Solution des exercices du TD3

Exercice 1 :

Le cycle de Carnot étudié est le cycle 1-2-3-4 de la figure. Avant de procéder au calcul des échanges d'énergie, nous devons déterminer les enthalpies massiques de l'eau aux différents points du cycle. Pour les pointes 3 et 4, ces enthalpies sont relevées sur le tableau de données :

$$h_3 = 908,79 kJ.kg^{-1} \quad ; \quad h_4 = 2799,5 kJ.kg^{-1}$$

Les points 1 et 2 correspondent à des mélanges diphasiques (liquide/vapeur). Il faut donc commencer par déterminer le titre vapeur "x_1" du mélange en ces points. A cet effet on utilise la valeur de l'enthalpie massique de l'eau qui est connue puisque les étapes 4-1 et 2-3 sont isentropiques, soit :

$$s_1 = s_4 = 6,3409 KJ/kg.K \quad ; \quad s_2 = s_3 = 2,4474 KJ/kg.K$$

En utilisant ensuite les entropies du liquide saturé (point 2') et de la vapeur saturée (point 7) pour une pression P_2 de 0,1 bar, nous avons :

$$s_1 = x_1.s_7 + (1-x_1)s_{2'} = x_1 \times 8,1502 + (1-x_1) \times 0,6493 \Rightarrow x_1 = 0,7588$$

$$s_2 = x_2.s_7 + (1-x_2)s_{2'} = x_2 \times 8,1502 + (1-x_2) \times 0,6493 \Rightarrow x_2 = 0,2397$$

Le calcul des enthalpies massiques conduit alors à:

$$h_1 = x_1.h_7 + (1-x_1)h_{2'} = x_1 \times 2584,7 + (1-x_1) \times 191,83 = 2007,51 kJ/kg$$

$$h_2 = x_2.h_7 + (1-x_2)h_{2'} = x_2 \times 2584,7 + (1-x_2) \times 191,83 = 765,44 kJ/kg$$

Le calcul des échanges d'énergie au niveau des différents éléments de la machine donne :

$$\dot{Q}_c = \dot{m}(h_4 - h_3) = 18907 kJ/s \quad ; \quad \dot{Q}_f = \dot{m}(h_2 - h_1) = -12420,7 kJ/s$$

$$\dot{W}_t = \dot{m}(h_1 - h_4) = -7919,87 kJ/s \quad ; \quad \dot{W}_{Comp} = \dot{m}(h_3 - h_2) = 1433,46 kJ/s$$

Le travail net récupéré et le rendement thermique sont donc :

$$\dot{W}_{net} = \dot{W}_t - \dot{W}_{Comp} = -6486,4 kJ/s \Rightarrow \eta_{th} = \frac{|\dot{W}_{net}|}{\dot{Q}_c} = 0,343 \ (34,3\%)$$

Le rendement théorique η_c de la machine de Carnot est :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{318,96}{485,57} = 0,343 (34,3\%)$$

La machine motrice opérant selon le cycle réversible de Carnot il est normal que le rendement thermique η_{th}, calculé à partir des données thermodynamiques de l'eau soit égal au rendement théorique η_c.

Exercice 2 :

Le cycle de Rankine étudié est le cycle 1-2'-3'-4-1

La première donnée à calculer est l'enthalpie massique $h_{3'}$ de l'eau liquide. D'après la relation de Gibbs relative à l'enthalpie, nous avons pour une transformation élémentaire réversible et pour l'unité de masse d'eau :

$dh = T.ds + v.dp = v.dp$ Car s= constante

L'intégration de la relation ci-dessus entre les pointes 2' et 3' conduit à :

$$h_{3'} = h_{2'} + \int_{P_2}^{P_1} v_{2'}.dP = h_{2'} + v_{2'}\left(P_1 - P_2\right) = 193{,}84 kJ/kg$$

Le calcul des échanges d'énergie au niveau des différents éléments de la machine donne :

$$\dot{Q}_c = \dot{m}\left(h_4 - h_{3'}\right) = 26056{,}6 kJ/s \;\; ; \;\; \dot{Q}_f = \dot{m}\left(h_{2'} - h_1\right) = -18156{,}83 kJ/s$$

$$\dot{W}_t = \dot{m}\left(h_1 - h_4\right) = -7919{,}87 kJ/s \;\; ; \;\; \dot{W}_{Pomp} = \dot{m}\left(h_{3'} - h_{2'}\right) = 20{,}1 kJ/s$$

Le travail net récupéré et le rendement thermique sont donc :

$$\dot{W}_{net} = \left|\dot{W}_t\right| - \dot{W}_{Pomp} = -7899{,}77 kJ/s \Rightarrow \eta_{th} = \frac{\left|\dot{W}_{net}\right|}{\dot{Q}_c} = 0{,}3032 \;\left(30{,}32\%\right)$$

Le rendement théorique η_c de la machine de Carnot est :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 1 - \frac{318{,}96}{485{,}57} = 0{,}343\left(34{,}3\%\right)$$

On notera que le rendement théorique de Carnot η_c est plus élevé que le rendement thermique du cycle de Rankine. Cela est dû au fait que la chaleur à fournir au bouilleur $\dot{Q}_c$ est plus importante que dans le cycle de Carnot.

Exercice 3 :

Les bilans énergétique et entropique, au cours d'un cycle, s'écrivent :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \text{ et } \Delta S = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + S^p = 0$$

Soit : $Q_c = -Q_f - W$ et $Q_c = -\frac{T_c}{T_f} Q_f - T_c S^p$

Par définition, l'efficacité η_r de la machine a pour expression :

$$\eta_r = \frac{Q_f}{W} = \frac{1}{-Q_c/Q_f - 1} = \frac{1}{T_c/T_f - 1 + T_c S^p / Q_f}$$

Le rendement r_r est le rapport de l'efficacité de la machine sur l'efficacité maximale obtenue lorsque $S^p = 0$:

$$r_r = \frac{\eta_r}{\eta_{r,\max}} = \frac{T_c/T_f - 1}{T_c/T_f - 1 + T_c S^p / Q_f} = \frac{T_c - T_f}{T_c - T_f + T_c T_f S^p / Q_f} < 1$$

Le cycle de Joule est constitué de 2 isentropiques et de 2 isobares. Le long de ces dernières courbes, le système reçoit : $Q_c = nc_p\left(T_3 - T_2\right)$ et $Q_f = nc_p\left(T_1 - T_4\right)$

Le rapport membre à membre de ces relations donne :

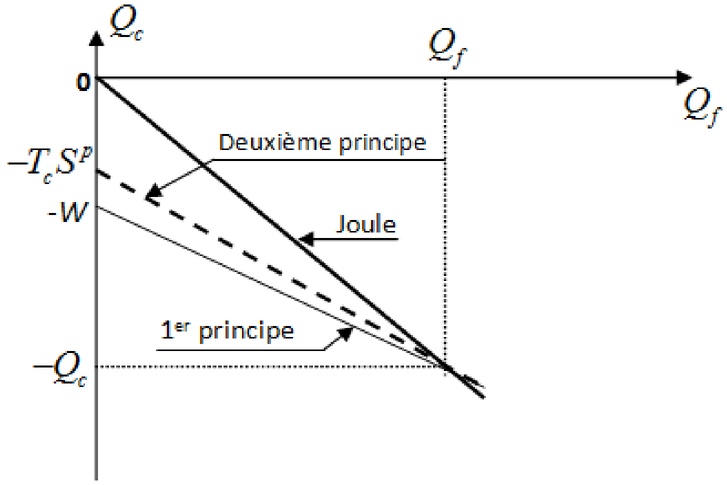
$$\frac{Q_c}{Q_f} = \frac{T_3 - T_2}{T_1 - T_4} \text{ soit } Q_c = -1,41 Q_f$$

La droite relative au bilan d'énergie passe par le point $\left(Q_f = 0, Q_c = -640J\right)$ et a une pente égale a -1. Celle relative au cycle de Joule passe par l'origine et est de pente (-1,41). On en déduit graphiquement le point de fonctionnement : $\left(Q_f = 1560J, Q_c = -2200J\right)$.

L'équation relative au bilan entropique permet de tracer une droite de pente $-T_c/T_f = -1,12$ passant par le point de fonctionnement. L'ordonné à l'origine de cette droite vaut: $-T_c S^p = -450J$ d'où $S^p = 1,52 J.K^{-1}$.

On en déduit :

$$\eta_r = \frac{Q_f}{W} = \frac{1569}{640} = 2,44 \text{ ; } \eta_{r,\max} = \frac{1}{T_c/T_f - 1} = \frac{1}{295/263 - 1} = 8,22 \text{ et } r_r = \frac{2,44}{8,22} = 0,3$$



Exercice 4 :

L'efficacité du moteur a pour expression :

$$\eta_m = \frac{-W}{Q_{1\to2}} = \frac{Q_{1\to2} + Q_{3\to1}}{Q_{1\to2}}$$

Avec : $Q_{1\to2} = \Delta U_{1\to2} = nc_v\left(T_2 - T_1\right)$ et $Q_{3\to1} = \Delta H_{3\to1} = nc_p\left(T_1 - T_3\right)$

Or $\beta_{1,2} = P_2/P_1 = T_2/T_1$, puisquie le volume est constant entre 1 et 2. Le long de l'isentropique 2→3, on a :

$$\frac{T_2^\gamma}{P_2^{\gamma-1}} = \frac{T_3^\gamma}{P_3^{\gamma-1}} = \frac{T_3^\gamma}{P_1^{\gamma-1}} \text{ soit } \frac{T_3}{T_2} = \frac{1}{\beta_{1,2}^{1-\frac{1}{\gamma}}}$$

L'efficacité s'écrit donc :

$$\eta_m = 1 + \frac{c_p}{c_v} \times \frac{T_1 - T_3}{T_2 - T_1} = 1 + \gamma\frac{1 - \left(T_3/T_2\right)\left(T_2/T_1\right)}{T_2/T_1 - 1} = 1 + \gamma\frac{1 - \left(\beta_{1,2}/\beta_{1,2}^{1-1/\gamma}\right)}{\beta_{1,2} - 1} = 1 - \gamma\frac{\beta_{1,2}^{1/\gamma} - 1}{\beta_{1,2} - 1}$$

A.N. : $\eta_m = 0,245$

Exercice 5 :

1) Les portions 1→2 et 3→4 étant des isentropiques réversibles, on a les relations suivantes :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \alpha_{1,2}^{\gamma-1} \quad \frac{T_3}{T_4} = \alpha_{1,3}^{\gamma-1}$$

En outre, le long de la portion 2→3, où la pression est constante, il vient, d'après l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{P_2V_3}{T_3} \text{ d'où } \frac{T_3}{T_2} = \alpha_{3,2}$$

Et $T_4/T_1 = \alpha_{3,2}\alpha_{1,2}^{\gamma-1}/\alpha_{1,3}^{\gamma-1} = \alpha_{3,2}^{\gamma}$.

2) L'efficacité η_m du moteur Diesel est : $\eta_m = -W/Q_c = 1 + Q_f/Q_c$ avec :

$$Q_c = \Delta H_{2\to3} = C_p\left(T_3 - T_2\right) \text{ et } Q_f = \Delta U_{4\to1} = C_v\left(T_1 - T_4\right)$$

On a donc :

$$\eta_m = 1 + \frac{C_v\left(T_1 - T_4\right)}{C_p\left(T_3 - T_2\right)} = 1 - \frac{T_4/T_3 - T_1/T_3}{\gamma\left(1 - T_2/T_3\right)} = 1 - \frac{\alpha_{1,3}^{-\gamma} - \alpha_{1,2}^{-\gamma}}{\gamma\left(\alpha_{1,3}^{-1} - \alpha_{1,2}^{-1}\right)}$$

Comme $V_1 = \pi D^2 h/4 = 506,4cm^3$ et $V_1 - V_2 = 1929/4 = 482,25cm^3$, on trouve $V_2 = 24,1cm^3$. Par conséquent : $\alpha_{1,2} = 21$ et $\alpha_{1,3} = 21/3 = 7$. On trouve : $\eta_m = 0,61$.

3) La puissance thermique *Pth* fournie au fluide, lors du parcours de la portion 2→3 est : $P_{th} = W/\eta_m$. Donc l'énergie thermique fournie au fluide, pendant une heure, est :

$Q_{th} = t.W/\eta_m = 3600.48\times10^3/0,61 = 283,28MJ$.

Par conséquent, la consommation horaire de gazole est :

$V = Q_{th}/\rho.q = 283,28/\left(0,8\times42,22\right) = 8,38L$.