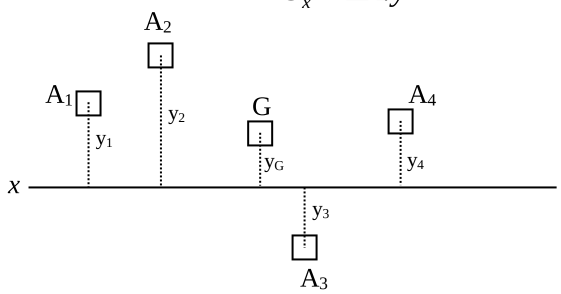
1-Moment statique et centre de gravité

Soit une droite « x » dans le plan des surfaces, et soient « y_1, y_2… » les distances de celles-ci à la droite suivant une direction donnée. On appelle moment statique du système de surfaces par rapport à la droite, la somme des produits des surfaces par leurs distances respectives

$$S_x = \Sigma A.y$$



Si on prend deux axes de coordonnées « x » et « y », on obtient de la même manière les coordonnées du centre de gravité

$$x_G = \frac{\Sigma A.x}{\Sigma A}, \qquad y_G = \frac{\Sigma A.y}{\Sigma A}$$

2-Moment d'inertie

On appelle moment d'inertie axial d'un système plan par rapport à une droite « x », la somme des produits des masses par les carrés de leurs distances respectives à la droite, mesurées suivant une distance « y » donnée

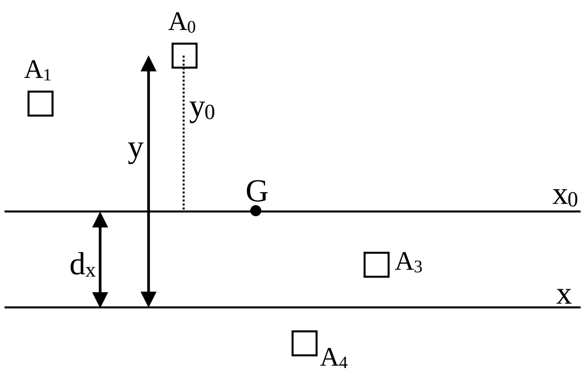
$$I_x = \Sigma A.y^2$$

3-Théorème de transposition

Soit une droite « x_0 » passant par le centre de gravité et une autre droite qui lui est parallèle à « x », et soit « d » la distance de « G » à « x ». Pour une surface quelconque, on a :

$$I_x = I_{x_0} + d_x^2 \Sigma A$$

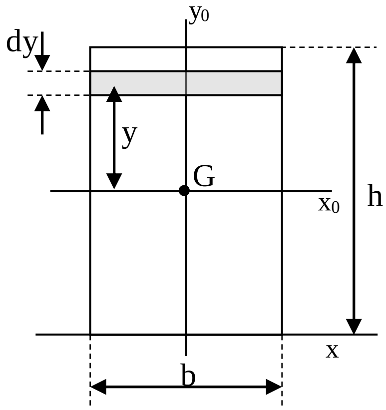
Donc, le moment d'inertie par rapport à un axe « x » est égal au moment par rapport à un axe « x_0 » passant par le centre de gravité et parallèle à l'axe « x », augmenté du produit de la surface totale par le carré de la distance entre les deux axes.



4-Moment d'inertie des sections simples

4-1-Le rectangle

Calculons le moment d'inertie de la section par rapport l'axe « x0 » passant parle centre de gravité. Adoptons pour la surface « *dA* » une couche infiniment mince d'aire « *dA=b.dy* ». Il vient



$$I_{x_0} = \int_A y^2.b.dy = b\int_{-h/2}^{+h/2} y^2 dy$$

Ainsi

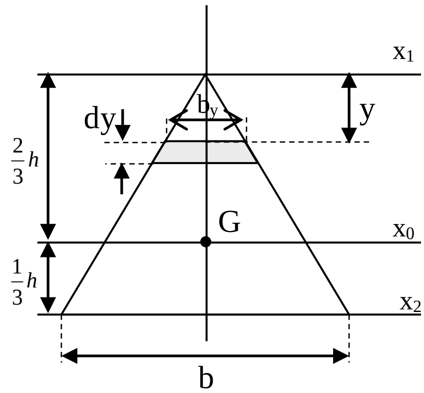
$$I_{x_0} = bh^3/12$$

D'une façon analogue, on obtient : $I_{y_0} = hb^3/12$

4-2-Le triangle

Par similitude des triangles, on obtient : $b_y = b.y/h$, si on décompose le triangle en bondes infiniment petites et parallèle à la base « b » de surface « $dA = b_y.dy$ », le moment « I_{x_1} » est donné par :

$$I_{x_1} = \frac{b}{h}\int_0^h y^3 dy = \frac{bh^3}{4}$$



Le moment par rapport à l'axe central s'obtient par le théorème de transposition :

$$I_{x_0} = I_{x_1} - \left(\frac{2h}{3}\right)^2.\frac{bh}{2}$$

$$I_{x_0} = \frac{bh^3}{36}$$

De la même manière le moment d'inertie par rapport à l'axe « x2 » peut s'obtenir :

$$I_{x_2} = I_{x_0} + \left(\frac{h}{3}\right)^2.\frac{bh}{2}$$

$$I_{x_2} = \frac{bh^3}{12}$$

4-3-Le cercle

L'aire « *dA* » devient un aire de couronnes circulaires infiniment petites « *2πρ.dρ* ».

$$I_P = \int_0^r \rho^2 .2\pi\rho.d\rho = \pi.r^4/2$$

$$= \pi.d^4/32$$

Le moment par rapport au diamètre (axe central) devient alors :

$$I_{x_0} = \frac{I_P}{2} = \frac{\pi.r^4}{4}$$

Le moment d'inertie par rapport à une tangente :

$$I_x = \frac{\pi.r^4}{4} + r^2.\pi r^2 = \frac{5}{4}\pi.r^4$$