Chapitre I – Régime continu et Théorèmes fondamentaux :		3 semaines

I.1 Définitions

I.1.1 Réseaux électrique

Un réseau ou circuit électrique est un ensemble de composants reliant entre eux des éléments électriques : résistance, condensateur, bobine de self-induction, diode, transistor, etc... Il comporte au moins une source de tension ou de courant, un ou plusieurs éléments passifs ou actifs. Dans un réseau électrique, on distingue :

• **le nœud** : c'est un point de raccordement entre au moins deux composants. Par exemple sur la figure 1.1, les points *A, B, C* et *D* sont des nœuds.

• **la branche** : c'est une portion du réseau compris entre deux nœuds, c'est le cas par exemple des branches : *AB, BD, CD* ou *AC*.

• **la maille** : c'est une partie du réseau (un contour fermé) qui se referme sur elle-même par exemple le contour *ABDC* représente une maille.

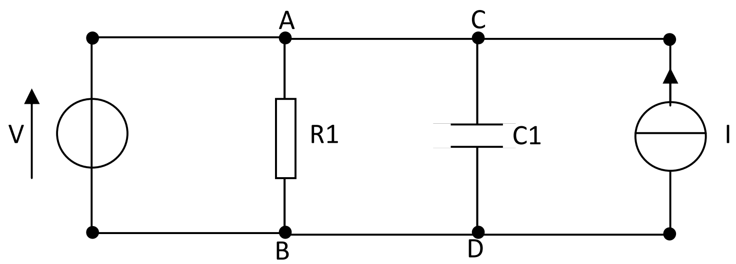


Figure I.1 : Réseau électrique

I.1.2 Dipôles électriques

Un dipôle est un conducteur qui possède une borne d'entrée A et une borne de sortie B du courant. Il est caractérisé par deux grandeurs : l'intensité qui le traverse I et la tension entre ses bornes $U_{AB}=U_A-U_B$. Un dipôle peut être fonctionné comme un récepteur (figure I.2.a) ou bien comme un générateur (figure I.2.b) selon l'orientation du courant I et de la différence de potentiel V entre A et B.

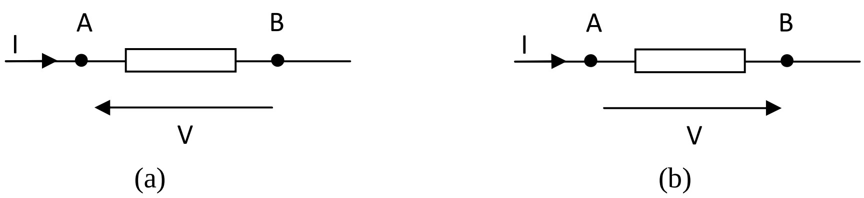


Figure I.2: (a) Convention récepteur, (b) Convention générateur,

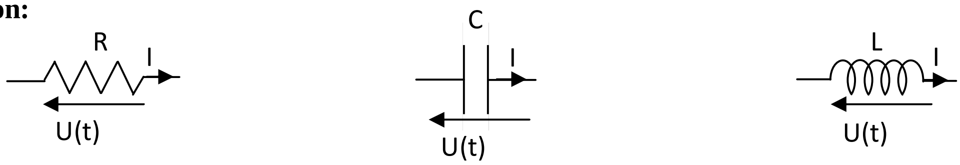
Dans un dipôle, la tension *V* est liée avec le courant *I* par la caractéristique réciproque: $I = f(V)$. Selon l'allure de cette caractéristique, différentes familles de dipôle peut être distinguées. On cite les dipôles linéaires comme les résistances et les générateurs de tension et de courant idéaux; les dipôles non linéaires comme les diodes, les transistors, etc... Car la relation entre le courant I et la différence de potentiel *V* n'est pas une droite.

I.2 Classification des dipôles

I.2.1 Dipôles passifs linéaires

On appelle un dipôle passif lorsque la tension V et le courant I sont dans le sens contraire car la puissance $p = V.I$ est absorbée par le dipôle ($p < 0$). Nous allons maintenant rappeler les lois générales des trois types de dipôles passifs élémentaires : résistance, bobine et condensateur:

Représentation:



Dipôle passif:

Résistance **Condensateur** **Inductance**

Loi fondamentale:

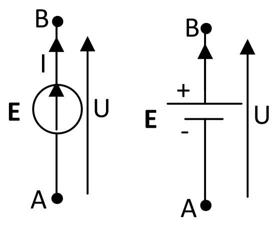
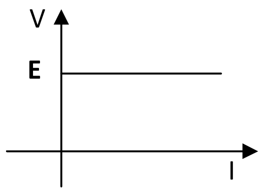
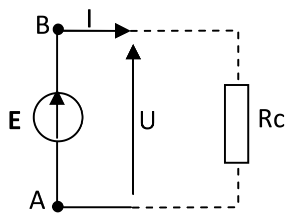
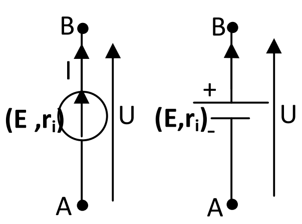
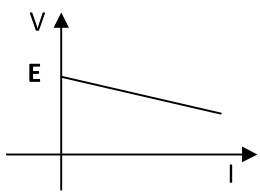
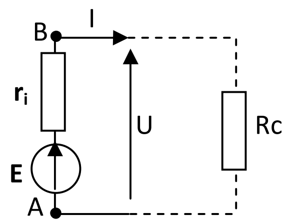
$$u(t) = R.i(t) \qquad i(t) = C\frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = L\frac{di(t)}{dt}$$

I.2.2 Dipôles actifs (idéal, réel)

On appelle un dipôle actif lorsque la tension V et le courant I sont dans le même sens car la puissance $p = V.I$ est délivrée par le dipôle (p> 0).

a- Sources de tension:

Dans le cas d'une source de tension idéale, la tension U entre ses bornes, égale à E (la force électromotrice), elle ne dépend pas au courant I qu'elle délivre puisque sa résistance interne r_i est nulle. Par contre, pour les sources de tension réelles, la tension de sortie diminue si le courant débité augmente.

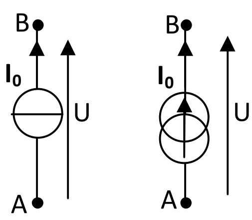
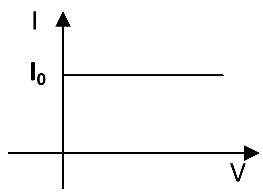
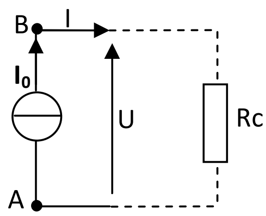
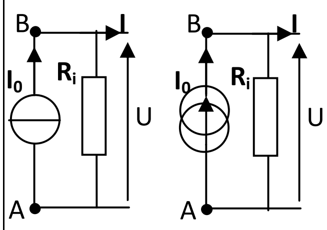
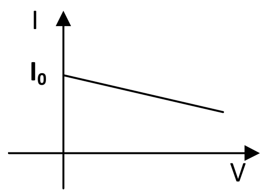
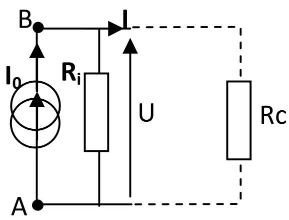
	Représentation	**Caractéristique**	**Schéma équivalent**
Source de tension idéale			
Source de tension réelle			

Une source de tension réelle est modélisée par une source de tension idéale en série avec sa résistance interne. La caractéristique statique *I(V)* de la source de tension réelle devient :

$U = E - r_i\, I$, où la résistance interne r_i induit une chute de tension.

b- Sources de courant:

Dans le cas d'une source de courant idéale, le courant I délivré par cette source est fixe et égale à I_0, il ne dépend pas à la tension appliquée entre les bornes de la source.

<table>
<tr><th></th><th>Représentation</th><th>Caractéristique</th><th>Schéma équivalent</th></tr>
<tr><td>Source de courant idéale</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Source de courant réelle</td><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Une source de courant réelle présente toujours une résistance interne R_i. Cette dernière est montée en parallèle avec une source de courant idéale. Le courant total I qui traverse le dipôle R_c est égal à la somme algébrique du courant qui traverse la résistance interne R_i et du courant I_0 fourni par le générateur. La caractéristique *I(V)* s'établit (comme le cas de la source de tension réelle) en ajoutant l'intensité I_0 à celle traversant la résistance R_i pour une différence de potentiel fixée, ce courant devient: $I = I_0 - U/R_i$

c- Sources liées

Lorsque la tension (ou le courant) délivrée par une source dépend de la tension aux bornes d'un des composants du circuit ou du courant le parcourant, la source est dite "liée", "dépendants" ou "contrôlée".
Nous pouvons donc distinguer quatre sources contrôlées :

Source de tension contrôlée par tension : $U' = KU$
Source de tension contrôlée par courant : $U' = \beta I$
Source de courant contrôlée par tension : $I' = K'U$
Source de courant contrôlée par courant : $I' = \beta' I$

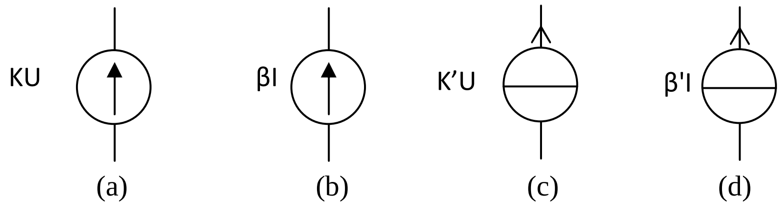


Figure I.3 Représentation des quatre sources liées (a) STCT, (b) STCC, (c) SCCT, (d) SCCC

Les coefficients $K1$, $K2$, $K3$ et $K4$ sont des coefficients de proportionnalité indépendants des tensions fournies ou des courants débités par les sources.

I.3. Association des dipôles

On dit que :

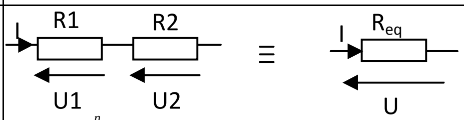
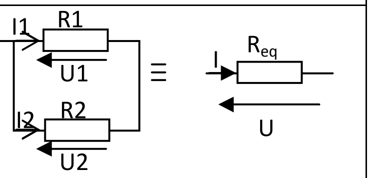
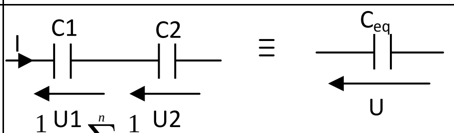
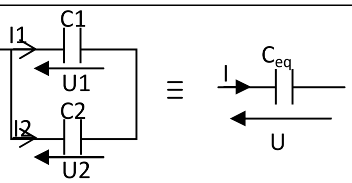
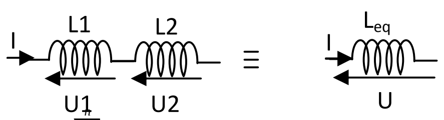
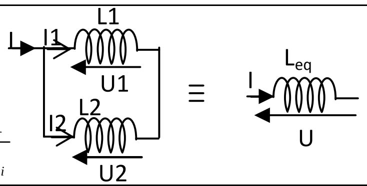
Deux dipôles sont en série si le même courant électrique qui les traverse.

Deux dipôles sont en parallèle si la tension appliquée à leurs bornes est la même.

On peut généraliser cette définition pour *n* dipôles.

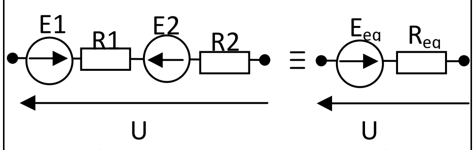
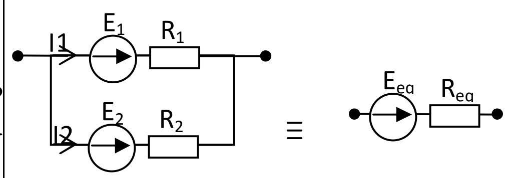
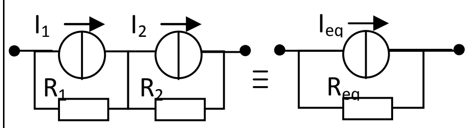
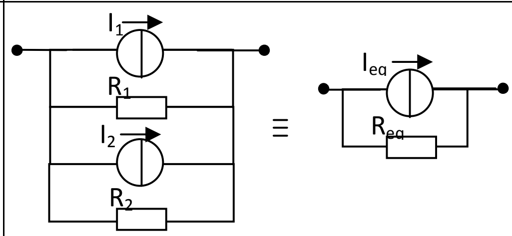
I.3.1 Association des dipôles passifs

On se propose de déterminer le dipôle équivalent à l'association de plusieurs dipôles élémentaires passifs de même type (résistances, condensateurs et inductance). On doit envisager les deux types d'association (série et parallèle):

Dipôle passif	Association série	Association parallèle
	$U=\sum_{i=1}^{n}U_i$ $\quad I=I_1=I_2=I_i$	$I=\sum_{i=1}^{n}I_i$ $\quad U=U_1=U_2=U_i$
R : résistance (Ω) **G** :conductance G=1/R (Ω^{-1}) ou (S/Siemens)	 $R_{eq}=\sum_{i=1}^{n}R_i$	 $\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$
C : capacité du condensateur (F / Farad)	 $\frac{1}{C_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$	 $C_{eq}=\sum_{i=1}^{n}C_i$
L : inductance de la bobine (H / Henry)	 $L_{eq}=\sum_{i=1}^{n}L_i$	 $\frac{1}{L_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{L_i}$

I.3.2 Association des dipôles actifs (source de tension et source de courant)

L'association de *n* générateurs réels de tension ou de courant (avec résistances internes) est équivalente respectivement à un générateur de tension ou de courant unique, dont la résistance interne équivalente R_{eq}, la force électromotrice équivalente E_{eq} produite par la source de tension équivalente et le courant équivalent produit par la source de courant équivalente sont calculés selon le type d'association (série ou parallèle) des dipôles actifs .

Dipôle actif	**Association série**	**Association parallèle**
Générateur de tension	 $R_{eq}=\sum_{i=1}^{n} R_i$ $E_{eq}=\sum_{i=1}^{n} E_i$	 $E_{eq}=E_1=E_2=E$ $\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$
Générateur de courant	 $R_{eq}=\sum_{i=1}^{n} R_i$ $I_{eq}=I_1=I_2=I$	 $I_{eq}=\sum_{i=1}^{n} I_i$ $\frac{1}{R_{eq}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$

I.4. Lois de Kirchhoff

I.4.1 Lois des nœuds

En tout nœud d'un circuit, et à tout instant, la somme algébrique des courants qui entrant au nœud est égale à la somme des courants sortant du nœud (conservation de la charge électrique). Ceci se traduit mathématiquement par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{n} I_E=\sum_{j=1}^{m} I_S$$

Par exemple, on a donc ici au nœud N : $I_1+I_2+I_4+I_6=I_3+I_5$

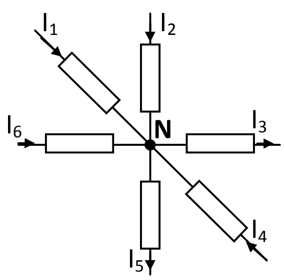


Figure I.4 Application de la loi de Kirchhoff

La loi des nœuds peut encore s'écrire sous la forme suivante : $\sum_{k=1}^{n} I_k=0$

En tout nœud d'un réseau électrique la somme algébrique des courants est nulle : $I_1+I_2+I_4+I_6+(-I_3)+(-I_5)=0$

I.4.2 Lois des mailles

La somme algébrique des tensions le long de la maille quelconque *M* (circuit fermé) est nulle, Ceci se traduit mathématiquement par la relation suivante : $\sum_{k=1}^{n} U_k = 0$

Toutes les tensions U_i qui sont produites soit par les sources soit par le passage du courant dans les dipôles passifs se dirigent positivement ou bien négativement selon le sens de parcours choisis sur la aille.

Par exemple, selon le sens arbitraire de parcours sur :

- la maille *ABCD*, on a donc : $E1-U_{AB}-U_{BC}-U_{CD}=0$
- la maille *BEFC*, on a donc : $UBC+UEB+UCF-E2=0$
- la maille AEFD, on a donc : E1-UAB+UEB -E2+UCF -UCD=0

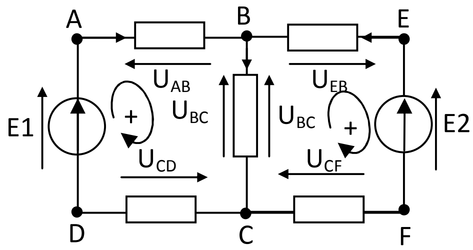


Figure I.5 Application de la loi des mailles

I.5 Théorèmes fondamentaux

I.5.1 Pont diviseur de tension

Le pont diviseur de tension est un théorème employé pour déterminer une tension aux bornes des dipôles montées en série comme nous montre la figure I.6

a. Cas des résistances :

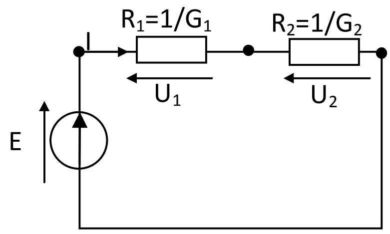


Figure I.6 Application du pont diviseur de tension

Les deux résistances sont montées en série puisque le même courant *I* qui les traverse. Si on applique la loi des mailles, on aura : $E=U_1+U_2=R_1.I+R_2.I$ d'où : $I = \frac{E}{R_1 + R_2}$

Alors, la tension aux bornes d'une résistance est égale au produit de sa valeur par l'intensité du courant qui la traverse :

$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$ et $U_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$

On peut effectivement avoir une généralisation pour le cas de *n* résistances montées en série, donc on aura : $U_i = \frac{R_i}{\sum_{j=1}^{n} R_j} E$

b. Cas des conductances :

Si on considère deux conductances *G1* et *G2* montées en série (figure I.6), l'intensité du courant qui les traversant *I* est la même : $I = G_1.U_1 = G_2.U_2 = G_{eq}.E$ d'où : $G_{eq} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2}$ alors le courant *I* devient : $I = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2} E$. Alors, la tension aux bornes d'une conductance est égale à l'intensité du courant qui la traverse divisée par sa valeur: $U_1 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} E$ et $U_2 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} E$

On peut effectivement avoir une généralisation pour le cas de *n* conductances montées en parallèle, donc on aura : $U_i = \frac{G_{eq}}{G_i} E$

I.5.2 Pont diviseur de courant

Le pont diviseur de courant est un théorème employé pour déterminer les courants qui traversent des résistances montées en parallèle comme nous montre la figure I.7

a. Cas des résistances :

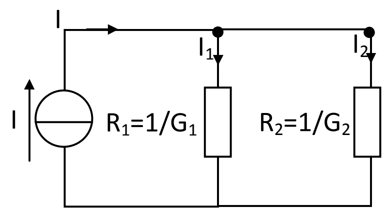


Figure I.7 Application du pont diviseur de courant

Les deux résistances sont montées en parallèle puisque la différence de potentiel *U* entre les bornes des deux résistances est le même. En utilisant le schéma équivalent, on aura le courant totale égale à : $I = \frac{U}{R_1 // R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} U$ d'où : $U = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I = R_1 I_1 = R_2 I_2$.

Alors, le courant qui traverse une résistance égale à sa différence de potentiel divisée par sa valeur: $I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I$ et $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I$

Pour le cas général de *n* conductance montées en parallèle, on aura : $I_i = \frac{R_{eq}}{R_i} I$

b. Cas des conductances :

Si on considère deux conductances *G1* et *G2* montées en parallèle (figure I.7), la différence de potentiel entre leurs bornes *U* est la même et le courant totale *I* égale à *:* $I = G_1.U+G_2.U= G_{eq}.U$ d'où : $G_{eq} = G_1 + G_2$ alors la tension *U* devienne : $U = \frac{I}{G_1 + G_2}$

Alors, le courant qui traverse une conductance est égale au produit de sa valeur par sa différence de potentiel: $I_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I$ et $I_2 = \frac{G_2}{G_1 + G_2} I$

Pour le cas général de *n* conductance montées en parallèle, on aura : $I_i = \frac{G_i}{\sum_{j=1}^{n} G_j} I$

I.5.3 Théorème de superposition

Le théorème de superposition s'applique aux réseaux qui comportent plus d'un générateur. Tenons par exemple le circuit de la figure I.8, dans lequel nous souhaitons calculer la tension *U* aux bornes de la résistance R_2 et le courant *I* qui la parcourt.

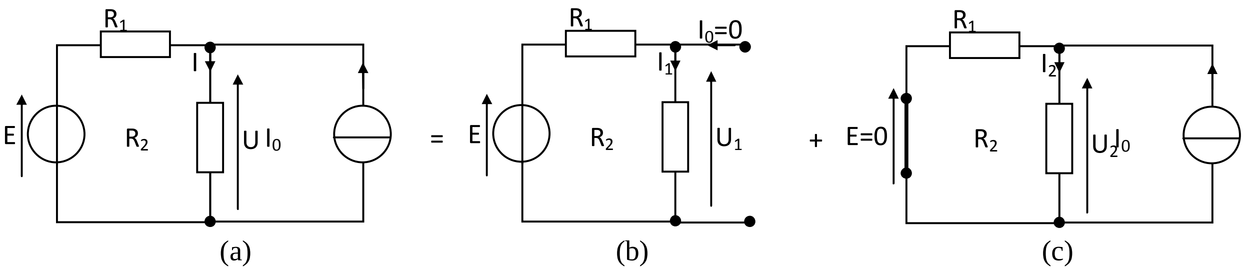


Figure I.8 Application du théorème de superposition

- Si on passive la source de courant (montage (b) : $\boldsymbol{I_0=0}$) : la tension U_1 appliquée aux bornes de la résistance R_2 égale : $U_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$ et le courant I_1 qui la parcourt égale : $I_1 = \frac{E}{R_1 + R_2}$
- Si on passive la source de tension (montage (c) $\boldsymbol{E=0}$) : le courant I_2 qui parcourt la résistance R_2 égale : $I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$ et la tension U_2 appliquée à ses bornes égale : $U_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_0$

En tentant en compte la contribution des deux sources dans le montage (a), la tension *U* appliquée aux bornes de R_2 est la somme des deux tensions U_1 et U_2 : $U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I_0$ et le courant qui la traverse est la somme des deux courant I_1 et I_2 : $I = \frac{E}{R_1 + R_2} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_0$

Remarque :

Le théorème de superposition ne s'applique pas pour le calcul de la puissance dissipée par la résistance. Autrement dit, $U_1.I_1 + U_2.I_2 \neq U.I$

Puisque les sources liées ou dépendantes (sources contrôlées) ne sont pas des éléments linéaires, le théorème de superposition ne s'applique pas aux circuits contenant ce type de sources.

I.5.4 Théorèmes de Thévenin et de Norton

Les théorèmes de Thévenin et de Norton sont utilisés pour modéliser le comportement d'un réseau électrique pour différentes charges. Ces deux théorèmes montrent qu'un réseau quelconque vu entre deux points (où se place la charge) peut toujours être représenté par une source réelle de tension (modèle de Thévenin) ou par une source réelle de courant (modèle de Norton).

a. Thévenin

Un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B peut être remplacé par un dipôle équivalent de Thévenin de force électromotrice E_{th} et de résistance interne R_{th}.

- E_{th} est égale à la tension U_{AB} à vide du dipôle c'est-à-dire lorsque le dipôle n'est pas connecté à la charge.
- R_{th} est la résistance équivalente vue par la charge (entre les deux points A et B) lorsque toutes les sources indépendantes sont passivées (court-circuit dans le cas d'une source de tension et circuit-ouvert dans le cas d'une source de courant).

On considère le circuit de la figure suivante :

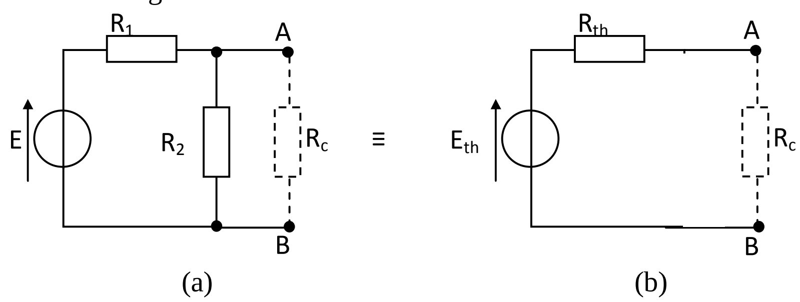
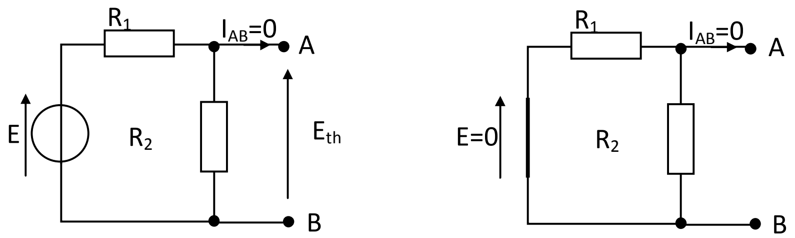


Figure I.9 Application du théorème de Thévenin

La tension de Thévenin E_{th} est la tension obtenue à vide entre A et B (lorsque la charge R_c est débranchée). Cette tension est égale à la tension appliquée aux bornes de R_2 et se calcule en appliquant le théorème du pont diviseur de tension Figure I.10(a), on obtient alors : $E_{th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$

La résistance R_{th} est obtenue en passivant la source de tension E en remplaçant la source E par un court-circuit Figure I.10(b), on obtient alors : $R_{th} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



(a) (b)

Figure I.10 Source de Thévenin équivalente (a) calcul de E_{th} à vide (b) calcul de R_{th}

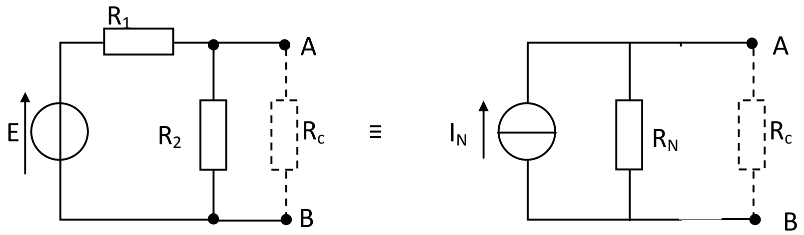
Le générateur de Thévenin équivalent est donné à la figure I.9 (b).

b. Norton

Un circuit électrique linéaire placé entre deux points A et B peut être également remplacé par un générateur de Norton équivalent de courant I_N en parallèle avec une résistance interne R_N .

- I_N est égale au courant traversant la branche AB lorsque la charge est court-circuitée
- R_N est la résistance équivalente vue par la charge (entre les deux points A et B) lorsque toutes les sources indépendantes sont passivées.

On considère le circuit de la figure suivante :

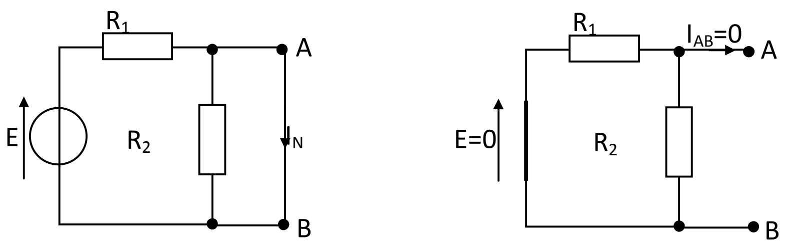


(a) (b)

Figure I.11 Application du théorème de Norton

Le courant de Norton I_N est le courant mesuré entre A et B (lorsque la charge R_c est court-circuitée) Figure I.12(a), on obtient alors : $I_N = \dfrac{E}{R_1}$

La résistance R_N est obtenue en passivant la source de tension E en remplaçant la source E par un court-circuit Figure I.12(b), on obtient alors : $R_N = R_1 \, // \, R_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$



(a) (b)

Figure I.12 Source de Norton équivalente (a) calcul de I_N à vide (b) calcul de R_N

Le générateur de Norton équivalent est donné à la figure I.11 (b).

c. Equivalence entre Thévenin et Norton

Les schémas de Thévenin et de Norton sont des schémas équivalents. Alors, le modèle d'un générateur de Thévenin peut être transformé un générateur de Norton en respectant les transformations suivantes : $R_{th}=R_N$ et $E_{th}=R_N.I_N= R_{th}.\ I_N$

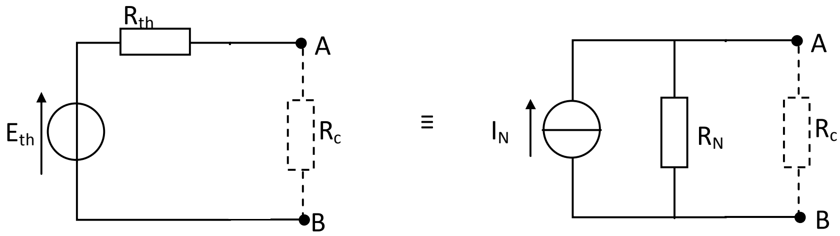


Figure I.13 Transformation Thévenin-Norton

Remarque :

Dans le cas des source contrôlées, la résistance de Thévenin et la résistance de Norton peut être déterminée par: $R_{th} = R_N = \frac{E_{th}}{I_N}$ *. Autrement dit, le calcul de* R_{th} *et* R_N *exige le calcul de* E_{th} *et* I_N*.*

I.5.5 Millmann

Le théorème de Millmann est appliqué pour déterminer la différence de potentiel entre un nœud *A* (où se connectent *n* branches) et le nœud de référence des potentiels *B*.

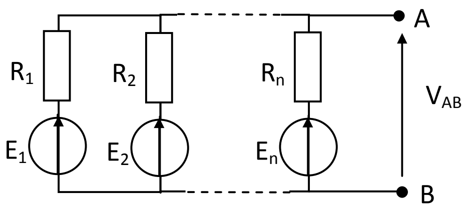


Figure I.14 Application du théorème de Millmann

Si on applique le théorème de Norton, le courant de court-circuit est égal à la somme des courants fourni par chaque source de chaque branche, on obtient alors :

$$I_{CC} = I_N = \sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{I_i} = \frac{E_1}{I_1} + \frac{E_2}{I_2} + ... + \frac{E_n}{I_n}$$

Si on passive les sources de tension, toutes les résistances se trouvent en parallèle, alors la résistance équivalente est égale à :

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}$$

Donc la différence de potentiel mesurée entre le nœud *A* et le nœud de référence *B* est égale au produit de la résistance équivalente R_{eq} par la valeur du courant I_N, on obtient alors :

$$V_{AB} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{E_i}{I_i}}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}} = \frac{\frac{E_1}{I_1} + \frac{E_2}{I_2} + ... + \frac{E_n}{I_n}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n}}$$

I.5.6 Kennelly :

Le théorème de Kennelly permet de transformer un circuit d'un réseau formé en « π » en un circuit formé en « T » et vice-versa. Ce dernier est généralement plus facile à étudier. Ces deux transformations sont appelées aussi transformation *triangle-étoile* et *étoile-triangle* respectivement.

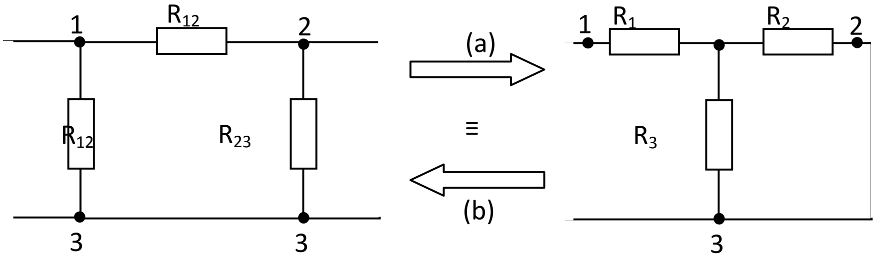


Figure I.15 Transformation de Kennelly (a) triangle-étoile et (b) étoile-triangle.

Cette transformation aussi utile dans l'étude des quadripôles comme les filtres en T et en π :

a. **Transformation triangle-étoile :**

La résistance équivalente dans un circuit de forme étoile liée un nœud *n* égale au produit des deux résistances adjacentes à ce nœud dans le circuit de la forme triangle sur la somme des trois résistances.

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}} \qquad R_3 = \frac{R_{13} + R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

b. **Transformation étoile-triangle :**

La résistance équivalente d'une branche dans un circuit de forme triangle égale à la somme des produits des trois résistances deux à deux dans le circuit de la forme étoile sur la résistance liées au nœud opposé.

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3} \qquad R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2} \qquad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}$$

I.6. Théorème de transfert maximal de puissance

Le théorème de transfert maximal de puissance a pour objectif de permettre que le maximum de puissance fournie par le générateur soit transmis à la charge. La figure I.16 montre un exemple de transfert de puissance :

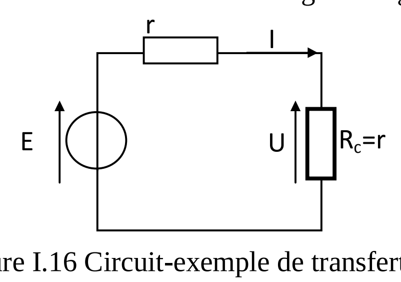


Figure I.16 Circuit-exemple de transfert de puissance

On a : $U = R_c.I$ et $I = \dfrac{E}{R_c + r}$ donc :

La puissance utile fournie par le générateur transmise à la charge égale :

$P = U.I = R_c.I^2 = \dfrac{R_c}{(R_c + r)^2} E^2$ La puissance P doit être maximale lorsque $\dfrac{dP}{dR_c} = 0$

Calculons R_c :

$$\frac{dP}{dR_c} = 0 \Rightarrow \frac{E^2(R_c + r)^2 - 2(R_c + r)E^2R_c}{(R_c + r)^4} = \frac{R_c^2E^2 + 2R_crE^2 + r^2E^2 - 2R_c^2E^2 - 2R_crE^2}{(R_c + r)^4} = \frac{(r^2 - R_c^2)E^2}{(R_c + r)^4} = 0$$

Il faut donc choisir : $R_c = r$

On dit que l'on a réalisé l'adaptation de l'impédance entre le générateur et la charge.

Alors, la puissance maximale transmise du générateur à la charge est :

$$P_{max} = \frac{r}{(2r)^2} E^2 = \frac{E^2}{4r} = \frac{E^2}{4R_c}$$