Université : Mohamed Boudiaf M'sila

Département : Génie Electrique

Cours du module Math 3

Par

Kehali Salima

Pour

Deuxième année Licence

Contenu du Cours

Séries de Fourier

Transformation de Fourier

Transformation de Laplace

Chapitre 01 : Séries de Fourier

1 Séries trigonométriques

Définition

Une fonction f définie sur un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ est dite **périodique** de période $T \in \mathbb{R}^*$ (ou T-**périodique**) si pour tout $x \in D$, on a $x + T \in D$ et

$$f(x+T) = f(x).$$

Exemple

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$ est 2π-périodique car $\sin(x+2\pi) = \sin x$.

Définition

On appelle série **trigonométrique** réelle, toute série de fonctions de la forme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right] \tag{1}$$

avec $x \in \mathbb{R}$, $\omega > 0$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Les nombres a_0, a_n, b_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont appelées **coefficients** de cette série.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Par un changement de variable, ces coefficients peuvent s'écrire

$$a_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \qquad b_n = \frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{-\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}} f(x)\sin(n\omega x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

En particulier si $\omega = 1$, cas des fonctions 2π-périodique

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

La série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\cos(nx)$ est une série trigonométrique avec $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = 0$ et $\omega = 1$.

2 Séries de Fourier

2.1 Séries de Fourier de fonctions 2π-périodiques

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$. On suppose que $\int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} |f(t)|\, dt$ converge pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Définition

On appelle **série de Fourier** associée à f, la série trigonométrique notée σf où

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Les coefficients a_n et b_n sont appelés **coefficients de Fourier** de la fonction f.

Si la fonction f n'est pas donnée explicitement sur $[0, 2\pi]$, mais sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, dans ce cas le calcul des coefficients de Fourier de f s'effectue sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarque

- Si la fonction f est paire $a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$ et $b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}$.
- Si la fonction f est impaire $a_n = 0$ et $b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}$.

Exemple

Soit f la fonction 2π-périodique définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ 0 & \text{si } x \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[. \end{cases}$$

La fonction étant paire, ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$b_n = 0,\ a_0 = 1 \text{ et } a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}.$$

Par conséquent sa série de Fourier est

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n}\cos(nx) = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{\pi}(-1)^n \frac{\cos((2n+1)x)}{2n+1}. \blacksquare$$

Théorème (de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période $T = 2\pi$ satisfaisant aux conditions suivantes (appelées conditions de Dirichlet) :

D1) *En tout point x_0, les limites de f à droite et à gauche de x_0 existent et les discontinuité de f sont en nombre fini dans tout intervalle fini.*

D2) *f admet en tout point une dérivée à droite et une dérivée à gauche.*

Alors la série de Fourier associée à f est convergente et on a :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right] = \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2} & \text{si } f \text{ est discontinue en } x \end{cases}.$$

De plus la convergence est uniforme sur tout intervalle où la fonction f est continue.

Les notations $f(x+0)$ et $f(x-0)$ représentent respectivement les limites à droite et à gauche de f au point x.

Exemple

Soit $f :]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique, $T = 2\pi$ définie par $f(x) = x$.

1. Les discontinuités de f sont les points de la forme $x_k = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et $f(x_k + 0) = -\pi$, $f(x_k - 0) = \pi$.

2. f est partout dérivable sauf aux points x_k. En ces points nous avons :

$$\lim_{x \to \pi^-} \frac{f(x) - f(\pi - 0)}{x - \pi} = 1 \text{ et } \lim_{x \to \pi^+} \frac{f(x) - f(\pi + 0)}{x - \pi} = 1.$$

   f vérifie les conditions de Dirichlet, donc sa série de Fourier associée est convergente.

f est impaire donc $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi x \sin(nx)\, dx = 2\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ et par suite

$$\sigma f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq (2k+1)\pi, \; k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{si } x = (2k+1)\pi, \; k \in \mathbb{Z} \end{cases}. \quad \blacksquare$$

2.2 Séries de Fourier d'une fonction de période arbitraire

Soit f une fonction périodique de période $T = 2l$. Pour la développer en série de Fourier sur l'intervalle $[-l, l]$ faisons le changement de variable $x = \frac{lt}{\pi}$. La fonction $g(t) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ sera une fonction 2π-périodique de t, car

$$g(t + 2\pi) = f\left(\frac{l(t + 2\pi)}{\pi}\right) = f\left(\frac{lt}{\pi} + 2l\right) = f\left(\frac{lt}{\pi}\right) = g(t).$$

Alors, on peut la développer en séries de Fourier sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$. En retournant à la variable x, en posant $t = \frac{\pi x}{l}$, on obtient

$$\sigma f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right],$$

avec

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{et} \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exemple

Développer en séries de Fourier la fonction 2-périodique f définie par $f(x) = |x|$ sur l'intervalle $[-1, 1]$. Comme cette fonction est paire, on a $b_n = 0$.

$$a_0 = \frac{2}{1}\int_0^1 x dx = 1, \; a_n = \frac{2}{1}\int_0^1 x\cos(n\pi x)\, dx \Rightarrow \begin{cases} a_{2n} = 0, \\ a_{2n+1} = \dfrac{-4}{\pi^2 (2n+1)^2}. \end{cases}$$

Alors,

$$\sigma f(x) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n+1)\pi x)}{(2n+1)^2} = f(x). \blacksquare$$

2.3 Séries de Fourier de fonctions non périodiques

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction non périodique définie sur l'intervalle $[a, b]$, on prolonge f en une fonction g périodique de période $T \geq b - a$ telle que la fonction g satisfait les conditions de Dirichlet.

Exemple

Donner une série de Fourier de période 2π qui coïncide sur $]0, \pi[$ avec la fonction $f(x) = e^x$.

a) Choisissons un prolongement pair et posons $f_1(x) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ e^x & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = 2\dfrac{e^\pi - 1}{\pi}$, $a_n = 2\dfrac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1}$ et $b_n = 0$.

On a alors :

$$\sigma f_1(x) = \frac{e^\pi - 1}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} 2\frac{(-1)^n e^\pi - 1}{n^2 + 1} \cos(nx) = \begin{cases} e^{-x} & \text{si} \quad x \in [-\pi, 0] \\ e^x & \text{si} \quad x \in [0, \pi] \end{cases}.$$

b) Choisissons un prolongement impair et posons $f_2(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ e^x & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\end{cases}$.

Dans ce cas les coefficients sont $a_0 = a_n = 0$ et $b_n = 2n\dfrac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi(n^2 + 1)}$.

On a alors :

$$\sigma f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\frac{1 - (-1)^n e^\pi}{\pi(n^2 + 1)} \sin(nx) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ e^x & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pm\pi \end{cases}.$$

2.4 Égalité de Parseval

Théorème

Soit f une fonction développable en série de Fourier et de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} > 0$, alors on a

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$$

Remarque

Si f est de période 2π, on a :

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(x\right)\right)^2 dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(f\left(x\right)\right)^2 dx.$$

Exemple

Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \in]-\pi, 0[\\ 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\end{cases}$.

f étant une fonction impaire donc $a_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on a

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = \frac{2}{n\pi}(1-(-1)^n) \Rightarrow \begin{cases} b_{2n} = 0, \\ b_{2n+1} = \dfrac{4}{\pi(2n+1)}. \end{cases}$$

La série de Fourier associée est : $\sigma f(x) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin((2n+1)x)}{2n+1} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in]0, \pi[\\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \text{ ou } x = \pi \end{cases}$.

- Pour $x = \dfrac{\pi}{2}$ on a $\sigma f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{\sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)}{2n+1} = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1}$. On tire

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}.$$

- Appliquons l'égalité de Parseval : $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}(f(x))^2\,dx = 2 = \dfrac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+1)^2}$ et l'on tire donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}.$$

- Posons $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ série convergente d'après le critère de Riemann. En séparant les pairs et les impairs on a

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{4}S + \frac{\pi^2}{8} \Rightarrow S - \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{8}.$$

On tire alors

$$S = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}. \blacksquare$$

3. Transformation de Fourier :

1. Définitions :

A. Transformée de Fourier :

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction absolument intégrable sur l'ensemble des réels. On définit la transformée de Fourier de f la fonction notée

$$\mathcal{F}(f) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

Par:

$$\mathcal{F}(f(t))(\alpha) = \hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt.$$

Exemples :

✓ Calculer la transformée de Fourier de la fonction (dite signal porte) définie par

$$\pi(t) = \begin{cases} 1 \ si \ t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 \ si \ non \end{cases}$$

On a

$$\mathcal{F}(\pi(t))(\alpha) = \hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-i\alpha t} dt$$

D'où

$$\mathcal{F}(\pi(t))(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(\frac{\alpha}{2})}{\frac{\alpha}{2}}$$

✓ Calculer la transformée de Fourier de la fonction

$$f(t) = e^{-|t|}$$

On a

$$\mathcal{F}\big(f(t)\big)(\alpha) = \hat{f}(\alpha) \qquad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} e^{-i\alpha t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^{0} e^{t} e^{-i\alpha t} dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t} e^{-i\alpha t} dt \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\lim_{a \to -\infty} \left[\frac{e^{t(1-i\alpha)}}{1-i\alpha} \right]_{a}^{0} + \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{e^{-t(1+i\alpha)}}{1+i\alpha} \right]_{0}^{b} \right)$$

D'où

$$\mathcal{F}\big(e^{-|t|}\big)(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\alpha^2 + 1}$$

B. Transformée de Fourier inverse :

La transformée inverse d'une fonction $\hat{F}(\alpha)$ est définie par la formule de réciprocité de Fourier :

$$\mathcal{F}^{-1}\left(\hat{F}(\alpha)\right)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{F}(\alpha)e^{i\alpha t}d\alpha$$

$$= \begin{cases} f(t) si\ f\ est\ continue\ en\ t \\ \dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}\ si\ non \end{cases}$$

(On suppose que$f(t+0) et\ f(t-0) existent$)

C. « Sinus et Cosinus -transformées de Fourier:

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolument intégrable sur l'ensemble des réels.

- On appelle Sinus-transformée de Fourier de la fonction$f$, la fonction définie par :

$$\hat{F}_s(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t) sin\alpha t\ dt$$

Sa transformée inverse (dite inverse de sinus-transformée) est donnée par

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{F}_s(\alpha) sin\alpha t\ d\alpha.$$

- On appelle Cosinus-transformée de Fourier de , la fonction définie par :

$$\hat{F}_c(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} f(t) cos\alpha t\ dt$$

Sa transformée inverse (dite inverse de sinus-transformée) est donnée par

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \hat{F}_c(\alpha)\ cos\alpha t\ d\alpha.$$

- Si f est une fonction paire alors

$$\hat{F}(\alpha) = \hat{F}_c(\alpha)$$

En effet, on a

$$\hat{F}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\alpha t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)(\cos(\alpha t) - \mathrm{i} \sin(\alpha t))\, dt$$

- Si f est une fonction impaire alors

$$\hat{F}(\alpha) = -i\hat{F}_s(\alpha)$$

Chapitre 02 : Transformation de Laplace

I. Transformation de Laplace :

1. Définitions et conditions d'existence :

- **Définition 01 :** une fonction f est dite d'ordre exponentiel, si on peut trouver une constante réelle M et $\alpha > 0$ $tels\ que$ $|f(t)| < Me^{\alpha t}, \forall t > T.$
- **Définition 02 :** Soit $f : \mathbb{R}^{+} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. On appelle transformée de Laplace de la fonction f, la fonction : $F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt; p \in \mathbb{C}.$

Transformée de Laplace

Espace vectoriel des fonctions du temps $\xrightarrow{\mathfrak{L}}$ Espace vectoriel des fonctions de phase

$$f(t) \qquad\qquad F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}.f(t).dt$$

- **Conditions d'existence :** F(p) est définie par une intégrale généralisée, donc il faut que :
  - F soit continue par morceaux sur $\mathbb{R}^{+}$.
  - $\exists \beta \in]0,1[$ $tel\ que$ $\lim_{t\to 0} t^{\beta}|f(t)| = 0$
  - La fonction f est d'ordre exponentiel : $|f(t)e^{-pt}| \leq Me^{-(Rep-\alpha)t}$ or $\int_0^{+\infty} e^{-(Rep-\alpha)t}dt$ converge pour $Re(p) > \alpha$.

- **Remarques :** Certaines fonctions ne possèdent pas de transformée de Laplace, par exemple la fonction $f(t) = \frac{1}{t}$ qui ne respecte pas la deuxième condition d'éxistence, ou $f(t) = e^{t^2}$ qui n'est pas d'ordre exponentielle.
- **Problème :** Comment déterminer le meilleur α pour que l'intégrale converge ?. On admet le théorème suivant :

Théorème : Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ fonction continue.

1) $\exists!\, a \in \overline{\mathbb{R}}, Re(p) > a \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge simplement

   $Re(p) < a \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ diverge.

2) $\exists!\, b \in \overline{\mathbb{R}}, Re(p) > b \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ converge absolument

   $Re(p) < b \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt$ ne converge pas absolument.

- **Exemples :**

a) Soit la fonction de Heaviside : $U(t) = \begin{cases} 1 \; si \; t \geq 0 \\ 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$

$$\mathcal{L}\big(U(t)\big)(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p}, \qquad si\; Re(p) > 0.$$

b) Soit $f(t) = U(t)e^{\alpha t} = \begin{cases} e^{\alpha t} \; si \; t \geq 0 \\ 0 \; si \; t < 0 \end{cases}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t))(p) = \int_0^{+\infty} e^{\alpha t}\, e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p-\alpha}, \qquad si\; Re(p) > Re(\alpha).$$

c) Soit $f(t) = \begin{cases} t^{\alpha} \; si \; t > 0 \\ 0 \; si \; t \leq 0 \end{cases}$ $avec\; \alpha > -1$

$$F(p) = \mathcal{L}\big(f(t)\big)(p)$$

$$= \int_0^{+\infty} t^{\alpha}\, e^{-pt}\,dt = \left(\begin{matrix} u = pt \\ du = pdt \end{matrix} \right) = \frac{1}{p^{\alpha+1}} \int_0^{+\infty} u^{\alpha} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}, Re(p) > 0.$$

2. Propriétés :

a. **Linéarité :** Soient $f, g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ deux fonctions admettant des transformées de Laplace F(p) et G(p), et soient α *et* β deux réels ; alors

$$\mathcal{L}(\alpha f + \beta g)(p) = \alpha\mathcal{L}(f)(p) + \beta\mathcal{L}(g)(p).$$

Exemple : Grace à cette propriété, on peut déterminer la transformée de sinus et cosinus :

$$\cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} \Longrightarrow \mathcal{L}(\cos(at))(p) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) + \mathcal{L}(e^{-iat})\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-ia} + \frac{1}{p+ia}\right]$$

d'où $\mathcal{L}(\cos(at))(p) = \frac{p}{p^2+a^2}$

Et

$$\sin(at) = \frac{e^{iat}-e^{-iat}}{2i} \Longrightarrow \mathcal{L}(\sin(at))(p) = \frac{1}{2i}\left[\mathcal{L}(e^{iat}) - \mathcal{L}(e^{-iat})\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-ia} - \frac{1}{p+ia}\right]$$

d'où $\mathcal{L}(\sin(at))(p) = \frac{a}{p^2+a^2}$

b. **Transformée d'une translation :** Soit $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F(p). On note

$$f_a(t) = \begin{cases} f(t-a) \, si \; t \geq a \\ 0 \; si \; t < a \end{cases}$$

Alors

$$\mathcal{L}(f_a)(p) = \int_0^{+\infty} f(t-a)\, e^{-pt}\, dt = \begin{pmatrix} u = t-a \\ du = dt \end{pmatrix} = e^{-ap}F(p)$$

c. **Transformée d'une homothétie :** Soit $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction admettant une transformée de Laplace F(p), et soit $k>0$.

$$\mathcal{L}(f(kt))(p) = \int_0^{+\infty} f(kt)\,e^{-pt}\,dt = \left(\begin{matrix} u = kt \\ du = kdt \end{matrix}\right) = \frac{1}{k}\mathcal{L}(f(t))\left(\frac{p}{k}\right) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$$

d. **Transformée d'une dérivée :** Soit $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction continument dérivable et admettant une transformée de Laplace F(p),

$$\mathcal{L}(f'(t))(p) = \int_0^{+\infty} f'(t)e^{-pt}dt = \left(\begin{matrix} u'(t) = f'(t) & u(t) = f(t) \\ v(t) = e^{-pt} & v'(t) = -pe^{-pt} \end{matrix}\right)$$
$$= pF(p) - \lim_{t\to 0^+} f(t) = pF(p) - f(0^+)$$

Proposition : Soit $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ une fonction vérifiant :

- $f \in C^n(\mathbb{R}^+,\mathbb{C})$
- $\exists M>0 \; et \; a \; réel \; tel \; que \; \forall k \leq n \; on \; a \; \left|f^{(k)}(t)\right| \leq Me^{at}$, alors

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(p) = p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{k-1} f^{(n-k)}(0^+)$$

e. **Transformée de l'intégrale $\int_0^t f(u)du = h(t)$:**

On a $h'(t) = f(t)$, d'où :

$$F(p) = \mathcal{L}(h'(t))(p) = pH(p) - ph(0^+)$$

mais $h(0) = 0$, donc

$$H(p) = \frac{F(p)}{p}$$

Plus généralement :

$$\mathcal{L}(\underbrace{\int_0^t \int_0^t \dots \int_0^t f(u)du}_{n \; fois}) = \frac{F(p)}{p^n}.$$

3. Transformée inverse :

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de F ; on a alors $\mathcal{L}^{-1}\left(F(p)\right) = f(t)$. La définition mathématique de la transformée de Laplace inverse se base sur une intégrale de contour dans le plan complexe, l'utilisation de cette définition exige une connaissance de l'Analyse complexe.

En pratique :

- On détermine la transformée inverse de F(p) directement de la table.
- Il faut d'abord exprimer ou décomposer F(p) en une somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table.
- Utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- S'il y a des retards, les traiter en premier,séparément.
- Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples. Pour les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en sinus ou en cosinus.

- **Exemples :**

1) $F(p) = \frac{3p+7}{p^2-2p-3} = \frac{4}{p-3} - \frac{1}{p+1}$ *donc* $f(t) = (4e^{3t} - e^{-t})U(t)$

2) $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p+1}$ *donc* $f(t) = e^{-(t-2)}U(t-2)$

3) $F(p) = \frac{3p+1}{(p-1)(p^2+1)} = \frac{2}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2+1}$ *donc* $f(t) = 2e^t - 2\cos t + \sin t.$

4. Applications :

A. Résolution des équations différentielles :

Soit donnée une équation différentielle linéaire d'ordre n à coefficients constants

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = f(t)$$

On demande de trouver la solution de cette équation $y = y(t) pour\ t \geq 0$ et vérifiant les conditions initiales : $y(0) = y_0, y'(0) = y_0', \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. On cherche la transformée de Laplace des deux membres de l'équation :

$$\mathcal{L}\left(a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y\right) = \mathcal{L}(f(t))$$

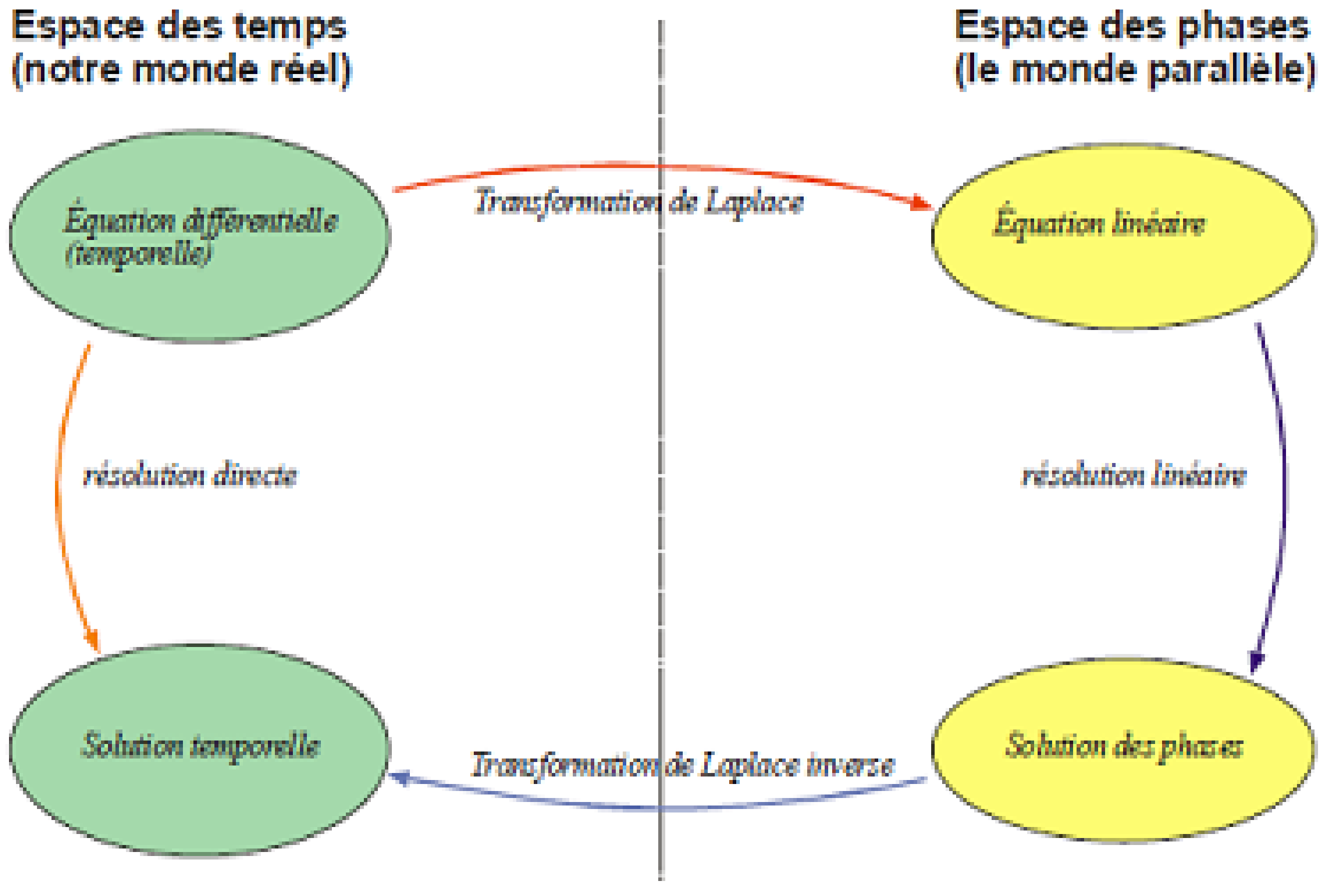
En utilisant les propriétés de linéarité

$$a_0 \mathcal{L}(y^{(n)})(p) + a_1 \mathcal{L}(y^{(n-1)})(p) + \cdots + a_{n-1} \mathcal{L}(y')(p) + a_n \mathcal{L}(y)(p) = \mathcal{L}(f(t))(p)$$

Sachant que

$$\mathcal{L}\left(f^{(k)}(t)\right)(p) = p^k F(p) - \sum_{l=1}^{k} p^{l-1} f^{(k-l)}(0^+)$$

La transformée de Laplace permet de convertir une équation différentielle en une équation algébrique, dont la solution est la transformée de la solution $y(t)$ de notre équation différentielle Pour finir, on utilise la transformée de Laplace inverse pour déterminer la solution.



Exemple : Résoudre $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 4e^{3t}$, *avec* $x(0) = 4, x'(0) = 9$. On a

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{L}(x) = X \\ \mathcal{L}(x') = pX - x(0) \\ \mathcal{L}(x'') = p^2X - px(0) - x'(0) \end{array}\right\} \Rightarrow l'\acute{e}quation\ devient\ (p^2 - 3p + 2)X = \frac{4}{p-3} + 4p - 3$$

D'où $X = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} + \frac{2}{p-3} = \mathcal{L}(e^t + e^{2t} + 2e^{3t})(p)$

Exemple : Soit le système différentiel à résoudre :

$$(S)\begin{cases} x' - y' + x - y = 2 + 3e^{2t} \\ x' + 2y' - 3x = -3 + 2e^{2t} \\ x(0) = 4, y(0) = 1 \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 4 - pY + 1 + X - Y = \dfrac{2}{p} + \dfrac{3}{p-2} \\ pX - 4 + 2pY - 2 - 3X = \dfrac{-3}{p} + \dfrac{2}{p-2} \end{cases}$$

D'où : $\begin{cases} X = \frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{2}{p-2} \\ Y = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x(t) = 1 + e^t + 2e^{2t} \\ y(t) = -1 + e^t + e^{2t} \end{cases}$

Table des transformées de Laplace

$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$
$U(t)$	$\frac{1}{p}$
$t^n U(t), n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$t^\alpha\ U(t), \alpha > -1$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$
$e^{\alpha t} U(t)$	$\frac{1}{p-\alpha}$
$\sin(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2+a^2}$
$\cos(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2+a^2}$
$\mathrm{sh}(at)\ U(t)$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\mathrm{ch}(at)\ U(t)$	$\frac{p}{p^2-a^2}$

Propriétés	
$f(t-a)$	$e^{-ap}F(p)$
$e^{-at}f(t)$	$F(p+a)$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F(\frac{p}{a})$
$\int_0^t f(s)ds$	$\frac{F(p)}{p}$
$f'(t)$	$pF(p)-f(0^+)$
$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p)-\sum_{k=1}^{n}p^{k-1}f^{(n-k)}(0^+)$
$t^n f(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty}F(u)du$
f *de période* T	$\frac{1}{1-e^{-pT}}\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$
$(f*g)(t)=\int_0^t f(s)g(t-s)ds$	$F(p)G(p)$
$Si \lim_{t\to 0\ ou +\infty} f(t)\ existe \Rightarrow$	$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{p\to 0} pF(p)$ $\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{p\to+\infty} pF(p)$