\|_{L^2}\|v'\|_{L^2}+\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}+k|u(0)v(0)| \\ & \leq & \left(\|u'\|^2_{L^2}+\|u\|^2_{L^2}\right)^{1/2}\left(\|v'\|^2_{L^2}+\|v\|^2_{L^2}\right)^{1/2}+k\|u\|_{\mathcal{C}^0}\|u\|_{\mathcal{C}^0} \\ & \leq & \|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)}+k\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \\ & = & (1+k)\|u\|_{H^1(0,1)}\|v\|_{H^1(0,1)} \end{array}$$

ce qui donne la continuité de la forme bilinéaire. Pour la continuité de la forme linéaire, on a

$$|\ell(v)|\leq\|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\leq\|f\|_{L^2}\|v\|_{H^1(0,1)}=C\|v\|_{H^1(0,1)}$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram, on obtient l'existence d'une solution faible $u\in H$.

6. Soit $u\in\mathcal{C}^2([0,1])\cap H$ une solution faible. i.e. u satisfait l'équation (0.6). On choisissant $v\in\mathcal{D}(0,1)$, (0.6) devient

$$\int_0^1 u'v'\mathrm{d}x+\int_0^1 uv\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

en intégrant par partie, on obtient

$$\int_0^1(-u''+u)v\mathrm{d}x=\int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

ce qui implique que $-u''+u=f$ dans Ω. Maintenant, on choisit $v\in\mathcal{C}^1([0,1]$, $v(1)=0$. et on intègre le premier terme dans (0.6) par partie, on obtient

$$-\int_0^1 u''v\mathrm{d}x+\underbrace{u'(1)v(1)}_{=0}-u'(0)v(0)+\int_0^1 uv\mathrm{d}x+ku(0)v(0)=\int_0^1 fv\mathrm{d}x$$

Comme $-u''+u=f$, alors on en déduit que $-u'(0)v(0)+ku(0)v(0)=0$. Comme $v(0)$ est quelconque, alors on obtient $u'(0)=ku(0)$. Donc u satisfait le problème (0.5).

Exercice 3. *Soit à résoudre le problème aux limites suivant*

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u+V.\nabla u & = & f \textit{ dans } \Omega \\ u & = & 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{0.10}$$

où $f\in L^2(\Omega)$, V est une fonction assez régulière à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ telle que $divV=0$.

1. *Trouver la formulation variationnelle du problème* (0.10).
2. *Montrer l'existence de la solution faible.*
3. *Si la solution faible* $u \in H^2(\Omega)$*, montrer qu'elle vérifier le problème* (0.10) *dans un sens à préciser.*

Solution

1. Supposons que u est une solution assez régulière de (0.10). Alors on multiplie l'équation par $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}$ qui s'annule sur $\partial\Omega$, on obtient après intégration par partie :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x.$$

Comme l'espace $\{v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega} : v_{|\partial\Omega} = 0\}$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$, alors l'équation précédente est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x = \int_\Omega f v \mathrm{d}x, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \qquad (0.11)$$

2. On applique le théorème de Lax-Milgram sur la forme bilinéaire définie sur $H_0^1(\Omega)$ par

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u v \mathrm{d}x$$

et la forme linéaire suivante

$$\ell(v) = \int_\Omega f v \mathrm{d}x.$$

On commence par la coercivité : On a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$

$$a(u,u) = \int_\Omega \nabla u.\nabla u \mathrm{d}x + \int_\Omega V.\nabla u u \mathrm{d}x.$$

On a en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned}
\int_\Omega V.\nabla u u \mathrm{d}x = \int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \mathrm{div}(uV)u + \underbrace{\int_{\partial\Omega} u^2 V.n dS}_{=0} \\
&= -\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x - \underbrace{\int_\Omega \mathrm{div} V u^2 \mathrm{d}x}_{=0} \\
&= -\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ce qui implique que $\int_\Omega (uV).\nabla u \mathrm{d}x = 0$ Donc $a(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \mathrm{d}x = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. D'où a est coercive. Pour la continuité, on a par l'inégalité de Cauchy Schwartz et de Poincaré

$$\begin{aligned}
|a(u,v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)} + \|V\|_\infty \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&\leq (1+C)\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|\nabla v\|_{H_0^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

(Rappelons que $\|u\|_{H_0^1(\Omega)} := \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}$) Pour la continuité de ℓ, on a

$$\ell(v) \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

D'où on peut appliquer le théorème de Lax-Milgram et démontrer l'existence d'une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$.

3. Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$. Alors en appliquant la formule de Green dans la formulation variationnelle (0.11), on obtient

$$\int_\Omega -\Delta u v dx + \underbrace{\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial n} v dx}_{=0} + \int_\Omega V.\nabla u v dx = \int_\Omega f v dx, \ \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{0.12}$$

Si on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, alors on obtient

$$\int_\Omega -\Delta u v dx + \int_\Omega V.\nabla u v dx = \int_\Omega f v dx, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

ce qui implique que $-\Delta u + V.\nabla u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $\Delta u, \ \nabla u, \ f \in L^2(\Omega)$ alors $-\Delta u + V.\nabla u = f$ p.p. Ω. D'où u satisfait le problème

$$\begin{cases} -\Delta u + V.\nabla u &= f \text{ p.p. dans } \Omega \\ u &= 0 \ \text{ p.p. sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.13}$$

Exercice **4.** *Soit à résoudre le problème de Neumann suivant*

$$\begin{cases} -\Delta u + u &= f \ \textit{dans } \Omega \\ u &= g \ \ \textit{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.14}$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $g \in (H^{1/2}(\partial\Omega))'$.

1. *Donner la formulation variationnelle du problème* (0.14)*.*
2. *Montrer l'existence de la solution faible.*
3. *Si la solution faible $u \in H^2(\Omega)$, montrer qu'elle vérifier le problème* (0.14) *dans un sens à préciser.*

Solution

1. Soit u une solution assez régulière de (0.14). On multiplie par $v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et on intègre par partie, on obtient :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v dS + \int_\Omega u v dx = \int_\Omega f v dx.$$

Grâce à la condition au bord, on obtient

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega u v dx = \int_\Omega f v dx + \int_{\partial\Omega} g v dS.$$

Comme l'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, alors on aura la formulation variationnelle suivante :

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx + \int_\Omega u v dx = \int_\Omega f v dx + \langle g, v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))' \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{0.15}$$

2. On applique le théorème de Lax-Milgram : La forme bilinéaire associée est définie sur $H^1(\Omega)$ par
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u.\nabla v \mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x.$$
La forme linéaire est définie par
$$\ell(v) = \int_\Omega fv\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} gvdS.$$
La coercivité et la continuité sont immédiat. Pour la continuité de ℓ, on a par l'inégalité de Cauchy Schwartz et de Poincaré :
$$\int_\Omega fv\mathrm{d}x \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$
D'autre part, on a comme $g \in (H^{1/2}(\Omega))'$, alors d'après le théorème de trace, on a
$$|\langle g, v\rangle| \leq C\|v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq c\|v\|_{H^1(\Omega)}$$
Par conséquent
$$|\ell(v)| \leq C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$
3. Si $u \in H^2(\Omega)$, alors en intégrant par partie la formulation variationnelle (0.15), On obtient :
$$\int_\Omega -\Delta uv\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vdS + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x + \langle g, v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))'\times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \tag{0.16}$$
On choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, (0.16), devient
$$\int_\Omega -\Delta uv\mathrm{d}x + \int_\Omega uv\mathrm{d}x = \int_\Omega fv\mathrm{d}x, \ \forall v \in \mathcal{D}(\Omega)$$

D'où $-\Delta u + u = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $-\Delta u, u, f \in L^2(\Omega)$ alors $-\Delta u + u = f$ p.p. Ω. et par conséquent (0.16) devient
$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} vdS = \langle g, v\rangle_{(H^{1/2}(\partial\Omega))'\times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$
Ce qui donne $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ p.p. dans $\partial\Omega$.