Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach et de Hilbert

L'objet de ce chapitre est de rappeler quelques notions de base des espaces de Banach (norme, distances associée, boules, équivalence des normes), puis on introduire aussi à les espaces de Hilbert, qui sont des espaces vectoriels sur lesquels on peut définir une norme complète et une notion d'angle, donc d'orthogonalité.

Dans tout ce chapitre, les espaces vectoriels considérés seront des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$. On déesignera toujours par $\overline{\lambda}$ le conjugué d'un nombre λ, et par $\operatorname{Re}\lambda$ et $\operatorname{Im}\lambda$ ses parties réelle et imaginaire.

1.1 Espaces de Banach

1.1.1 Normes

Définition 1.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{k}$ ($\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C}$). Une norme sur E est une fonction $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$, définie sur E à valeurs dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, vérifiant les quatre propriétés suivantes :*
1°- $\forall u \in E : \|u\| \geq 0$ [positivité]
2°- un élément u de E vérifie $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$
3°- $\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k} : \|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$ [homogénéité]
4°- $\forall u \in E, \forall v \in E : \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ [inégalité triangulaire]
Pour $u \in E$ donné, le nombre réel ≥ 0, $\|u\|$ est appelé norme de u.

Remarque 1.1.1 • *Une application $\|.\|$ de E vérifiant les propriétés 1°,3° et 4°, mais pas nécessairement la propriété 2°, est appelée une semi-norme sur E.*

• *Pour tout $u \in E$: $\|-u\| = \|(-1)u\| = |(-1)| \|u\| = \|u\|$.*

• *Soit $\lambda \in \mathbb{k}$ tel que $|\lambda| \neq 1$, alors:*

$$\|0\| = \|\lambda.0\| = |\lambda| \|0\| \Rightarrow (1 - |\lambda|) \|0\| = 0 \Rightarrow \|0\| = 0$$

1.1.2 Espaces vectoriels normés

Définition 1.1.2 *Un espace vectoriel normé réel [resp. complexe] est un couple constitué par un espace vectoriel E réel [complexe] et par une norme $\|\cdot\|$ sur l'espace vectoriel E.*

Définition 1.1.3 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{k}$, et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. On associe à cette norme une distance d sur E par la formule :*

$$\forall u \in E, \forall v \in E : d(u, v) = \|u - v\|$$

Cette distance est dite la distance associée à la norme $\|.\|$.

On vérifie que d est une distance sur E:

· La positivité

$$d(u, v) = \|u - v\| \geq 0.$$

· La séparabilité

$$\forall u, v \in E : d(u, v) = 0 \Longleftrightarrow \|u - v\| = 0 \Longleftrightarrow u = v$$

· la propriété triangulaire

$$\forall u, v, w \in E : d(u, w) = \|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\| = d(u, v) + d(v, w)$$

Cette distance est appellé la distance associée a la norme $\|\cdot\|$. En plus des trois propriétés définissant les distances, la fonction d est invariante par translation :

$$\forall x, y, z \in E : d(x + z, y + z) = d(x, y)$$

et homogène de degré un :

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \Bbbk : d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x, y)$$

La deuxième inégalité triangulaire pour d peut s'écrire en termes de norme :

$$\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Dans tout ce qui suit, on munit l'e.v.n. E de la topologie associée a la distance d: Notons que les boules et les sphères peuvent se définir en termes de norme :

♦ la boule ouverte $B_E(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r est égale à $\{x \in E : \|x - x_0\| < r\}$;

♦ la boule ouverte $\overline{B}_E(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r est égale à $\{x \in E : \|x - x_0\| \leq r\}$;

♦ la sphère $S_E(x_0, r)$ de centre x_0 et de rayon r est égale à $\{x \in E : \|x - x_0\| = r\}$.

On abrégera souvent espace vectoriel normé en e.v.n. Un e.v.n. sera noté $(E, \|\cdot\|)$, ou $E_{\|\cdot\|}$.

Définition 1.1.4 *Soit $(E, || \cdot ||)$ un e.v.n. et soit F un sous-espace vectoriel de E. La restriction $|| \cdot ||_F$ de la norme $|| \cdot ||$ à F est une norme sur F. Le couple $(F, \|\cdot\|_F)$ est appelé sous-espace vectoriel normé de $(E, || \cdot ||)$.*

Définition 1.1.5 *Deux normes sur un même espace vectoriel E seront dites équivalentes si les distances associées sont équivalentes. Soit : $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes ssi il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que :*

$$\forall u \in E : \alpha \|\cdot\|_1 \leq \|\cdot\|_2 \leq \beta \|\cdot\|_1$$

Exemple 1.1.1 *On considère $E = \mathbb{R}^n$ comme l'espace vectoriel produit : $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times .. \times \mathbb{R}$, n fois, chaque exemplaire de $\mathbb{R}$ étant muni de la norme usuelle, i e. la valeur absolue. On obtient grâce à ce qui précède les normes holdériennes sur $\mathbb{R}^n$: pour tout $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout p réel > 1*

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|^p$$

L'inégalité triangulaire

$$\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

qui n'est pas triviale si $p > 1$ est appelée aussi inégalité de Minkowski.

L'inégalité de Minkowski se montre a l'aide de l'inégalité de Hölder valable sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

où $1 \leq p \leq +\infty$ et q est l'exposant conjugué de p défini par la relation

$$1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

(avec la convention $\frac{1}{\infty} = 0$).

Le cas $p = q = 2$ n'est autre que l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le cas général repose sur l'inégalité de Young :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ : ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

En effet, si l'on écarte les cas triviaux où x ou y est nul, on peut diviser par $\|x\|_p \|y\|_q$ et l'on a, d'aprés l'inégalité de Young :

$$\frac{|x_i|}{\|x\|_p} \frac{|y_i|}{\|y\|_q} \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{q} \|y\|_q^q, \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Revenons à la preuve de l'inégalité de Minkowski. En appliquant deux fois l'inégalité de Hölder, on obtient :

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} |y_i| \, |x_i + y_i|^{p-1} \\
&\leq \|x\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} + \|y\|_p \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \|x+y\|_p^{p-1}
\end{aligned}$$

ce qui donne par la division sur $\|x+y\|_p^{p-1}$ l'égalité demandée

$$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Exemple 1.1.2 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$; on peut munir l'ensemble $\ell^p(\mathbb{k})$ des suites de $\mathbb{k}$ de puissance p-i eme sommable d'une structure d'espace vectoriel normé en posant :*

$$\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{+\infty} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ et } \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i|$$

L'inégalité triangulaire se démontre comme dans l'exemple précédent en faisant tendre n vers l'infini.

Exemple 1.1.3 *Soit* $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ *l'espace vectoriel réel de toutes les fonctions* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *qui sont continues sur* $[a,b] (a < b)$.
Les fonctions

$$\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{R} \\ f & \to & \|f\| \end{array}$$

suivante:

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_1 & = & \int_a^b |f(t)|\, dt \\ \|f\|_2 & = & \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|f\|_\infty & = & \max\limits_{a \le t \le b} |f(t)| \end{array}$$

définissent trois normes usuelles sur E *appelées respectivement :*
norme de la moyenne, norme de la moyenne quadratique, norme uniforme.

Proposition 1.1.1 *La norme est une application uniformément continue.*

Preuve. On a

$$\forall x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \le \|x - y\|$$

donc la norme est une fonction 1-lipschitzienne. Comme toute fonction 1-lipschitzienne (donc 1-Höldérienne) est uniformément continue, alors la norme est continue. ∎

1.1.3 Espaces normés de dimension finie

Théorème 1.1.1 *Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*
Dans un espace normé, tout sous-espace de dimension finie est fermé.

1.1.4 Espace de Banach

Définition 1.1.6 *On appelle espace de Banach un espace vétoriel normé complet.*

Exemple 1.1.4 • *Tout espace véctoriel normé de dimension finie est (en particulier $\mathbb{R}^n$) est un espace de Banach.*

• $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ *est un espace de Banach pour la norme* $\|\cdot\|_\infty$ *mais pas pour la norme* $\|\cdot\|_1$ *.(étudier par exemple la suite* $f_n(x) = \begin{cases} nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$ *)*

1.2 Espaces de Hilbert

Soit H un espace vectoriel **complexe** et φ une application de $H \times H$ dans $\mathbb{C}$:

Définition 1.2.1 *On dit que φ est une forme hermitienne définie positive sur H, si φ vérifie*

a) $\varphi(\alpha x + \beta \grave{x}, y) = \alpha\varphi(x,y) + \beta\varphi(\grave{x}, y)$ *pour* $x, \grave{x}, y \in H$ *et* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*(linéarité en x)*

b) $\varphi(x,y) = \overline{\varphi(y,x)}$ $\forall x, y \in H$ *(symétrie hermitienne)*

c) $\varphi(x,x) \geq 0$ $\forall x \in H$*(positivité)*

d) $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *(positivité sticte).*

• On notera que l'application $x \rightarrow \varphi(x,y)$ où y étant fixé est aussi linéaire dans la seconde variable, il est "bilinéaire symétrique". On dit aussi (propriété (d)) qu' il est défini positif.

Remarque 1.2.1 *Comme une conséquonce de (a) et (b) on a l'antilinéaire par rapport a la deuxième variable*

$$\varphi(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha}\varphi(x,y) + \overline{\beta}\varphi(x,y) \text{ pour } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Lemme 1.2.1 *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit φ est une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel H, alors*

$$\forall x, y \in H \quad |\varphi(x,y)|^2 \leq \varphi(x,x) \cdot \varphi(y,y)$$

Preuve. *Soient $x, y \in H$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On a*

$$0 \leq \varphi(\lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y) = |\lambda|^2 \varphi(x,x) + |\mu|^2 \varphi(y,y) + \lambda\overline{\mu}\varphi(x,y) + \overline{\lambda}\mu\overline{\varphi(x,y)}$$

Supposons λ *réel et prenons* $\mu = \varphi(x,y)$ *; alors l'inégalité précédente devient*

$$P(\lambda) = \lambda^2\varphi(x,x) + 2\lambda\left|\varphi(x,y)\right|^2 + \left|\varphi(x,y)\right|^2\varphi(y,y) \geq 0$$

Comme cette inégalité a lieu pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$*, le discriminant du polynôme du second degré en* λ*,* $P(\lambda)$*, est négatif ou nul. Ce qui donne l'inégalité cherchée*

$$\left|\varphi(x,y)\right|^2 \leq \varphi(x,x)\varphi(y,y)$$

■

Théorème 1.2.1 *Soit* φ *est une forme hermitienne définie positive sur un espace vectoriel* H*, alors* H *est un espace vectoriel normé*

$$\|x\| = \sqrt{\varphi(x,x)} \text{ pour tout } x \in H.$$

muni de cette norme H est appelé espace ***préhilbertien***
Si l'espace préhilbertien est complet, il est appelé espace de ***Hilbert****. Dans ce qui suivera* $\varphi(x,y)$ *sera notée* $< x,y >$ *.*

Preuve. *Simple.* ■

1.2.1 Exemples

1) $\mathbb{R}^n$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$< x,y >= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \quad \text{pour tout} \quad x = (x_1,...,x_n), y = (y_1,...,y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2) ℓ_2 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$< (x_n)_n, (y_n)_n >= \sum_{n=1}^{+\infty} x_n\overline{y_n} \quad \text{pour tout} \quad (x_n)_n, (y_n)_n \in \ell_2.$$

3) $L^2(\mu)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$< f,g >= \int f\overline{g}\mathrm{d}\mu \text{ pour tout } f,g \in L^2(\mu).$$

Remarque 1.2.2 *On peut aussi définir une distance d sur H par*

$$d(x,y) = \|x-y\| = \sqrt{< x-y, x-y >} \text{ pour tout } x,y \in H.$$

1.2.2 Projection orthogonale

Définition 1.2.2 *Deux vecteurs x et y sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul, c-à-dire:*

$$< x, y >= 0$$

Il revient au même de dire qu' ils satisfont au théorème de ***Pythagore***

$$< x, y >= 0 \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Définition 1.2.3 *Soit $x \in H$, on appelle orthogonal de x noté $x^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à x. Si F un sous-ensemble non vide quelconque de H, on appelle orthogonal de F noté $F^\perp$ l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.*

$$F^\perp = \{x \in H : \forall y \in H, < x, y >= 0\}$$

Il est immédiat que

$$F^\perp = \underset{x \in F}{\cap} x^\perp$$

C'est un sous-espace fermé de H.

Proposition 1.2.1 *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel.*
a) Pour tour $A \subset H$, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.
b) $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.
c) $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
d) $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.

Lemme 1.2.2 ***(Lemme de la médiane ou du parallélogramme)*** *pour tous vecteurs $x, y \in H$, on a*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Preuve. Il suffit de remarquer que, par définition de la norme, on a

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + < x, y > + < y, x > + \|y\|^2$$

et

$$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - < x, y > - < y, x > + \|y\|^2$$

Il est clair qu'additionner les deux égalités donne l'identité du parallélogramme.
Si x et y sont orthogonaux on retrouve l'égalité de Pythagore : ■

1.2.3 Théorème de la projection orthogonale

Théorème 1.2.2 *Soient H un espace préhilbertien H et F une partie convexe complète de H. Si $x \in H$,*

(i) il existe un vecteur $x_0 \in F$ qui réalise la distance de

$$d(x, F) = \inf_{z \in F} \|x - z\| = \|x - y\| .$$

ii) $\forall z \in A$, on a

$$\mathrm{Re} < x - x_0, x_0 - z > \text{ est positive ou nulle}$$

iii) Le vecteur x_0 est unique

On écrit $x_0 = P_F(x)$. De plus x_0 est le seul point de F vérifier $x - x_0 \in F^{\perp}$.

Corollaire 1.2.1 *Soit F un sous-espace vectoriel fermé de H. Pour tout $x \in H$, la projection de x sur F est l'unique point p_x de F tel que $x - p_x \in F^{\perp}$.*

1.2.4 Bases hilbertiennes

Définition 1.2.4 *Soit H un espace préhilbertien. On dit qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de H est orthogonale si l'on a*

$$\forall i, j \in I : i \neq j \text{ alors } < x_i, x_j >= 0.$$

On dit que $(x_i)_{i \in I}$ est orthonormale si elle est orthogonale et si de plus $\|x_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.

Proposition 1.2.2 *Soit $(e_1, ..., e_n)$ une famille orthonormale de H et $v \in Vect(e_1, ..., e_n)$. Alors*

$$v = \sum_{i=1}^{n} < v, e_i > e_i$$

Preuve. Soit $v \in Vect(e_1, ..., e_n)$. Alors il existe $(v_1, ..., v_n)$ tels que

$$v = \sum_{i=1}^{n} v_i e_i.$$

D'autre part

$$< v, e_j >= \sum_{i=1}^{n} v_i < e_i, e_j >= v_i.$$

■

Les familles orthonormales vérifient l'inégalité de Bessel suivante.

Proposition 1.2.3 *(inégalité de Bessel). Soient $(H, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans H. Pour tout $x \in H$, la famille $\left(|<x, e_i>|^2\right)_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{R}^+$ et on a*

$$\sum_{i\in I} |<x, e_i>|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Définition 1.2.5 *Une partie F d'un espace de Hilbert H est dite totale si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de F est dense dans H.*

Définition 1.2.6 *Soit H un espace préhilbertien. Une famille orthonormale totale de H est appelée base hilbertienne de H.*

Voici quelques propriétés d'une base hilbertienne.

Théorème 1.2.3 *(égalité de Parseval). Soient $(H, <.,.>)$ un espace préhilbertien et $(e_i)_{i\in I}$ une famille orthonormale dans H. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
(a) $(e_i)_{i\in I}$ est une base hilbertienne de H.
(b) Pour tout $x \in H$, la famille

$$\sum_{i\in I} |<x, e_i>|^2 \leq \|x\|^2 .$$

(c) Pour tout $x \in H$, la famille $(<x, e_i> e_i)_{i\in I}$ est sommable dans H et on a :

$$x = \sum_{i\in I} <x, e_i> e_i$$

(d) Pour tout $x, y \in H$, la famille $(<x, e_i> \overline{<y, e_i>})_{i\in I}$ est sommable dans $\mathbb{k}$ et on a :

$$<x, y> = \sum_{i\in I} <x, e_i> \overline{<y, e_i>}$$

Théorème 1.2.4 *Tout espace de Hilbert admet une base hilbertienne.*
De plus, tout système orthonormé d'un espace de Hilbert est contenu dans une base hilbertienne.

Théorème 1.2.5 *Tout espace de Hilbert est isométrique à un espace $\ell_2(I)$.*

1.3 Quelques exercices corrigés

Exercice 1.3.1 *Soient a, b deux réels strictement positifs. Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on note :*

$$\|u\| = \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}$$

1. Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la boule unité pour cette norme.

3. Déterminer $\alpha, \beta > 0$ tel que :

$$\forall u \in \mathbb{R}^2, \beta \|u\|_2 \leq \|u\| \leq \alpha \|u\|_2 ,$$

où $\|.\|_2$ désigne la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

4. Conclure

Solution 1.3.1 *1. $\|.\|$ est une norme*

a)- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| \geq 0$, et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

b)- Pour tout $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \|\lambda u\| &= \sqrt{a^2\lambda^2x^2 + b^2\lambda^2y^2} \\ &= |\lambda| \|u\| . \end{aligned}$$

c)- Soient $u = (x, y)$ et $v = (z, t)$ deux éléments de $\mathbb{R}^2$, on a

$$\|u + v\| = \sqrt{a^2x^2 + 2axz + a^2y^2 + b^2y^2 + 2byt + b^2t^2}$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$a^2xz + b^2yt \leq \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}\sqrt{a^2z^2 + b^2t^2},$$

alors

$$\begin{aligned} \|u + v\| &\leq \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2 + 2\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2}\sqrt{a^2z^2 + b^2t^2} + a^2z^2 + b^2t^2} \\ &\leq \left(\sqrt{\left(\sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} + \sqrt{a^2z^2 + b^2t^2}\right)^2}\right) \\ &\leq \sqrt{a^2x^2 + b^2y^2} + \sqrt{a^2z^2 + b^2t^2} = \|u\| + \|v\| , \end{aligned}$$

donc $\|\cdot\|$ *est une norme.*

2. Pour déterminer la boule unité ouverte, on remarque que

$$\|u\| < 1 \Leftrightarrow a^2x^2 + b^2y^2 < 1$$

donc la boule unitée ouverte est l'intérieur de l'éllipse $a^2x^2 + b^2y^2 = 1$.

3. pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, *on a:*

$$\min(a, b)\,\|u\|_2 \leq \|u\| \leq \max(a, b)\,\|u\|_2\,,$$

où $\|.\|_2$ *est la norme euclidienne sur* $\mathbb{R}^2$.

4. les normes $\|u\|_2$ *et* $\|u\|$ *sont équivalentes.*

Exercice 1.3.2 *Soit* $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une application définie par:*

$$N(x, y) = \max(|x + y|, |x - 2y|)$$

1. Montrer que N *est une norme sur* $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer la boule unité fermée associée.

Solution 1.3.2 *1.* N *est une norme*

a)- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $N(x, y) \geq 0$, *et* $N(x, y) = 0 \Leftrightarrow |x + y| = |x - 2y| = 0 \Leftrightarrow (x, y) = (0, 0)$

b)- Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} N(\lambda(x, y)) &= \max(|\lambda x + \lambda y|, |\lambda x - 2\lambda y|) \\ &= \max(|\lambda||x + y|, |\lambda||x - 2y|) \\ &= |\lambda| N(x, y). \end{aligned}$$

c)- Soient (x, y) *et* (z, t) *deux éléments de* $\mathbb{R}^2$. *On a*

$$\begin{aligned} N((x, y) + (z, t)) &= N(x + z, y + t) \\ &= \max(|x + z + y + t|, |x + z - 2(y + t)|) \\ &\leq \max(|x + z| + |y + t|, |x - 2y| + |z - 2t)|) \\ &\leq \max(|x + z|, |x - 2y||) + \max(|y + t|, |z - 2t)|) = N(x, y) + N(z, t), \end{aligned}$$

donc N est une norme.

2. Pour déterminer la boule unité fermée, on remarque que

$$N(x,y) \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x+y| \leq 1 \\ |x-2y| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1-x \leq y \leq 1-x \\ -\frac{1}{2}+\frac{x}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}+\frac{x}{2} \end{cases}$$

et l'on représente donc facilement la boule unitée fermée pour N.

Exercice 1.3.3 *Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ on a $\lim\limits_{p\to+\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.*

Solution 1.3.3 *Pour $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, on a*

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty .$$

En passant à la limite, on trouve

$$\|x\|_\infty \leq \lim_{p\to+\infty} \|x\|_p \leq \lim_{p\to+\infty} n^{\frac{1}{p}} \|x\|_\infty = \|x\|_\infty .$$

Exercice 1.3.4 *Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

On définit pour $f \in E$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}, \quad et \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

1. Vérifier que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes sur E.

2. Montrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$.

3. En utilisant la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$, prouver que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Solution 1.3.4 *1. La vérification que $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_1$ sont deux normes est simple.*

2. Pour tout $f \in E$,

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt \leq \|f\|_\infty \int_0^1 dt \leq \|f\|_\infty .$$

3. On a

$$\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1} \to 0 \;\; et \;\; \|f_n\|_\infty = 1$$

donc les deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 1.3.5 *On munit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ des normes fondamentales*

$$\|f\|_\infty = \sup_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|, \quad \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\, dx .$$

1) Soit la suite des fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

a- Tracer les courbes de f_n et f_m sur le même dessin, pour $n < m$.

b- Calculer $\|f_n - f_m\|_1$ et en déduire que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy de $(E, \|\cdot\|_1)$? est-elle convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$? conclure?

2) On considère la fonction T définie sur le complet $(E, \|\cdot\|_\infty)$ par

$$\begin{array}{llll} T: & (E, \|\cdot\|_\infty) & \to & (E, \|\cdot\|_\infty) \\ & f & \to & T(f) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{lll} T(f): & [0,1] & \to \mathbb{R} \\ & x & \to T(f)(x) = c + \displaystyle\int_0^1 K(x,t) f(t) dt \end{array}$$

avec K est une fonction continue et $c \in \mathbb{R}$.

Montrer que si $\sup\limits_{(x,t) \in [0,1]^2} |K(x,t)| < \frac{1}{2}$ alors il existe un seul élément f de E tel que $T(f) = f$.

Solution 1.3.5 *1- Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans E, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n; m > N$, on ait,*

$$\forall t \in [0,\ 1];\ \sup |f_n(t) - f_m(t)| < \epsilon,$$

alors pour t fixé la suite de réels $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy, donc convergente dans $\mathbb{R}$ (qui est complet). On note $f(t)$ la limite de $f_n(t)$, donc il suffit de montre que f est cotinue.

Soit la suite des fonctions $(f_n)_n$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & : \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1 & : \quad \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Représentation graphique est simple

On a

$$\begin{aligned}
\|f_n - f_m\|_1 &= \int\limits_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|\,dx = \int\limits_0^{\frac{1}{m}} |mx - nx|\,dx + \int\limits_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |1 - nx|\,dx + \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} |1 - 1|\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right) \to 0 \text{ quand } m,n \text{ tend vers } +\infty,
\end{aligned}$$

Donc $(f_n)_n$ *est une suite de cauchy, d'autre part*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & si\ x = 0 \\ 1, & si\ x \in \left]0,1\right] \end{cases} \notin E,$$

Alors $(f_n)_n$ *est une suite divergente.*

Conclusion: $(E, \|\cdot\|_1)$ *n'est pas complet.*

2- On considère la fonction T *définie par*

$$\begin{aligned} T:\ (E, \|\cdot\|_\infty) &\to (E, \|\cdot\|_\infty) \\ f &\to T(f) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} T(f):\ [0,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\to T(f)(x) = c + \int\limits_0^1 K(x,t) f(t)dt \end{aligned}$$

a-

$$\begin{aligned}
\|T(f) - T(g)\|_\infty &= \sup_{0\le x\le 1} |T(f)(x) - T(g)(x)| \\
&= \sup_{0\le x\le 1} \left| \int\limits_0^1 K(x,t)\,[f(t) - g(t)]\,dt \right| \\
&\le \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)| \sup_{(x,t)\in[0,1]^2} |K(x,t)| \\
&< \frac{1}{2} \sup_{0\le x\le 1} |f(x) - g(x)| = \|f - g\|_\infty \text{ alors } T\ \frac{1}{2} - \text{est lipschitzienne.}
\end{aligned}$$

b- T *est contractante définie sur le complet* $(E, \|\cdot\|_\infty)$ *ves lui même , donc il existe un et un seul élément* f *de* E *tel que* $T(f) = f$

Exercice 1.3.6 *Montrer qu'il n'existe aucun produit scalaire sur $\mathcal{C}([0,1])$ dont la norme associée est la norme $\|\cdot\|_1$ ou la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Solution 1.3.6 *Pour tout $x \in [0,1]$, soit $f(x) = x$ et $g(x) = -x+1$. Alors on a*

$$\|f+g\|_\infty = \|f-g\|_\infty = \|f\|_\infty = \|g\|_\infty = 1,$$

donc la norme $\|\cdot\|_\infty$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Par conséquent, la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.
On a

$$\|f+g\|_1 = 1 \text{ et } \|f-g\|_1 = \|f\|_1 = \|g\|_1 = \frac{1}{2},$$

donc la norme $\|\cdot\|_1$ ne vérifie pas l'identité du parallélogramme. Par conséquent, la norme $\|\cdot\|_1$ sur $\mathcal{C}([0,1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.

Exercice 1.3.7 *Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire*

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

On définit le sous-espace vectoriel de E

$$F = \{f \in E; f(0) = 0\}.$$

Montrer que

$$F^\perp = \{0\}$$

Solution 1.3.7 *Clair que*

$$\{0\} \subseteq F^\perp. \tag{1.3.1}$$

Il suffit de montrer que

$$F^\perp \subseteq \{0\}.$$

Soit $f \in F^\perp$. Alors l'application $g(x) = xf(x)$ appartient F, et donc $\langle f, xf(x)\rangle = 0$, c'est-à-dire

$$\textstyle\int_0^1 xf^2(x)dx = 0$$

L'application $x \to xf^2(x)$ *est continue sur* $[0,1]$*, positive, d'intégrale nulle, elle est donc identiquement nulle. On en déduit que* $f(x) = 0$ *pour tout* $x \neq 0$*, et par continuité on a aussi* $f(0) = 0$*. Ainsi* $f = 0$*. d'ou*

$$F^{\perp} \subseteq \{0\}. \tag{1.3.2}$$

(1.3.1) et (1.3.2) donnent

$$F^{\perp} = \{0\}.$$

Exercice 1.3.8 *Soit* H *un espace de Hilbert. Montrer que l'orthogonal d'une partie* F *de* H *est un sous-espace fermé de* H *puis trouver* $F \cap F^{\perp}$*.*

Solution 1.3.8 *Soient* x, y *deux éléments de* $F^{\perp}$ *et* $\alpha, \beta \in \Bbbk$*. Pour* $z \in H$ *:*

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle x, z \rangle = 0$$

donc $F^{\perp}$ *est un sous-espace fermé de* H*.*
Par définition $F^{\perp}$ *est un fermé .*
Soit $x \in F \cap F^{\perp}$*, alors on a* $\langle x, x \rangle = 0$ *d'ou* $x = 0$*. Donc on a* $F \cap F^{\perp} \subset \{0\}$*. Alors*

$$F \cap F^{\perp} = \begin{cases} \{0\} \\ ou \\ \varnothing \end{cases}.$$

Exercice 1.3.9 *Soit* $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ *une famille orthonormale d'un espace de Hilbert* H*. On pose* $F = Vet\left[(a_i)_{1 \leq i \leq n}\right]$ *(c-à-d le sous-espace vectoriel engendré par la famille* $a_1, ..., a_n$*).*
1) Montrer que tout point x *de* H *admet une et une seule projection* $P_F(x)$ *sur F.*
2) Montrer que

$$P_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, a_i \rangle a_i, \text{ pour tout } x \in H.$$

Solution 1.3.9 *Posons* $r = d(x, F) = \inf\limits_{y \in F} \|x - y\|$ *alors il existe une suite* (x_n) *dans* H *telle que*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : r < \|x - x_n\| < r + \frac{1}{n}$$

ce qui permet de posé

$$\lim_{n} \|x - x_n\| = r$$

La suite (x_n) est de cauchy. En effet, si x_p et x_q sont deux points de cette suite. Appliquons l'identité du parallélogramme aux vecteurs x_p et x_q. On a

$$\frac{1}{2}\|x_p - x_q\|^2 + 2\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2 = \|x - x_p\|^2 + \|x - x_q\|^2$$

Comme $\frac{x_p+x_q}{2} \in F$; par suite

$$\left\|x - \frac{x_p + x_q}{2}\right\|^2 \geq r^2.$$

D'où pour p et q assez grands, les quantités $\|x - x_p\|^2$ et $\|x - x_q\|^2$ tens vers r^2, il est en résulte que

$$\|x_p - x_q\|^2 \to 0$$

La suite (x_n) est donc de Cauchy dans la partie F qui est complète. Elle y converge donc vers un élément x_0 qui vérifiera nécessairement $\|x - x_0\| = r$.

ii) Etablissions l'unicité de x_0.

Supposons que il existe une autre projection soit x_1. Appliquons l'identité du parallélogramme aux vecteurs x_0 et x_1. On a

$$0 \leq \frac{1}{2}\|x_0 - x_1\|^2 + 2\left\|x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x - x_1\|^2.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\|x_0 - x_1\|^2 = \|x - x_0\|^2 + \|x - x_1\|^2 - 2\left\|x - \frac{x_0 + x_1}{2}\right\|^2 = r^2 + r^2 - 2\left(r^2 + \alpha\right) \quad \text{où } \alpha > 0$$

Il en résulte que

$$0 \leq \|x_0 - x_1\|^2 \leq 0$$

D'où l'unicité.

Exercice 1.3.10 *Soient $E = L^2([0,1])$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions réelles de carré intégrable et T une forme linéaire continue définie par*

$$\begin{array}{llll} T: & L^2([0,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longrightarrow & T(f) = \int_0^1 f(x)dx \end{array}$$

1) Montrer que $F = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ est un fermé de $L^2([0,1])$?

2) Déterminer $F^{\perp}$?

3) Déterminer la projection de $f(t) = e^t$ sur F et calculer $d(f, F)$?

Solution 1.3.10 *1) La partie* $F = \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\}$ *est fermée de* $L^2([0,1])$ *car*

$$F = T^{-1}(\{0\}). \text{ Image réciproque d'un fermé par une application continue}$$

2) Détermine $F^{\perp}$*, on a*

$$\begin{aligned} F &= \{f \in E : \int_0^1 f(x)dx = 0\} \\ &= \{f \in E : \langle f, 1 \rangle = 0\} \\ &= [1]^{\perp} \end{aligned}$$

alors

$$F^{\perp} = [1]^{\perp\perp} = [1]$$

3) La projection de $f(t) = e^t$ *sur* F *notée par exemple* $P_F(f)$. *D'après le théorème de la projection*

$$P_F(f) \in F = [1] \Rightarrow \int_0^1 P_F(f)\, dx = 0 \tag{1.3.3}$$

$$f - P_F(f) \in F^{\perp} = [1] \Rightarrow f - P_F(f) = \lambda \Rightarrow P_F(f) = f - \lambda \tag{1.3.4}$$

(1.3.3) et (1.3.4) donnent

$$\int_0^1 (f(x) - \lambda)\, dx = 0 \Rightarrow \lambda = e - 1$$

Conclusion

$$P_F(f) = e^t - e + 1$$

Calcul $d(f, F)$.

$$d(f, F) = \inf_{g \in F} \|f - g\| = \|f - P_F(f)\| = e - 1$$

Exercice 1.3.11 *Déterminer les valeurs de* a, b, c, d *et* e *qui minimisent l'intégrale*

$$\int_{-1}^{+1} (x^5 - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e)^2 dx$$

Solution 1.3.11 *Soit*

$$\mathcal{P}_4 = \left\{ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \text{ avec } a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\right\}$$

est un s.e.v. de dimension 5 *de base* $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$. *Le problème est celui de la détermination de la meilleure approximation de* x^5 *par un polynôme de degré au plus égal à* 4 *sur l'intervalle* $[-1, 1]$, *c'est à dire on cherche la projection de* x^5 *sur* $\mathcal{P}_4$ *qui soit* $Q(x)$.

$$\langle x^5 - Q(x), 1 \rangle = \langle x^5 - Q(x), x \rangle = \langle x^5 - Q(x), x^2 \rangle = \langle x^5 - Q(x), x^3 \rangle = \langle x^5 - Q(x), x^4 \rangle = 0$$

ce qui donne

$$a = 0, b = \frac{10}{9}, c = 0, d = -\frac{5}{21}, e = 0.$$