Université Med BOUDIAF M'sila
Faculté de Technologies
Département de Génie mécanique

Examen du module : Asservissement et régulation
Session normale (2016/2017) Durée : 1h-30mn

1ère Master Énergétique

Exercice 1 : (4points)

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $(2t^2-1)\mathcal{U}(t)$ **2.** $\left(e^t-\cos\left(\frac{2}{3}t\right)e^{2t}\right)\mathcal{U}(t)$

3. $te^{4t}\mathcal{U}(t)$ **4.** $\cos^3(t)e^t\mathcal{U}(t)$.

Exercice 2 : (4points)

Retrouver l'original des transformée de Laplace suivantes :

1. $\frac{1}{(p+1)(p-2)}$ **2.** $\frac{-1}{(p-2)^2}$

3. $\frac{5p+10}{p^2+3p-4}$ **4.** $\frac{p-7}{p^2-14p+50}$

Exercice 3 : (12 points)

On se propose d'utiliser la transformée de Laplace pour résoudre des équations différentielles.

1. On considère l'équation différentielle

$$y'+y=e^t\mathcal{U}(t),\ y(0)=1.$$

Soit y une fonction causale solution de l'équation dont on suppose qu'elle admet une transformée de Laplace F. Démontrer que F satisfait l'équation

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p+1)}$$

En déduire y

2. Sur le même modèle, résoudre l'équation différentielle

$$y''-3y'+2y=e^{3t}\mathcal{U}(t),\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$$

Corrigé : l'examen Asservissement et régulation

Exo 1 : [04 pts]

1- D'après la linéarité de la transformée de Laplace et le formulaire, on a

$$\mathcal{L}(f)(p) = 2\mathcal{L}(t^2\mathcal{U}(t))(p) - \mathcal{L}(\mathcal{U}(t))(p) = 2 \times \frac{2!}{p^3} - \frac{1}{p} = \frac{4}{p^3} - \frac{1}{p}$$ 1

2- On utilise encore la linéarité. On a d'une part

$$\mathcal{L}(e^t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p-1}$$

D'autre part, pour la rechercher de $\mathcal{L}\left(e^{2t}\cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right)$, on utilise d'une part le formulaire pour remarquer que

$$\mathcal{L}\left(\cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right) = \frac{p}{p^2+\frac{4}{9}}.$$ 0.25

On utilise ensuite la formule

$$\mathcal{L}(e^a t f)(p) = F(p-a)$$

Où $F = \mathcal{L}(f)$, On en déduit que

$$\mathcal{L}\left(e^{2t}\cos\left(\frac{2}{3}t\right)\right) = \frac{p-2}{(p-2)^2+\frac{4}{9}}.$$ 0.25

Finalement, la transformée de Laplace recherché est la fonction

$$\frac{1}{p-1} - \frac{p-2}{(p-2)^2+\frac{4}{9}}$$ 0.5

3- On procède comme à la question précédente, en commençant par remarquer que

$$\mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}$$ 0.5

De la formule de multiplication par e^{at}, on déduit que

$$\mathcal{L}(te^{4t}\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{(p-4)^2}$$ 0.5

4- On commence par linéariser $\cos^3 x$. Pour cela, on remarque que

$$\cos^3(x) = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}\right) = \frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos(x)$$ 0.25

On en déduit que

$$\mathcal{L}(\cos^3(t)) = \frac{1}{4}\frac{p}{p^2+9}+\frac{3}{4}\frac{p}{p^2+1}$$ 0.25

Raisonnant comme à la question précédente, on déduit finalement que

$$\mathcal{L}(\cos^3(t)e^t) = \frac{1}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2+9}+\frac{3}{4}\frac{p-1}{(p-1)^2+1}.$$ 0.5

<u>Réponse 02 :</u> [04 pts]

1. On décompose la fraction en éléments simples, ie on cherche a et b tels que

$$\frac{1}{(p+1)(p-2)} = \frac{a}{p+1}+\frac{b}{p-2}.$$ 0,25

On trouve $a=-1/3$ et $b=1/3$. Il vient que l'original recherché est 0,25 0,25

0,25 0,25 $$\frac{-1}{3}e^{-t}\mathcal{U}(t)+\frac{1}{3}e^{2t}\mathcal{U}(t).$$ 0,25

2. Posons $G(p)=\frac{1}{p-2}$ et $F(p)=\frac{-1}{p-2}$. Alors $G'(p)=F(p)$. Or, l'original de G est la fonction $e^{2t}\mathcal{U}(t)$. Donc, par la formule de multiplication par t, on en déduit que l'original de F est la fonction $-te^{2t}\mathcal{U}(t)$. 0,5

3. Le dénominateur se factorise en $(p+4)(p-1)$. On décompose la fraction en éléments simples en l'écrivant sous la forme

$$\frac{a}{p+4}+\frac{b}{p-1} = \frac{(a+b)p+(4b-a)}{p^2-3p+4}.$$ 0,25

Par identification, on a le système

$$\begin{cases} a+b & = & 5 \\ -a+4b & = & 10 \end{cases}$$ 0,25

qui donne facilement $a=2$ et $b=3$. Ainsi, la fonction est

$$\frac{2}{p+4}+\frac{3}{p-1}.$$ 0,25

L'original recherché est la fonction

$$2e^{-4t}\mathcal{U}(t)+3e^{t}\mathcal{U}(t).$$ 0,25

4. Le discriminant du trinôme du second degré au dénominateur est négatif, donc il n'admet pas de racines. On le met sous forme canonique en écrivant

$$\frac{p-7}{p^2-14p+50}=\frac{p-7}{(p-7)^2+1}.$$ 0,25

L'original de la fonction $\frac{p}{p^2+1}$ est la fonction $\cos t\,\mathcal{U}(t)$. Tenant compte de la formule de 0,25 multiplication par e^{at}, l'original recherché est

$$\cos t e^{7t}\mathcal{U}(t).$$ 0,5

<u>Réponse 3 :</u> [12 pts]

1. La transformée de Laplace de y' est

$$\mathcal{L}(y')(p)=pF(p)-y(0)=pF(p)-1.$$ 1

Si on applique la transformée de Laplace à l'équation

$$y'+y=e^t\mathcal{U}(t),$$

on trouve

$$pF(p)-1+F(p)=\frac{1}{p-1}$$ 1

ce qui donne

$$(p+1)F(p)=\frac{1}{p-1}+1=\frac{p}{p-1}$$ 1

ou encore

$$F(p)=\frac{p}{(p-1)(p+1)}.$$ 1

On va calculer la transformée de Laplace inverse de cette fonction et pour cela on la décompose en éléments simples. On trouve que

$$F(p)=\frac{1/2}{p-1}+\frac{1/2}{p+1}.$$ 1

On en déduit que $y(t)=\frac{1}{2}e^t\mathcal{U}(t)+\frac{1}{2}e^{-t}\mathcal{U}(t)$. On vérifie ensuite que c'est bien une solution (la solution!) de l'équation.

1

2. On admet encore une fois que y possède une transformée de Laplace F. On a cette fois

$$\mathcal{L}(y')(p) = pF(p) - 1 \text{ et } \mathcal{L}(y'')(p) = p(pF(p) - 1) - 0 = p^2F(p) - p.$$ 1

Appliquant la transformée de Laplace à l'équation, on trouve

$$(p^2 - 3p + 2)F(p) = \frac{1}{p-3} + (p-3) = \frac{p^2 - 6p + 10}{p-3}.$$ 1

Mais $p^2 - 3p + 2$ se factorise en $(p-1)(p-2)$ et on trouve

$$F(p) = \frac{p^2 - 6p + 10}{(p-1)(p-2)(p-3)}.$$ 1

On décompose encore une fois en éléments simples, et on trouve que

$$F(p) = \frac{5/2}{p-1} - \frac{2}{p-2} + \frac{1/2}{p-3}.$$ 1

On inverse la transformée de Laplace, et on trouve que

$$y(t) = \frac{5}{2}e^t\mathcal{U}(t) - 2e^{-2t}\mathcal{U}(t) + \frac{1}{3}e^{3t}\mathcal{U}(t),$$ 2

qui est bien une solution (la solution!) de l'équation.