2.1 Introduction

La statique des fluides est la branche de la mécanique des fluides qui traite principalement les fluides au repos. L'étude des propriétés des fluides au repos constitue la statique des fluides.

2.2 Equation générale de la statique des fluides

Cas 1D

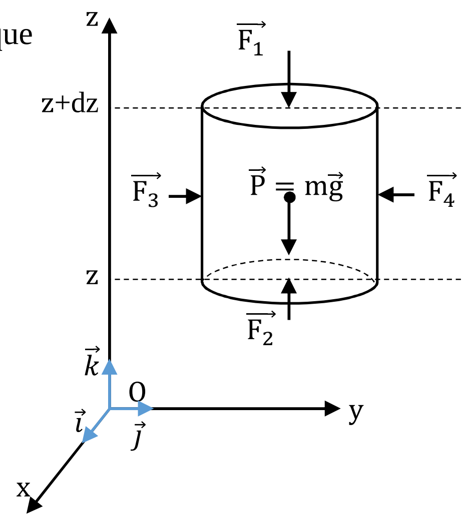
Premièrement on va démonter avec une méthode plus simple que :

$$\rho\vec{g} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P = -\left(\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Supposons une particule de fluide sous forme d'un petit cylindre contient de fluide (air atmosphérique) et est soumis à deux types des forces.

La force volumique comme le poids et les forces surfacique Comme la pression.

Nous connaissons que la pression décroit ↓ avec l'altitude z, plus l'altitude augmente↑ plus évidement la pression de l'air diminue↓. Comme la pression est dépend que de z.



On peut écrire l'équation comme suit :

$$\rho\vec{g} = -\frac{\partial P}{\partial z}\vec{k} = -\frac{dP}{dz}\vec{k}$$

Les conditions d'équilibre de petit cylindre de fluide

$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ (La somme des forces agir sur le fluide est nulle) comme montré sur le dessin ci-contre.

C'est-à-dire : $\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0}$ (*)

Lorsqu'on fait la projection selon Oz :

$$P(z + dz) = \frac{F_1}{S}$$

Autrement dit :

$$\vec{F}_1 = P(z + dz) \times S \times (-\vec{k})$$

$$\vec{F}_2 = P(z) \times S \times (+\vec{k})$$

$$\vec{P} = m \times \vec{g} = \rho \times \forall \times g \times (-\vec{k}) = m \times \vec{g} = \rho \times S \times dz \times g \times (-\vec{k})$$

Remplaçons dans l'équation (*) :

$$\rho \times S \times dz \times g \times \left(-\vec{k}\right) + P(z+dz) \times S \times \left(-\vec{k}\right) + P(z) \times S \times \left(+\vec{k}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \rho \times dz \times \vec{g} = -P(z+dz) \times S \times \left(+\vec{k}\right) + P(z) \times S \times \left(+\vec{k}\right) = \vec{0}$$

Autrement dit

$$\rho \times \vec{g} = -\left(\frac{P(z+dz) - P(z)}{dz}\right)\vec{k}$$

Finalement on trouve :

$$\rho \times \vec{g} = -\frac{dP}{dz}\vec{k}$$

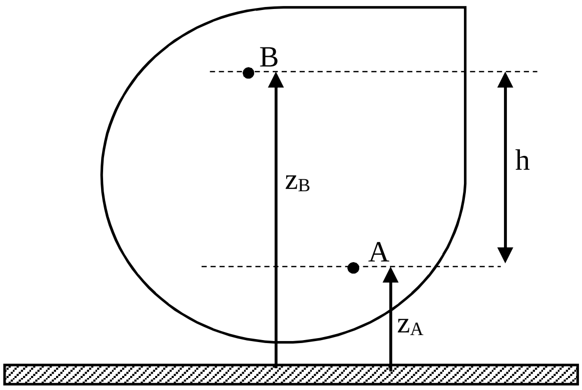
Dans le cas général où la pression dépend de x, y et z, on peut montrer que

$$\rho \times \vec{g} = -\left(\frac{dP}{dx}\vec{i} + \frac{dP}{dy}\vec{j} + \frac{dP}{dz}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}P$$

Les forces extérieures sont donc exclusivement le poids et on a alors :

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial x} \\ F_y = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial y} \\ F_z = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial P}{\partial z} \end{cases}$$



$$dp = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz$$

$$\frac{dP}{\rho} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Formule de Green-Ostrogradski : $\iiint_V \overrightarrow{\text{grad}}f\, dV = \iint_S f\,\vec{n}\, dS$

Cas particulier :

Les forces de volume dérivent d'un potentiel ϕ

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi$, $\rho\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}P \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}P + \rho\vec{F} = \vec{0}$

$dP + \rho \times d\phi = 0$ (statique des gaz, fluide compressibles).

Si en plus $\rho = C^{te}$, (C^{te} : constante) $\Rightarrow$ fluide incompressible)

$\overrightarrow{\text{grad}}(P + \rho \times \phi) = \vec{0}$, $P + \rho \times \phi = C^{te}$

$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\phi \sim \phi = g \times z \Rightarrow$ (champ de gravité)

$\rho = C^{te}$

$P + \rho \times g \times z = C^{te}$ (Hydraulique)

$P_A + \rho \times g \times z_A = P_B + \rho \times g \times z_B \Rightarrow P_A = P_B + \rho \times g \times (z_B - z_A)$

$z = C^{te} \Rightarrow P = C^{te} \Rightarrow P_A - P_B = \rho \times g \times h$

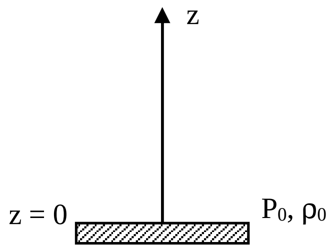
Pour l'atmosphère : $\phi = g \times z \Rightarrow d\phi = g \times dz$, $dP \neq \rho \times g \times dz$, [P(z) fonction n'est pas linéaire].

$dP + \rho \times g \times dz = 0$

2.3 Cas particulier de l'hydrostatique

$P + \rho \times g \times z = C^{te}$, $\rho = C^{te}$, $\phi = \rho \times g$

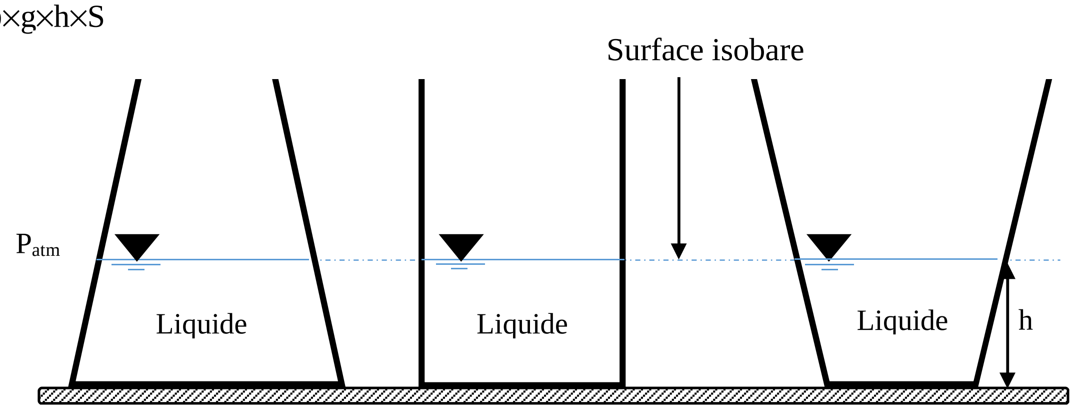
$z = C^{te} \Leftrightarrow P = C^{te}$: surface isobare sont des plans horizontales.



Pression sur le fond horizontal des vases

Quelle que soit la forme des vases, s'ils sont remplis du même liquide à la même hauteur h, le fond de même surface S est soumis à la même force de pression, égale au poids d'une colonne verticale de fluide de base S, de hauteur h :

$F = \rho \times g \times h \times S$



Ce résultat a été appelé le paradoxe hydrostatique : la poussée verticale sur le fond d'un récipient est indépendante de la forme de la paroi à l'intérieur de son contour qui est supposé fixe.

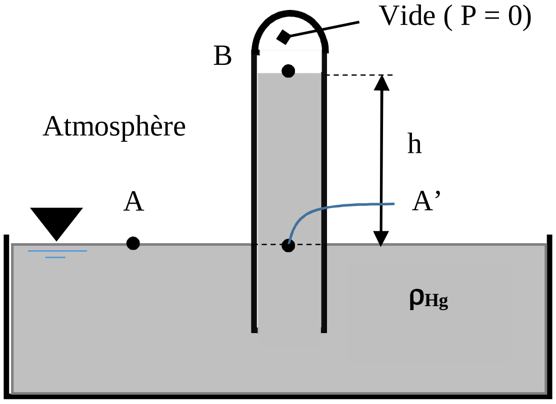
Principe de baromètre (expérience de Torricelli)

$P_A = P_B + \rho_{Hg} \times g \times h$

$P_A = P_{atm}$ et $P_B = 0$ atm (vide)

$P_{atm} = \rho_{Hg} \times g \times h$, $\rho_{Mercure} = 13{,}59 \times 10^3$ kg/m^3

$$h = \frac{P_{atm}}{\rho_{Hg} \times g} = \frac{1{,}01325 \times 10^5}{13{,}59 \times 103 \times 9{,}81} = 0{,}76 \text{ m} = 760 \text{ mm Hg}$$

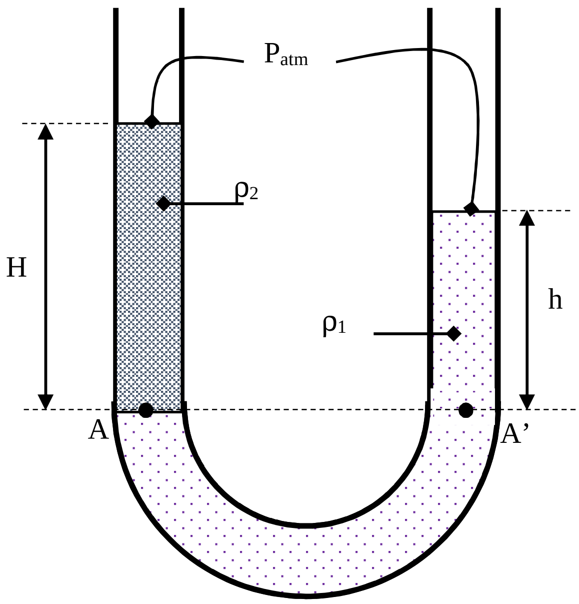


Principe de manomètre

$$\left.\begin{array}{l} P_A = P_{atm} + \rho_2 \times g \times H \\ P_A = P_{A'} = P_{atm} + \rho_1 \times g \times h \end{array}\right\} \quad \rho_1 \times g \times h = \rho_2 \times g \times H$$

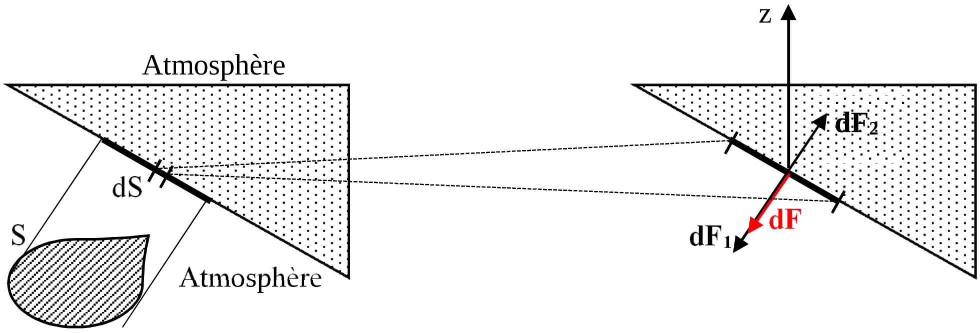
On déduire :

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{h}{H}$$



2.4 Force hydrostatique sur une surface plane

Soit une paroi de surface S située entre les profondeurs h1 et h2 au-dessous de la surface libre du liquide. Soit p0 la pression atmosphérique.



On a : $dF_1 = \rho_1 \times dS$, $dF_2 = \rho_2 \times dS$

$P_1 = P_{atm} + \rho \times g \times z$

et : $dF = dF_1 - dF_2$

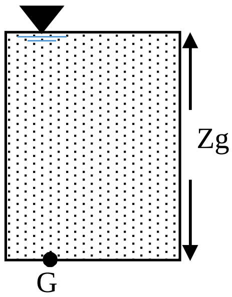
$dF = (P_{atm} + \rho \times g \times z) \times dS - P_{atm} \times dS \Rightarrow dF = \rho \times g \times z \times dS$

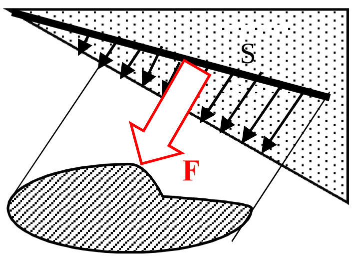
$$F = \int dF = \int_S \rho \times g \times z \times dS$$

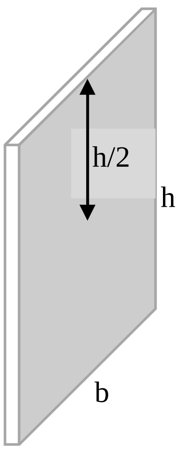
$$F = \rho g \int z \, dS$$

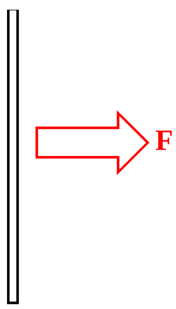
$$S_{Zg} = \frac{1}{S} \int_S z \, dS$$

$$F = \rho \, g \, S_{Zg}$$





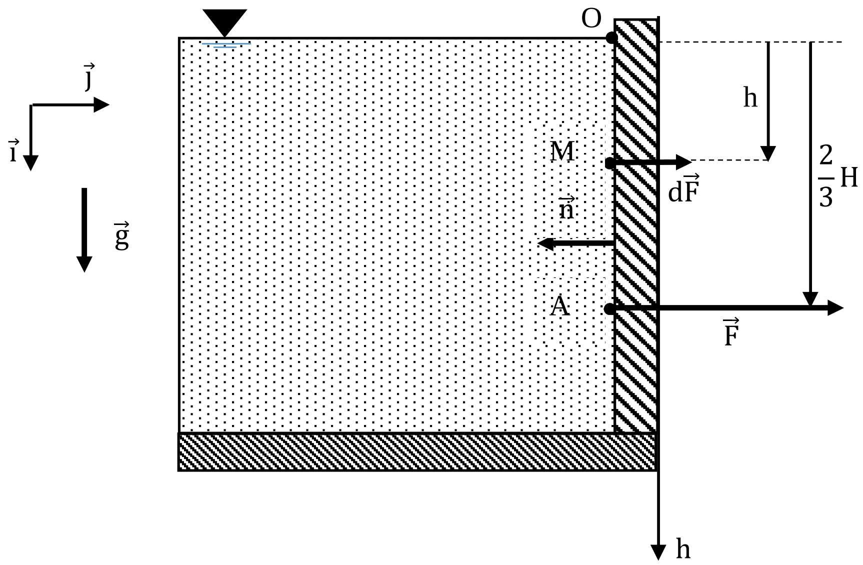




$$F = \rho \times g \times b \times \frac{h}{2}$$

Détermination du point d'application d'une force hydrostatique

Il est en général commode de choisir un point O appartenant à la surface. Choisissons le au niveau de la surface libre du fluide.



Il est en général commode de choisir un point O appartenant à la surface. Choisissons le au niveau de la surface libre du fluide.

L'abscisse x_A = OA du centre de poussée est défini par :

$\overrightarrow{OA} \wedge \int_S d\vec{F} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}$, soit :

$$OA.F\,\vec{i} \wedge \vec{j} = \int_S OM\,.\,dF\ \vec{i} \wedge \vec{j} \Rightarrow OA.F = \int_S OM.dF$$

$$OA.F\,\vec{k} = \int_S OM\,.\,dF\ \vec{k} \Rightarrow OA.F = \int_S OM.dF$$

$$F = \rho\, g\, h_G\, S = \rho\, g\, \frac{H}{2}\, S$$

dF = ρ g h L dh et OM = h

$$OA = \frac{\int_0^H h\,\rho\,g\,h\,L\,dh}{\rho\,g\,\frac{H}{2}\,S} = \frac{L}{\frac{H}{2}\ L\,H}\int_0^H h^2\,dh = \frac{2}{H^2}\,\frac{H^3}{3} \Rightarrow OA = \frac{2}{3}\,H$$

On constate que le centre de poussée est situé plus bas que le centre de gravité.

2.3 Forces de poussée d'Archimède

On cherche l'effort exercé sur un objet immergé, c'est-à-dire la force totale exercée par le fluide sur l'obstacle qui occupe le volume $\mathcal{V}$ totalement entouré par le fluide.

On sait que cette force s'exprime par :

$$\vec{F} = \iint_S -P\vec{n} \times dS$$

Où $\vec{n}$ est la normale unitaire en tout point de la surface S qui limite V, orientée vers le milieu qui agit. La formule du gradient, rappelée ci-contre, permet de passer d'une intégrale de surface à une intégrale de volume :

$$\iint_S -f\,\vec{n} \times dS = \iiint_V -\overrightarrow{grad}P \times d\text{V}$$

Dans le cas présent, il vient : $\vec{F} = \iiint_V -\overrightarrow{grad}P \times d\text{V}$

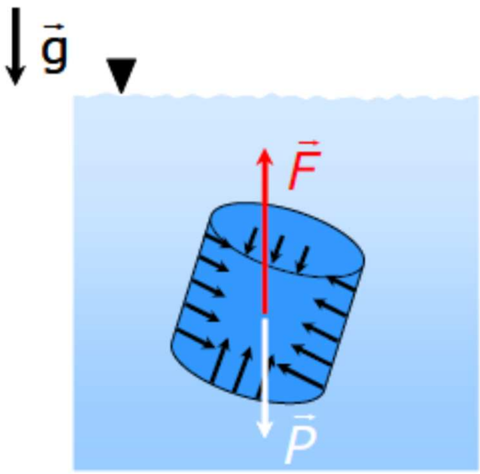
Or, l'équation fondamentale de la statique des fluides permet d'écrire $\overrightarrow{grad}P = \rho \times \vec{g}$

D'où: $\vec{F} = -\iiint_V \rho\times\vec{g} \times d\text{V}$

et, en supposant g constant sur tout le volume, $\vec{F} = -\vec{g}\iiint_V \rho \times d\text{V} = \rho \times \text{V} \times \vec{g}$

$\rho\times\text{V}$ est la masse de fluide déplacé par le volume solide. La poussée $\vec{F}$ n'a pas de composante horizontale et sa composante verticale est égale et opposée au poids du fluide déplacé par le corps (c'est la poussée d'Archimède).

On calcule de la même façon le moment résultant en un point tel que l'origine O par exemple :



$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F} = \iint_S \overrightarrow{OM} \wedge (-p\vec{n})dS = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{grad}PdV$$

$$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = \iiint_V \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{grad}P\,dV = \iiint_V (\overrightarrow{OM}\,\rho\,dV \wedge \vec{g})$$

Or $\iiint_V \overrightarrow{OM}\,\rho\,dV = m\,\overrightarrow{OG}$, G désignant le centre de gravité du liquide déplacé de masse m = ρ V.

D'où :

$\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F} = m\,\overrightarrow{OG} \wedge \vec{g} = \overrightarrow{OG} \wedge \vec{F}$

Le point d'application de la poussée d'Archimède, appelé centre de poussée, est le centre de masse de la partie immergée du solide (centre de gravité du fluide déplacé et non celui du solide immergé).

2.4 Statique des gaz

D'une façon générale, il s'agit des gaz puisque leur densité dépend de la pression. Pour simplifier l'étude, on prendra le cas d'un gaz parfait : $p \times \cancel{V} = n \times R \times T$.

$\rho = \frac{m}{\cancel{V}} = \frac{Mn}{\cancel{V}} = \frac{M}{RT}P$ (La masse volumique dépend de la pression ⇒ compressibilité)

Pour connaître la pression en tout point du gaz, on part de l'équation fondamentale de la statique des fluides et on l'intègre :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho Pg = -\frac{M}{RT}Pg \Rightarrow \frac{dP}{P} = -\frac{M}{RT}gdz$$

$$\int \frac{dP}{P} = -\int \frac{M}{RT}gdz = Cte$$

Avec $\frac{M}{RT}g$ constant si la température est homogène.

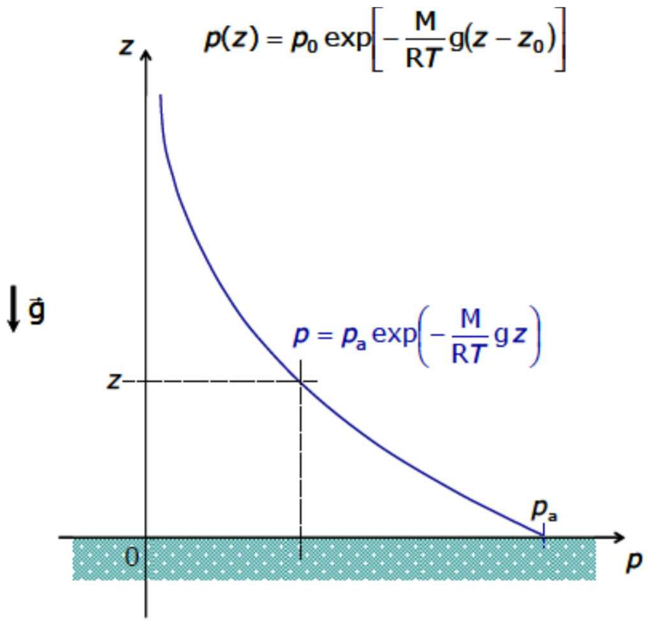
Soit :

$\ln P = -\frac{M}{RT}gz + Cte$: donc : $P(z) = Cte \times \exp\left(-\frac{M}{RT}gz\right)$

Où la constantr se définit par rapport à la pression pour un niveau de référence.

Ainsi, si $P = P_0$ en $z = z_0$ alors : $Cte = P_0 \times \exp\left(-\frac{M}{RT}gz_0\right)$

Donc : $P(z) = P_0 \times \exp\left[-\frac{M}{RT}g(z - z_0)\right]$



En général, on peut considérer comme constante la pression d'un gaz remplissant un réservoir de quelques mètres de haut. En effet, considérons le cas d'un récipient contenant de l'air, d'une hauteur intérieure h = 1 m. Supposons que la température y soit uniforme et égale à 0 °C, et la pression normale à la base (z = 0). Dans les conditions normales[2], la masse volumique de l'air est $\rho_0 = 1{,}293\ kg/m^3$. La formule précédente donne :

$$P = P_0 \times \exp\left[-\frac{\rho_0 gz}{P_0}\right] \approx P_0 - \rho_0 gz$$, (on va utiliser cette approximation : $\exp(\varepsilon) \approx 1+\varepsilon$)

$$\left|\frac{P - P_0}{P_0}\right| \approx -\frac{\rho_0 gz}{P_0} = \frac{1{,}293 \times 9{,}81 \times 1}{1{,}013 \times 10^5} = 1{,}25 \times 10^{-4}$$

Donc, on peut considérer que la pression garde une valeur unique en tout point d'un récipient. Cette approximation revient à négliger la masse volumique du gaz.

Il n'en est pas de même si on considère des fortes variations de cotes $z - z_0$, comme dans l'étude de la structure verticale de l'atmosphère. Par exemple, dans les conditions normales, la loi de répartition des pressions en atmosphère isotherme à 273 K est égale à :

$$P = P_0 \times \exp\left[-\frac{z}{7978}\right]$$, avec M = 29 g/mole, R = 8,314 J/mole/K et g = 9,81 m/s^2

Soit à 1000 m d'altitude : $P = 0{,}88 \times P_0 = 0{,}894\ 10^5$ Pa.

La température variant en général avec l'altitude, il faut, avant d'intégrer, se donner la relation $\rho(p)$ ou $\rho(T)$. Les études expérimentales de l'atmosphère réelle ont permis de la diviser en un certain nombre de zones : entre zéro et 10 kilomètres d'altitude (troposphère), la température absolue T décroît linéairement : $T = T_0 - k \times z$. Typiquement à l'altitude zéro, la température est de 15 °C, la pression de 1,013 105 Pa et la masse volumique est donc de 1,225 kg/m^3 ; entre 0 et 10000 m : $T = 288 \times (1 - 22{,}6 \times 10^{-6} \times z)$. Puis à une altitude z supérieure à 10 kilomètres (stratosphère), l'équilibre peut être représenté par un équilibre adiabatique, c'est-à-dire tel que le volume v et la pression P sont liés par la relation $PV^\gamma = cte$. Déterminez la relation P = f(z) dans cette zone. On appellera p_0 la pression à l'altitude z_0 = 10 km.

Réponse :

$$\left(\frac{P}{P_0}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{(\gamma - 1)\rho_0 z}{\gamma P_0} \Rightarrow P = P_0\left[1 - \frac{(\gamma - 1)\rho_0 z}{\gamma P_0}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$$

[2] Les conditions normales de température et de pression sont : p = 1 atm et T= 273,15 K (0 °C).
Les conditions standards sont : p = 1 atm et T= 298,15 K (25 °C).

Exercice 1 :

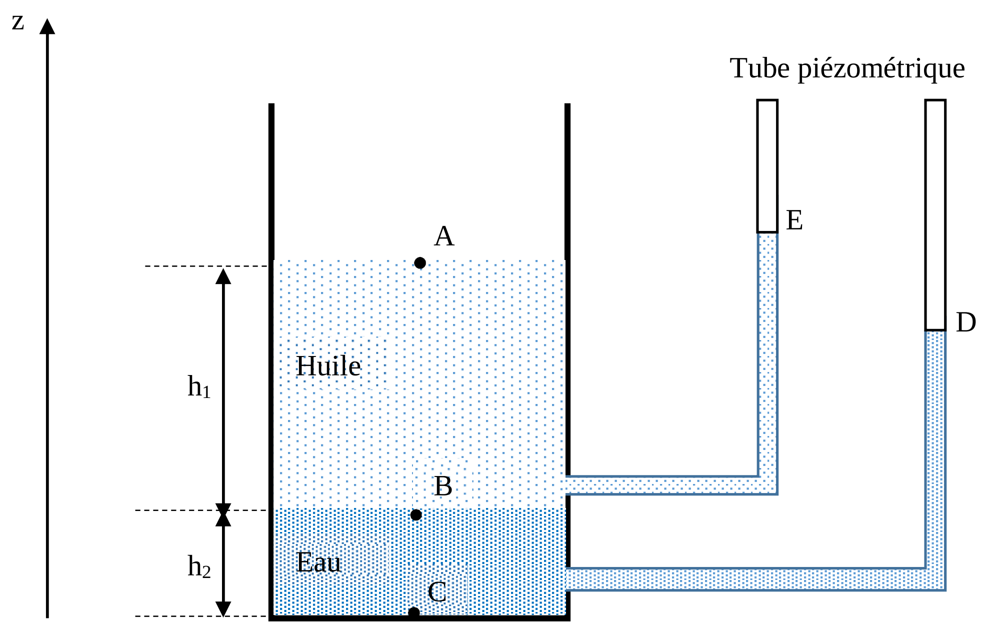
Que vaut la pression atmosphérique en Pascal quand le baromètre à mercure indique 742 mm .

Solution 1 :

Exercice 2 :

La figure ci-dessous représente un réservoir ouvert, équipé de deux tubes piézométriques et rempli avec deux liquides non miscibles :

- de l'huile de masse volumique ρ_1 = 850 kg/m^3 sur une hauteur h_1 = 6 m,
- de l'eau de masse volumique ρ_1 = 1000 kg/m^3 sur une hauteur h_2 = 5 m.



On désigne par :

- A un point de la surface libre de l'huile,
- B un point sur l'interface entre les deux liquides,
- C un point appartenant au fond du réservoir
- D et E les points représentants les niveaux dans les tubes piézométriques,
- (O, $\vec{z}$) est un axe vertical tel que $z_C = 0$

Appliquer la relation fondamentale de l'hydrostatique (RFH) entre les points :

1) B et A. En déduire la pression P_B (en bar) au point B.

2) A et E. En déduire le niveau de l'huile z_E dans le tube piézométrique.

3) C et B. En déduire la pression P_C (en bar) au point C.

4) C et D. En déduire le niveau de l'eau z_D dans le tube piézométrique.

Solution 1 :

1) RFH entre B et A : $P_B - P_A = \rho_1 \times g \times (z_A - z_B)$ Or $P_A = P_{atm}$ et $z_A - z_B = h_1$

Donc $P_B = P_{atm} + \rho \times g \times h$

Analyse numérique : $P_B = 10^5 + 850 \times 9{,}81 \times 6 = 150031$ Pa = 1,5 bar

2) RFH entre A et E : $P_A - P_E = \rho_1 \times g \times (z_E - z_A)$ or $P_A = P_E = P_{atm}$

Donc $z_E = z_A = h_1 + h_2$

Analyse numérique : $z_E = 6 + 5 = 11$ m.

3) RFH entre C et B : $P_C - P_B = \rho_2 \times g \times (z_B - z_C)$ or $z_B - z_C = h_2$

Donc $P_C = P_B + \rho_2 \times g \times h_2$

Analyse numérique : $P_C = 150031 + 1000 \times 9{,}81 \times 5 = 199081$ Pa = 2 bar

4) RFH entre C et D : $P_C - P_D = \rho_2 \times g \times (z_D - z_C)$ or $P_D = P_{atm}$ et $z_C = 0$

5) Donc $z_D = \frac{P_C - P_{atm}}{\rho_2 \cdot g}81$

Analyse numérique :

$$z_D = \frac{199081 - 10^5}{1000 \times 9{,}81}$$

Exercice 3 :

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.

Entre les surfaces :

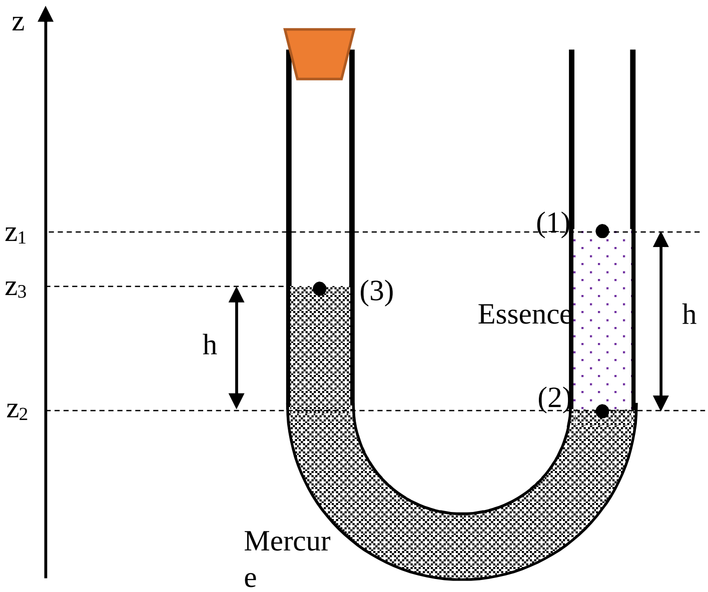
- (1) et (2) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho essence = 700$ kg/m^3.

- (2) et (3), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho mercure = 13600$ kg/m^3.

La pression au-dessus de la surface libre (1) est $P_1 = P_{atm} = 1$ bar.

L'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}8$ m/s^2.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_3 qu'on cherche à calculer.



1) En appliquant la RFH (Relation Fondamentale de l'Hydrostatique) pour l'essence, calculer la pression P2 (en mbar) au niveau de la surface de séparation (2) sachant que h = $(z_1 - z_2)$ = 728 mm.

2) De même, pour le mercure, calculer la pression P3 (en mbar) au niveau de la surface (3) sachant que h'= $(z_3 - z_2)$ = 15 mm.

Solution 3 :

1) RFH pour l'essence : $P_2 - P_1 = \rho_{essence} \times g \times (z_1 - z_2)$

$P2 = P1 + \rho_{essence} \times g \times h$

Application numérique :

$P_2 = 10^5 + 700 \times 9{,}81 \times 0{,}728 = 1{,}05 \times 10^5$ pa = 1050 mbars

2) RFH pour le mercure : $P_2 - P_3 = \rho_{mercure} \times g \times (z_3 - z_2)$

$P_3 = P_2 - \rho_{mercure} \times g \times h'$

Application numérique :

$P_3 = 1050 \times 10^3 + 13600 \times 9{,}81 \times 0{,}15 = 1{,}30 \times 10^5$ pa = 1030 mbars

Exercice 4 :

Un réservoir de forme parallélépipédique ayant les dimensions suivantes :

- hauteur h = 3m,

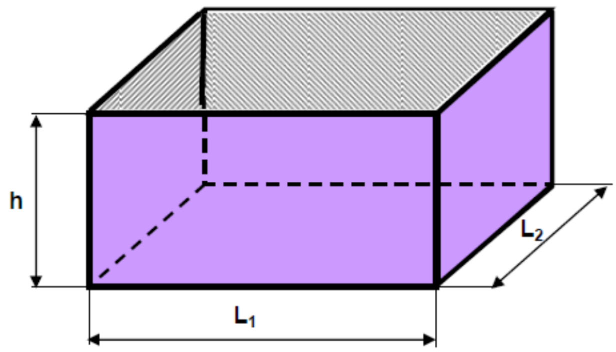
- longueur L_1= 8 m,

- largeur L_2 = 6 m.

est complètement remplie d'huile de masse volumique ρ = 900 kg /m^3.

1) Calculer le module de la résultante des forces de pression sur chaque surface du réservoir (les quatre faces latérale et le fond).

2) Déterminer pour les surfaces latérales la position du point d'application (centre de poussée).



Solution 4 :

1) $R = P_G \times S$

Sur les parois latérales :

$$R_1 = \rho \times g \times \frac{h}{2} \times h \times L_1 = \varpi \times \frac{h}{2} \times h \times L_1 = 0{,}5 \times 900 \times 9{,}81 \times 3^2 \times 8 = 317844 \text{ N}$$

$$R_2 = \rho \times g \times \frac{h}{2} \times h \times L_2 = \varpi \times \frac{h}{2} \times h \times L_2 = 0{,}5 \times 900 \times 9{,}81 \times 3^2 \times 6 = 238383 \text{ N}$$

Sur le fond du réservoir :

$$R_3 = \rho \times g \times h \times L_1 \times L_2 = \varpi \times \times h \times L_1 \times L_2 = 900 \times 9{,}81 \times 3 \times 6 \times 8 = 1271376 \text{ N}$$

2) Les points d'application sont a $\frac{h}{2} = 1$ m du fond pour les faces latérales.

Exercice 5 :

On considère un récipient en forme de parallélépipède de largeur b = 2 m, ouvert à l'air libre et rempli jusqu'à une hauteur h = 1,5 m avec du mercure de masse volumique ρ = 13600 kg/m^3.

On désigne par :

- G le centre de gravité de la surface mouille S.
- $(G,\vec{X},\vec{Y},\vec{Z})$ un R.O.D. où $\vec{X}$ est orthogonal à S et $\vec{Y}$ est vertical.

On donne l'accélération de la pesanteur g = 9,81 m/s^2.

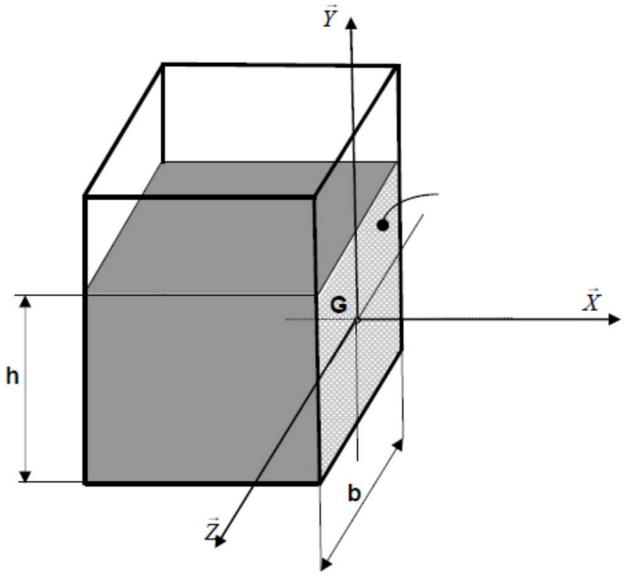
1) En appliquant la relation fondamentale de hydrostatique (RFH) entre un point M de la surface libre et le point G, calculer la pression P_G.

2) Déterminer l'intensité de la résultante $\vec{R}$ des forces de pression agissant sur S.

3) Calculer le moment quadratique $I_{(G,Z)}$ de la surface S.

4) Calculer la position Y_0 du centre de poussée.

Solution 5 :



1) RFH entre G et M : $P_G - P_M = \rho\times g\times (Y_M - Y_G)$ or $Y_M = h/2$, $Y_G = 0$ et $P_M = P_{atm}$ donc

$P_G = P_{atm} + \rho\times g\times h/2$

Analyse numérique : $P_G = 10^5 + 13600\times 9{,}81\times 1{,}5/2 = 2\times 10^5 = 2$ bar.

2) Intensité de la résultante : $R = P_G\times S = P_G\times b\times h$

Analyse numérique : $R = 2\times 10^5\times 2\times 1{,}5 = 6\times 10^5$ N

3) moment quadratique : $I_{(G,Z)} = \frac{2\times 1{,}5^3}{12} = 0{,}5625\ \mathrm{m}^4$

4) Position du centre de poussée : $Y_0 = \frac{\varpi\times I_{(G,Z)}}{R}$

Analyse numérique : $Y_0 = -\frac{13600\times 9{,}81\times 0{,}5625}{6\times 10^5} = -0{,}125$ m

Exercice 6 : (Atmosphère isotherme)

Déterminer le profil de pression P, de masse volumique ρ

en fonction de z pour une atmosphère isotherme.

Solution 6 :

Pour une atmosphère isotherme $T = C^{te}$. Par l'utilisation de l'équation d'état : $P = \rho\times r\times T$

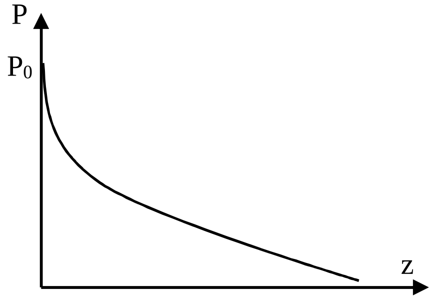
$\Rightarrow P_0 = \rho\, r\, T_0$

$P = \rho\, r\, T$

$$\frac{P}{\rho}=\frac{P_0}{\rho_0}\ \Rightarrow \frac{P}{\rho}=\frac{\rho_0}{P_0}\times P$$

$$dP+P\frac{\rho_0}{P_0}\times g{\times}dz\ \Longrightarrow \frac{dP}{P}=-\frac{\rho_0}{P_0}\times g\times dz \Longrightarrow P=k\times\left[\exp\left(-\frac{\rho_0}{P_0}\times g\right)\times z\right]$$

Application numérique :



$$-\frac{\rho_0}{P_0}\times g=-\frac{1{,}293\times 9{,}81}{1{,}01325\times 10^5}\approx-\frac{1}{8000}\,m$$

$$P=P_0\times\exp\left(-\frac{z}{8000}\right)$$

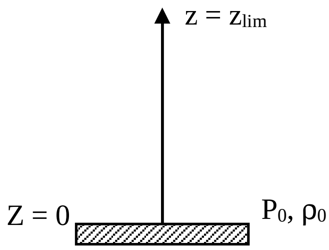
On a :

$$\rho=\frac{P}{P_0}\rho_0 \Rightarrow \rho=\rho_0\times\exp\left(-\frac{z}{8000}\right)$$

Exercice 7 : (Atmosphère adiabatique)

Déterminer le profil de pression P, de masse volumique ρ en fonction de z pour une atmosphère adiabatique ainsi la limite de l'atmosphère z_{lim}. On donne $\gamma = 1{,}4$.

Solution 7 :



$$\frac{P}{\rho^\gamma}=C^{te},\frac{P}{\rho^\gamma}=\frac{P_0}{\rho_0^\gamma}$$

$$P=P_0\left[1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\times\frac{\rho_0 g}{P_0}\times z\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho=\rho_0\left[1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\times\frac{\rho_0 g}{P_0}\times z\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \Rightarrow T=T_0\left[1-\left(\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\times\frac{\rho_0 g}{P_0}\times z\right]$$

z_{lim} → vide absolue

$$z_{lim}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\rho_0 g}$$

Application numérique : $\gamma = 1{,}4$, $z_{lim} = 28000$ m