Chapitre 1

Tribus et mesures

Soit X un ensemble non vide, $\mathcal{P}(X)$ représente l'ensemble des parties de X.

1.1 Rappel et comlémentaires

Soient A, B deux parties de X, et $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille des parties de X.

Définition 1.1. *On définit :*

$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in X, \exists i \in I : x \in A_i\} \qquad \bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in X, \forall i \in I : x \in A_i\}$$
$$A \setminus B = \{x \in X : x \in A \wedge x \notin B\} \qquad A^c = X \setminus A$$
$$A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \qquad A \times B = \{(x, y); x \in A \wedge y \in B\}$$

On a les propriétées suivantes :

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c \qquad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c \qquad \textbf{(règles de Morgane)}$$
$$A \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I}(A \cup A_i) \qquad A \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I}(A \cap A_i)$$

Définition 1.2. *La fonction indicatrice χ_A de la fonction A est la fonction de X dans $\{0, 1\}$, définit comme suivant :*

$$\forall x \in X : \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & : x \in A \\ 0 & : x \notin A \end{cases}$$

Proposition 1.1. *On a :*

1. $A \subset B \Rightarrow \chi_A \leq \chi_B$.
2. $\chi_{A\cup B} = \max\{\chi_A, \chi_B\}$.
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$.
4. $\chi_{A\cap B} = \min\{\chi_A, \chi_B\} = \chi_A . \chi_B$.
5. $\chi_{A^c} = 1 - \chi_A$.

Définition 1.3. .

i) *A et B sont équipotents s'il existe une bijection entre A et B. On dit alors qu'il ont même cardinal, et on écrit $card(A) = card(B)$.*

ii) *Un ensemble dénombrable est un ensemble équipotent à $\mathbb{N}$.*

Proposition 1.2. .

1. *Si A et B sont deux ensembles dénombrables, alors $A \times B$ est ensemble dénombrable.*

2. *Si $\{A_i\}_{i \in I}$ est une famille dénombrables des ensembles dénombrables, alors $\bigcup\limits_{i \in I} A_i$ est dénombrable.*

Exemple 1.1. [4]

1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ est un ensemble dénombrable, on utilsant la bijection $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, définit comme suivant :*
$$\forall n \in \mathbb{Z} : f(n) = \begin{cases} 2n - 1 & :> 0 \\ -2n & : n \leq 0 \end{cases}$$

2. *L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable, on utilsant la bijection $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, définit comme suivant :*
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : g(n,m) = \begin{cases} 0 & : n = m = 0 \\ (n+m)\dfrac{n+m+1}{2} + m & : sinon \end{cases}$$

3. *L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable, on utilsant la bijection $h : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* \to \mathbb{Q}$, définit comme suivant :*
$$\forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^* : h(n,m) = \frac{n}{m}.$$

Définition 1.4. *La droite réelle achevée est l'ensemble $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.*

On munit $\overline{\mathbb{R}}$ de la topologie d'Alexandrov, basée sur la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, ce qui assure la compacité.
$\overline{\mathbb{R}}$ est muni de la relation d'ordre, prolongeant celle de $\mathbb{R}$, et pour laquelle on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty.$$

On peut étendre à $\mathbb{R}$ les opérations algébriques de façon à rédupérer les propriétées de limites de suites :

$$\begin{array}{ll}
\forall x \in \mathbb{R} : x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty & \forall x \in \mathbb{R} : x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \\
\forall x > 0 : x.(+\infty) = (+\infty).x = +\infty & \forall x > 0 : x.(-\infty) = (-\infty).x = -\infty \\
\forall x < 0 : x.(+\infty) = (+\infty).x = -\infty & \forall x < 0 : x.(-\infty) = (-\infty).x = +\infty \\
(+\infty) + (+\infty) = +\infty & (-\infty) + (+\infty) = -\infty \\
(+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty & (+\infty).(-\infty) = (-\infty).(+\infty) = -\infty \\
0.(+\infty) = (+\infty).0 = 0 & 0.(-\infty) = (-\infty).0 = 0
\end{array}$$

Définition 1.5. *Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$. On définit la limite supèrieure $\overline{\lim}\, u_n$ et la limite infèrieure $\underline{\lim}\, u_n$ de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ comme suivant :*

$$\overline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} \sup_{n \geq p} u_n = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq p} u_n \qquad \underline{\lim}\, u_n = \lim_{p \to +\infty} \inf_{n \geq p} u_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq p} u_n$$

On a : $\underline{\lim}\, u_n \leq \overline{\lim}\, u_n$.

Définition 1.6. *Soit $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des parties de X. On définit la limite supèrieure $\overline{\lim}\, A_n$ et la limite infèrieure $\underline{\lim}\, A_n$ de la suite $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ comme suivant :*

$$\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n = \inf_{p \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq p} A_n \qquad \underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq p} A_n = \sup_{p \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq p} A_n$$

On a : $\underline{\lim}\, A_n \subset \overline{\lim}\, A_n$.

1.2 Algèbres, tribus, et espaces mesurables

Soit $\mathcal{A}$ une collection non vide des parties de X.

Définition 1.7. *On dit que $\mathcal{A}$ est un anneau sur X si et seulement si :*

i) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$,

ii) $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Proposition 1.3. *$\mathcal{A}$ est un anneau sur X, si et seulement si :*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cap B \in \mathcal{A}$,
3. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \Delta B \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.2. [14]

1. *La collection de toute les parties finies de $\mathbb{N}$ est un anneau sur $\mathbb{N}$.*
2. *La collection de toute les parties bornées de $\mathbb{R}$ est un anneau sur $\mathbb{R}$.*

Définition 1.8. *On dit que $\mathcal{A}$ est un algèbre (de Bool) sur X si et seulement si est un anneau sur X, et $X \in \mathcal{A}$.*

Proposition 1.4. *$\mathcal{A}$ est un algèbre sur X si :*

1. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \cup B \in \mathcal{A}$,
2. $\forall A \in \mathcal{A} : A^c \in \mathcal{A}$.

Exemple 1.3. [5, 14]

1. *$\mathcal{P}(X)$ est une algèbre sur X.*
2. *$\{\emptyset, X\}$ est une algèbre sur X.*
3. *La collection $\{A \subset \mathbb{R} : [0,1] \subset A \, ou \, [0,1] \cap A = \emptyset\}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$.*
4. *La collection $\{]a, b[, a, b \in \mathbb{R}\}$ n'est pas une algèbre sur $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.5. [15] *Soit $\mathcal{C}$ une collection des parties de X. Alors, il existe une algèbre minimale $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, contient $\mathcal{C}$, i.e $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}(\mathcal{C})$, et pout toute algèbre $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, on a : $\mathcal{A}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.*

Proposition 1.6. [14, 15] *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur X, et $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite des éléments de $\mathcal{A}$. Alors, il existe une suite $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ des parties de X telle que :*

1. $\forall n \in \mathbb{N} : B_n \subset A_n$.
2. $\forall n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow A_n \cap B_n = \emptyset$.
3. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

Définition 1.9. *On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu ($\sigma-$ algèbre) sur X si et seulement si :*

i) *$\mathcal{A}$ est une algèbre sur X,*

ii) *Pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i \in I}$ de $\mathcal{A}$, on a : $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$.*

Définition 1.10. *Toute couple $(X, \mathcal{A})$, ou $\mathcal{A}$ est une tribu sur X, est appelée espace mésurable. Les éléments de A sont appelés des ensembles mésurables.*

Remarque 1.1. [15] *Soit $\mathcal{C}$ une collection des parties de X. Alors, il existe une tribu minimale $\mathcal{A}(\mathcal{C})$, contient $\mathcal{C}$. Cette tribu est appelée la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

Exemple 1.4. [14, 15]

1. *$\mathcal{P}(X)$ est une tribu sur X.*
2. *$\{\emptyset, \mathbb{N}, 2\mathbb{N}, 2\mathbb{N}+1\}$ est une tribu sur $\mathbb{N}$.*
3. *Soit $X = [a, b[$, et soit $\mathcal{A}$ la collection composée de toute les réunions finis des intervalles de la forme $[\alpha, \beta[\ (a \leq \alpha \leq \beta \leq b)$. $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X, mais n'est pas une tribu sur X.*
4. *Soit (X, τ) un espace topologique. La topologie τ n'est pas une tribu sur X.*

Définition 1.11. *Soit (X, τ) un espace topologique. On appelle tribu borilienne sur X par rapport à τ, et on le note par $\mathcal{B}_\tau(X)$ la tribu engendrée par τ.*
Les éléments de celle tribu sont appelé les ensembles boriliens.

Remarque 1.2. *On désigne par $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ la tribu borilienne engendrée par latopologie usuelle de $\mathbb{R}$.*

Proposition 1.7. *La tribu borilienne $\mathcal{B}_\tau(X)$ est la tribu engendrée par la collection de tous les ensembles fermés de (X, τ).*

Définition 1.12. *Soit (X, τ) un espace topologique.*

i) *On dit qu'une partie O de X est de type G_σ si elle ecrire $O = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{O}_n$, ou $\{\mathcal{O}_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite des ouverts de (X, τ).*

ii) *On dit qu'une partie F de X est de type F_δ si elle ecrire $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, ou $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ est une suite des fermés de (X, τ).*

Remarque 1.3. [15] *Soit (X, τ) un espace topologique.*

1. *Les ensembles de type G_σ et $_\delta$ sont des boriliens.*
2. *Si O est de type G_σ, alors O^c est de type F_δ.*
3. *Si F est de type F_δ, alors F^c est de type G_σ.*
4. *Tout ouvert est de type G_σ, et tout fermé est de type F_δ.*

Définition 1.13. *Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ deux tribus sur deux ensembles non vides X_1, X_2.*

i) *On appelle rectangle de $X_1 \times X_2$ tout ensemble $A_1 \times A_2$ ou $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$.*

ii) *On appelle tribu de produit sur $X_1 \times X_2$ la tribu engendrée par R, l'ensemble des rectangles de $X_1 \times X_2$.*

1.3 Mesures

Définition 1.14. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit la fonction $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$. On dit que μ et une mesure positive si et seulement si :*

i) $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) \geq 0,$

ii) $\mu(\emptyset) = 0,$

iii) *pour toute suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ des élémens disjoints deux à deux de $\mathcal{A}$, on a :* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$

(cette propriétée est appelée la propriété de $\sigma-$ additivité).

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelée un espace mesuré.

Remarque 1.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré.*

i) *Si $\mu(A) < \infty$, on dit que μ est une mesure finie.*

ii) *Si $\mu(X) = 1$, on dit que μ est une mesure de probabilités.*

Exemple 1.5. [*5*, *15*]

1. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit la mesure μ comme suivant : $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) = 0$. μ est appelée la mesure nulle.*

2. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable. On définit la mesure μ comme suivant : $\mu(\emptyset) = 0$, et $\forall A \in \mathcal{A}$: $\mu(A) = +\infty$.*

3. *Soit l'espace mesurable $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, et soit $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite réelle positive. On définit la mesure μ comme suivant :*
$$\forall A \subset \mathbb{N} : \mu(A) = \sum_{n \in A} x_n.$$
μ est appelée la mesure discrète sur $\mathbb{N}$.

4. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $a \in X$. n définit la mesure de Dirac δ_a comme suivant :*
$$forallA \in \mathcal{A} : \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & : \quad x \in A \\ 0 & : \quad x \notin A. \end{cases}$$

5. *Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit $a \in X$. n définit la mesure de copmtage δ_a comme suivant :*
$$forallA \in \mathcal{A} : \mu(A) = \begin{cases} card(A) & : \quad A \text{ est fini} \\ +\infty & : \quad \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.8. [*4*, *5*, *14*, *15*] *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, alors :*

1. $\forall A, B \in \mathcal{A} : \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$

2. $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B) et \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$

3. *Pour toute suite $A_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ des éléments de $\mathbb{A}$, on a :* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n \to +\infty} \mu(A_n)$. *(propriétée de $\sigma-$ sous additivité).*

4. *Pour toute suite croissante $A_{n}{}_{n=1}^{\infty}$ des éléments de $\mathbb{A}$, on a :* $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$. *(continuité croissante).*

5. *Pour toute suite croissante* $A_{n n=1}^{\infty}$ *des éléments de* $\mathbb{A}$*, s'il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mu(A_k) < \infty$*, alors on a :* $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to +\infty} \mu(A_n)$*. (continuité décroissante).*

Théorème 1.1 (Lemme de Borel-Cantelli)**.** [15] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.* $A_{n n=1}^{\infty}$ *des éléments de* $\mathbb{A}$*. Si* $\sum_{n \to +\infty} \mu(A_n) < \infty$*, alors :* $\mu(\overline{\lim} A_n) = 0$*.*

Définition 1.15. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.*

i) *On dit qu'une partie* N *de* X *est* $\mu-$ *négligeable s'il existe* $A \in \mathcal{A}$ *telle que* $N \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$*.*

ii) *une propriétée relative aux éléments de* X *est vrais presque par tout pour* $\mu\,(\mu - ppt)$ *si elle est vrais dans le complémentaire d'un ensemble* $\mu-$ *négligeable.*

Remarque 1.5. *Un ensemble négligeable n'est pas nécessairement mesurable.*

Définition 1.16. *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré.* μ *est complète si tout les parties négligeables sont mesurables. On dit alors que* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *est un espace mesuré complet.*

Théorème 1.2. [15] *Soit* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré, et soit* $\mathcal{N}_\mu$ *l'ensemble des parties* $\mu-$ *négligeables. Alors :*

1. *La collection* $\widehat{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \in \mathcal{N}_\mu\}$ *est une tribu, c'est la tribu engendrée par* $\mathcal{A} \cup \mathbb{N}_\mu$*.*
2. *Il existe une mesure unique* $\widehat{\mu}$ *sur* $\widehat{\mathcal{A}}$ *prolonge* μ*.*
3. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *et* $(X, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mu})$ *ont les mêmes ensembles négligeables.*

Définition 1.17. *Soit une fonction* $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$*. On dit que* μ^* *est une mesure extèrieure sur* X *si et seulement si :*

i) $\mu(\emptyset) = 0$,

ii) *pour tous* $A, B \subset X$*, si* $A \subset B$ *alors,* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$*,*

iii) *pour toute suite* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *des parties de* X*, on a :* $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$*. (cette propriétée est appelée la propriété de* $\sigma-$ *sous-additivité).*

Exemple 1.6. [15]

1. *Toute mesure positive est une mesure extèrieure.*
2. *On définit une mesure extèrieure* μ^* *sur un ensemble* X *comme suivant :* $\mu^*(\emptyset) = 0$*, et* $\forall A \subset X : \mu(A) = 1$*.*

1.4 La mesure de Lebsgue

On va construire la mesured de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ comme une restriction de la mesure de Lebesgue extèrieure sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}, a \subset \mathbb{R}$. on pose $a + A = \{a + x, x \in A\}$.

Définition 1.18. *On appelle mesure extèrieure de Lebesgue* λ^* *l'application de* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *dans* $\overline{\mathbb{R}}$*, définit comme suivant :*

$$\forall a \subset \mathbb{R} : \lambda^*(A) = \inf\left\{\sum_n (b_n - a_n), A \subset \bigcup_n]a_n, b_n[\right\}$$

Remarque 1.6. *En remarquant que* λ^* *est positive, et il peut prendre* $+\infty$*.*

Théorème 1.3. [*11, 15*] *La mesure extèrieure de Lebesgue λ^* vérifie les propriétées suivantes :*

1. $\lambda^*(\emptyset) = 0$.
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \lambda^*(\{a\}) = 0$.
3. $\forall A, B \subset \mathbb{R} : A \subset B \Rightarrow \lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$.
4. $\forall a, b \in \mathbb{R} : \lambda^*((a, b)) = b - a$.
5. *Pour toute suite* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ *des parties de* $\mathbb{R}$, *on a :* $\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$($\sigma-$ *sous additivité*)

Définition 1.19. *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable si et seulement si :*

$$\forall M \subset \mathbb{R} : \lambda^*(M) = \lambda^*(M \cap A) + \lambda^*(M \cap A^c)$$

On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R})$ l'ensemble des parties Lebesgue mesurables de $\mathbb{R}$.

Proposition 1.9. .

1. *Toute intervalle est Lebesgue mesurable.*
2. *Toute partie ouverte est Lebesgue mesurable.*
3. *Toute partie fermée est Lebesgue mesurable.*
4. *Soi A est une partie Lebesgue mesurable, alors $a + A$ est Lebesgue mesurable pour tout $a \in \mathbb{R}$.*
5. *Pour toute $N \subset \mathbb{R}$, si $\lambda^*(N) = 0$, alors N est Lebesgue mesurable.*

Théorème 1.4. [*15*] *$\mathcal{L}(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$, contenant la tribu borilienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.*

Théorème 1.5. [*11*] *Pour toute suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ des éléments de $\mathcal{L}(\mathbb{R})$, disjoints deux à deux, on a :*

$$\lambda^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$$

Définition 1.20. *On appelle mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, et on le note par λ la resriction de la la mesure de Lebesgue extèrieure λ^* sur $\mathcal{L}(\mathbb{R})$.*

Exemple 1.7. [*15*]

1. $\lambda(\emptyset) = 0$.
2. $\forall a \in \mathbb{R} : \lambda(\{a\}) = 0$.
3. *Si A est un ensemble dénombrable, alors $\lambda(A) = 0$.*
4. *Si I est un intervalle, alors $\lambda(I)$ est sa langueur*

Proposition 1.10. [*11*] *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, et pour tout $A \subset \mathbb{R}$, on a : $\lambda(a + A) = \lambda(A)$.*

Remarque 1.7. *D'une manière analogue, on définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*$ (voir par example [4, 8, 15])*