

**II.1 Définition**

Un quadripôle est une structure électronique qui comporte un ensemble de composants sous la forme de boîtes noires, dont on ne connaît que les paramètres d'entrée ( $V_e$  et  $I_e$ ) et de sortie ( $V_s$  et  $I_s$ ). On peut ainsi définir le quadripôle (Figure II.1) comme étant un composant à deux entrées et deux sorties, permettant le transfert d'énergie entre deux dipôles.

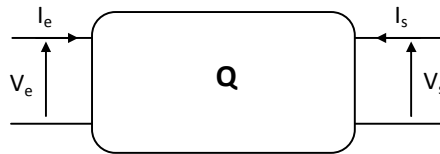


Figure II.1 : Schéma général d'un quadripôle

**II.2 Différents types de quadripôle**

Un quadripôle est dit linéaire si les valeurs des éléments qui le composent sont constantes, par conséquent la variation des grandeurs de sortie est proportionnelle à celle de l'entrée. Un quadripôle linéaire ne contient pas de sources contrôlées ou liées.

On distingue principalement deux types de quadripôle linéaire :

- Quadripôle actif : comporte des sources (de tension ou de courant) liées, il fournit de l'énergie de façon continue.
- Quadripôle passif : ne comporte pas de source d'énergie, il ne contient que les composants passifs.

**II.3 Représentation matricielle d'un quadripôle**

**II.3.1 Matrice impédances [Z]**

La matrice impédance permet de relier les tensions aux courants :

$$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \equiv [V] = [Z][I]$$

Le schéma équivalent du quadripôle avec les paramètres d'impédance est présenté sur la figure II.2.

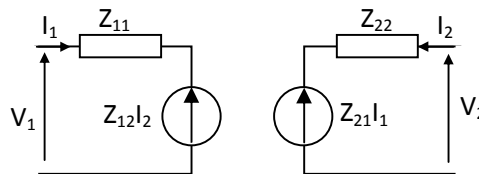


Figure III.2 : Circuit dérivés de la matrice Z

Chaque élément  $Z_{ij}$  de la matrice d'impédances possède une signification :

$$Z_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{I_2=0} : \text{Impédance d'entrée lorsque la sortie est en circuit ouvert}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{I_1=0} : \text{Impédance de transfert (inverse) lorsque l'entrée est en circuit ouvert}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{V_2}{I_1} \right|_{I_2=0} : \text{Impédance de transfert lorsque la sortie est en circuit ouvert}$$

$$Z_{22} = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{I_1=0} : \text{Impédance de sortie lorsque l'entrée est en circuit ouvert}$$

### II.3.2 Matrice admittances [Y]

La matrice admittance permet de relier les courants aux tensions :

$$\begin{cases} I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 \\ I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \equiv [I] = [Y][V]$$

Le schéma équivalent du quadripôle avec les paramètres d'admittance est présenté sur la figure II.3.

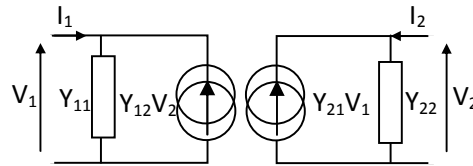


Figure III.3 : Circuit dérivés de la matrice Y

Chaque élément  $Y_{ij}$  de la matrice admittance possède une signification :

$$Y_{11} = \left. \frac{I_1}{V_1} \right|_{V_2=0} : \text{Admittance d'entrée lorsque la sortie est en court circuit}$$

$$Y_{12} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{V_1=0} : \text{Admittance de transfert (inverse) lorsque l'entrée est en court circuit}$$

$$Y_{21} = \left. \frac{I_2}{V_1} \right|_{V_2=0} : \text{Admittance de transfert lorsque la sortie est en circuit ouvert}$$

$$Y_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{V_1=0} : \text{Admittance de sortie lorsque l'entrée est en court circuit}$$

### II.3.3 Matrice hybride [h]

Les paramètres hybrides directes (paramètres h) relient la tension d'entrée et le courant de sortie au courant d'entrée et à la tension de sortie, et les paramètres hybrides inverses (paramètres g) relient le courant d'entrée et la tension de sortie à la tension d'entrée et au courant de sortie.

$$\begin{cases} V_1 = h_{11}I_1 + h_{12}V_2 \\ I_2 = h_{21}I_1 + h_{22}V_2 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}}_H \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} I_1 = g_{11}V_1 + g_{12}I_2 \\ V_2 = g_{21}V_1 + g_{22}I_2 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} I_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix}}_G \begin{bmatrix} V_1 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

Le schéma équivalent du quadripôle avec les paramètres hybrides est présenté sur la figure II.4.

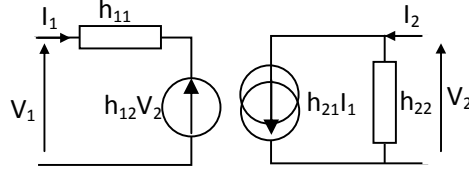


Figure III.4 : Circuit dérivés de la matrice H

Chaque élément  $H_{ij}$  et  $G_{ij}$  de la matrice hybride possède une signification :

$$h_{11} = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{V_2=0} : \text{Impédance d'entrée lorsque la sortie est en court circuit}$$

$$h_{12} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_1=0} : \text{Gain en tension lorsque l'entrée est en circuit ouvert}$$

$$h_{21} = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{V_2=0} : \text{Gain en courant lorsque la sortie est en court circuit}$$

$$h_{22} = \left. \frac{I_2}{V_2} \right|_{I_1=0} : \text{Admittance de sortie lorsque l'entrée est en circuit ouvert}$$

### II.3.4 Matrice de transfert [T]

La matrice de transfert permet d'exprimer la tension et le courant d'entrée en fonction de la tension et le courant de sortie (transfert directe : paramètres  $T$ ) et vice-versa (transfert inverse : paramètres  $T'$ ).

Cette représentation est utilisée pour relier deux quadripôles en cascade (figure II.), la sortie du premier correspond alors à l'entrée du second.

$$\begin{cases} V_1 = T_{11}V_2 - T_{12}I_2 \\ I_1 = T_{21}V_2 - T_{22}I_2 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}}_T \begin{bmatrix} V_2 \\ -I_2 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} V_2 = T'_{11}V_1 - T'_{12}I_1 \\ I_2 = T'_{21}V_1 - T'_{22}I_1 \end{cases} \equiv \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} \\ T'_{21} & T'_{22} \end{bmatrix}}_{T'} \begin{bmatrix} V_1 \\ -I_1 \end{bmatrix}$$

Chaque élément  $T_{ij}$  et  $T'_{ij}$  de la matrice de transfert possède une signification :

$$T_{11} = \left. \frac{V_1}{V_2} \right|_{I_2=0} : \text{Gain en tension lorsque la sortie est en circuit ouvert}$$

$$T_{12} = - \left. \frac{V_1}{I_2} \right|_{V_2=0} : \text{Impédance de transfert lorsque la sortie est en court circuit}$$

$$T_{21} = \left. \frac{I_1}{V_2} \right|_{I_2=0} : \text{Admittance de transfert lorsque la sortie est en circuit ouvert}$$

$$T_{22} = - \left. \frac{I_1}{I_2} \right|_{V_2=0} : \text{Gain en courant lorsque la sortie est en court circuit.}$$

II.4 Relations entre les différentes représentations

Il existe un lien entre les différentes représentations qui décrit le même quadripôle. Le tableau ci-dessous donne ces différents liens.

	Z	Y	T	h
Z	$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{\Delta Y} \begin{bmatrix} Y_{22} & -Y_{12} \\ -Y_{21} & Y_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{T_{21}} \begin{bmatrix} T_{11} & \Delta T \\ I & T_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta h}{h_{22}} & \frac{h_{12}}{h_{22}} \\ -\frac{h_{21}}{h_{22}} & \frac{I}{h_{21}} \end{bmatrix}$
Y	$\frac{1}{\Delta Z} \begin{bmatrix} Z_{22} & -Z_{12} \\ -Z_{21} & Z_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{T_{12}} \begin{bmatrix} T_{22} & -\Delta T \\ -I & T_{11} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{h_{11}} \begin{bmatrix} I & -h_{12} \\ h_{21} & \Delta h \end{bmatrix}$
T	$\frac{1}{Z_{21}} \begin{bmatrix} Z_{11} & \Delta Z \\ I & Z_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{21}} \begin{bmatrix} -Y_{22} & -I \\ \Delta Y & -Y_{11} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}$	$\frac{-I}{h_{21}} \begin{bmatrix} \Delta h & -h_{11} \\ h_{22} & I \end{bmatrix}$
h	$\begin{bmatrix} \frac{\Delta Z}{Z_{22}} & \frac{Z_{12}}{Z_{22}} \\ \frac{Z_{21}}{Z_{11}} & \frac{I}{Z_{22}} \end{bmatrix}$	$\frac{1}{Y_{11}} \begin{bmatrix} I & -Y_{12} \\ -Y_{21} & \Delta Y \end{bmatrix}$	$\frac{1}{T_{22}} \begin{bmatrix} T_{12} & \Delta T \\ -I & T_{21} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix}$

II.5 Associations des quadripôles

II.5.1 Association série

La figure II.5 donne le principe d'association de deux quadripôles en série. Les deux quadripôles sont parcourus par le même courant en entrée :  $I_1 = I_1' = I_1''$  et le même courant en sortie :  $I_2 = I_2' = I_2''$ . Les tensions d'entrée et de sortie du quadripôle équivalent correspondent aux sommes des tensions :  $V_1 = V_1' + V_1''$  et  $V_2 = V_2' + V_2''$ .

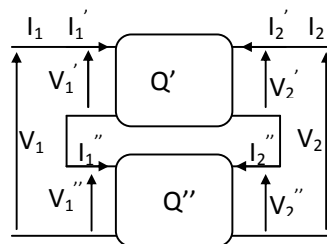


Figure II.5 : Association série

Les matrices impédance sont les mieux adaptées pour déterminer les caractéristiques du quadripôle équivalent. Donc, la matrice impédance du quadripôle équivalent est donnée par la somme des matrices impédances :  $[Z] = [Z'] + [Z'']$

**II.5.2 Association parallèle**

La figure II.6 illustre le principe d'association de deux quadripôles en parallèle. La somme des intensités d'entrée et de sortie des deux quadripôles correspond respectivement à l'intensité du courant du quadripôle équivalent d'entrée  $I_1 = I_1' + I_1''$  et de sortie  $I_2 = I_2' + I_2''$ .

Les deux quadripôles sont soumis aux mêmes tensions en entrée :  $V_1 = V_1' = V_1''$  et en sortie :  $V_2 = V_2' = V_2''$

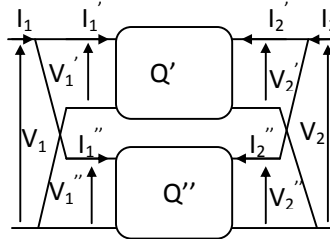


Figure II.6 : Association parallèle

Les matrices admittance sont les mieux adaptées pour déterminer les caractéristiques du quadripôle équivalent. Donc, la matrice admittance du quadripôle équivalent est donnée par la somme des matrices admittances:  $[Y] = [Y'] + [Y'']$

**II.5.3 Association cascade**

La figure II.7 illustre le principe d'association de deux quadripôles en cascade. La tension de sortie du premier quadripôle  $V_2'$  est égale à la tension d'entrée du second  $V_1''$ . L'intensité du courant de sortie du premier quadripôle  $I_2'$  et à l'opposé du courant d'entrée du second  $I_1''$ .

La tension et l'intensité de courant d'entrée du quadripôle équivalent correspond à la tension et l'intensité de courant d'entrée du premier :  $V_1 = V_1'$  et  $I_1 = I_1'$ . De même, la tension et l'intensité de courant de sortie du quadripôle équivalent correspond à la tension et l'intensité de courant de sortie du second :  $V_2 = V_2''$  et  $I_2 = I_2''$ .

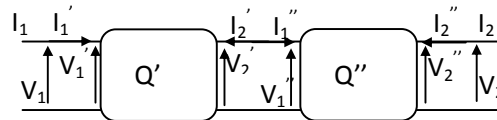


Figure II.7 : Association cascade

Les matrices de transfert sont les mieux adaptées pour déterminer les caractéristiques du quadripôle équivalent. Donc, la matrice de transfert du quadripôle équivalent est donnée par le produit des matrices de transfert:  $[T] = [T''] \times [T']$ .

**II.6 Grandeurs caractéristiques des quadripôles**

On Considère le cas général où un quadripôle est connecté en sortie à une charge d'impédance  $Z_c$  et attaqué en entrée avec une source réelle  $E_g$  de résistance interne  $R_g$ . Celui-ci est représenté sur la figure II.8.

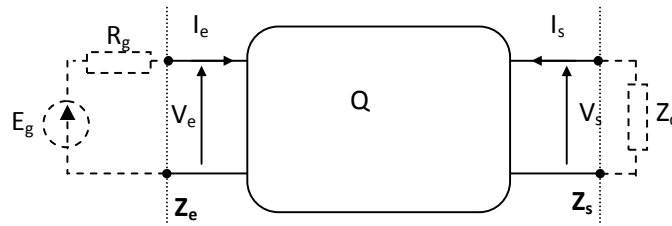


Fig. II.8 : Grandeurs caractéristiques

En utilisant la matrice impédance du quadripôle  $Q$ , on peut déduire les équations suivantes :

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \quad (1)$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \quad (2)$$

$$E_g = V_1 + R_g I_1 \quad (3)$$

$$V_2 = -Z_c I_2 \quad (4)$$

D'après les équations (1)-(4), il est possible de définir pour un quadripôle ses grandeurs caractéristiques comme les impédances d'entrée et de sortie, et les gains en tension et en courant.

### I.6.1 Impédance d'entrée

C'est l'impédance vue à l'entrée quand la sortie est chargée par une impédance  $Z_L$ .

L'impédance d'entrée est donnée par :  $Z_e = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{Z_L}$

On va exprimer  $V_2$  en fonction de  $I_2$  à partir des équations (1), (2) et (4).

$$\text{En combinant les équations (2) et (4), on obtient : } Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_c I_2 \Rightarrow I_2 = -\frac{Z_{21}}{Z_c + Z_{22}} I_1 \quad (5)$$

$$(5) \text{ dans (1) on obtient: } V_1 = Z_{11}I_1 - Z_{12} \frac{Z_{21}}{Z_c + Z_{22}} I_1 = \frac{Z_{11}(Z_c + Z_{22}) - Z_{12}Z_{21}}{Z_c + Z_{22}} I_1$$

$$\text{On obtient finalement: } Z_e = \left. \frac{V_1}{I_1} \right|_{Z_L} = \frac{Z_{11}Z_c + \Delta Z}{Z_c + Z_{22}} \quad \text{où } \Delta Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$$

### II.6.2 Impédance de sortie

C'est l'impédance vue à la sortie quand l'entrée est fermée par une impédance en annulant le générateur à l'entrée du quadripôle. Il s'agit également de l'impédance équivalente du modèle de Thévenin appliquée à la sortie du quadripôle.

L'impédance de sortie est donnée par :  $Z_s = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{E_g=0}$

On va exprimer  $V_2$  en fonction de  $I_2$  à partir des équations (1), (2) et (3).

## Chapitre II – Quadripôles passifs

---

Lorsque  $E_g = 0$ , (3)  $\Rightarrow V_1 = -R_g I_1$  (6)

En combinant les équations (6) et (1), on obtient :  $-R_g I_1 = Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 \Rightarrow I_1 = -\frac{Z_{12}}{R_g + Z_{11}} I_2$  (7)

(7) dans (2) on obtient:  $V_2 = -Z_{21} \frac{Z_{12}}{R_g + Z_{11}} I_2 + Z_{22} I_2 = \frac{Z_{22}(R_g + Z_{11}) - Z_{12} Z_{21}}{R_g + Z_{11}} I_2$

On obtient finalement:  $Z_s = \left. \frac{V_2}{I_2} \right|_{R_g} = \frac{Z_{22} R_g + \Delta Z}{R_g + Z_{11}}$  où  $\Delta Z = Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}$

### II.6.3 Gain en courant

C'est le rapport entre l'intensité de courant de sortie  $I_2$  et l'intensité de courant d'entrée  $I_1$  quand la sortie est chargée par une impédance  $Z_L$ .

Le gain en courant est donnée par  $G_i = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{Z_L}$

On va exprimer  $I_2$  en fonction de  $I_1$  à partir des équations (2) et (4).

En combinant les équations (2) et (4), on obtient (5)

On obtient finalement:  $G_i = \left. \frac{I_2}{I_1} \right|_{Z_L} = -\frac{Z_{21}}{Z_c + Z_{22}}$

### II.6.4 Gain en tension

C'est le rapport entre la tension de sortie  $V_2$  et la tension d'entrée  $V_1$  quand la sortie est chargée par une impédance  $Z_L$ .

Le gain en tension est donnée par :  $G_v = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{Z_L}$

On va exprimer  $V_2$  en fonction de  $V_1$  à partir des équations (1), (4) et (5).

(4)  $\Rightarrow I_2 = -\frac{V_2}{Z_c}$  (8)

(5)  $\Rightarrow I_1 = -\frac{Z_c + Z_{22}}{Z_{21}} I_2$  (9)

(8) dans (9) on obtient:  $I_1 = \frac{Z_c + Z_{22}}{Z_{21}} \frac{V_2}{Z_c}$  (10)

(8) et (10) dans (1) on obtient:  $V_1 = Z_{11} \frac{Z_c + Z_{22}}{Z_{21}} \frac{V_2}{Z_c} - Z_{12} \frac{V_2}{Z_c} = \frac{Z_{11}(Z_c + Z_{22}) - Z_{12} Z_{21}}{Z_c Z_{21}} V_2$

On obtient finalement:  $G_v = \left. \frac{V_2}{V_1} \right|_{Z_L} = \frac{Z_c Z_{21}}{Z_{11} Z_c + \Delta Z}$