الفصل الخامس

حل جمل المعادلات الخطية:

1. مفاهيم عامة: لتكن $A=(a_{ij})$ مصفوفة عددية مربعة من الدرجة n

$a_{ij}\in\mathbb{R}$ هو العنصر الموجود في السطر i والعمود j

1-1- ترميزات:

A^{-1} هي مقلوب A

A^{T} هي منقولة A : $A^{T}=(a_{ji})$

$\det(A)=|A|$ محدد A

I_n أو I هي مصفوفة الوحدة: $I=(\delta_{ij}) \,/\, \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ شعاع R^n و $x^{T}=(x_1 \dots x_n)$ منقوله

1-2- تعاريف:

A قابلة للقلب أو نظامية أو غير شاذة $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

A تناظرية $\Leftrightarrow A=A^{T}$

إذا كانت A ضد تناظرية: $A=-A^{T}$

A متعامدة $\Leftrightarrow A^{-1}=A^{T}$

A قطرية $\Leftrightarrow a_{ij}=0 \ (i\neq j)$ ونكتب $A=\mathrm{diag}(a_{11}\dots a_{nn})$

$A=(d0)$

A مثلثية سفلى $\Leftrightarrow a_{ij}=0 \quad (i<j) \quad A=\Delta$

" عليا $\Leftrightarrow a_{ij}=0 \quad (i>j) \quad A=\nabla$

A ثلاثية القطر $\Leftrightarrow a_{ij}=0 \quad (|i-j|>1) \quad A\begin{pmatrix}\ddots & 0\\ 0 & \ddots\end{pmatrix}$

ملاحظة: إذا كانت A قطرية أو مثلثية فإن $|A|=\prod_{i=1}^{n} a_{ii}$ وبالتالي تكون A نظامية $\Leftrightarrow$ كل عناصرها القطرية غير معدومة

عمليا: تعتبر المصفوفات القطرية والمثلثية من أحسن المصفوفات ملاءمة للحساب وهذه الملاحظة تنطبق عموما على المصفوفات الفارغة (عدد عناصرها المعدومة كبيرا نسبيا)

- العناصر الذاتية:

القيم الذاتية: لـ A هي جذور المعادلة المميزة $P_A(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$
قد تكون حقيقية أو عقدية، بسيطة أو مضاعفة
كثير الحدود:

$$P_A : \lambda \in \mathbb{C} \longrightarrow P_A(\lambda)$$

يسمى كثير الحدود المميز لـ A ودرجته n ولدينا:

$\boxed{P_A(A) = 0}$ كايلي هاملتون

* الأشعة الذاتية: لكل قيمة ذاتية يحقق على الأقل شعاع غير معدوم x يحقق $Ax = \lambda x$ ويسمى الشعاع الذاتي

خاصية:

$$\begin{cases} \lambda_{min} = \min\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^T A x}{x^T x} \\ \lambda_{max} = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{x^T A x}{x^T x} \end{cases}$$

المصفوفات المعرفة:

A مصفوفة معرفة موجبة $\Leftrightarrow \forall x \neq 0 \quad \langle Ax . x \rangle = \langle x^T A x \rangle$

- النظيم المصفوفي:

كل مصفوفة مربعة من الدرجة n يمكن اعتبارها شعاعًا من $\mathbb{R}^{n \times n}$ وبالتالي
يمكن تعريف نظيم مصفوفي انطلاقًا من النظيم الشعاعي كما يلي:

- النظيم المصفوفي: هو التطبيق:

$$\| \ \| \ \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

الذي يحقق الخواص:

1 - $\|A\| \geq 0, \ \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\|A\| = 0 \Rightarrow A = 0$

2 - $\|\alpha A\| = |\alpha| \, \|A\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} . \ \forall A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

3 - $\|A + B\| < \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

4 - $\|A * B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad \forall A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$

قضية: إذا كان: $\| \ \|$ نظيمًا شعاعيًا على $\mathbb{R}^n$ فإن التطبيقة:

$$\| \ \| : \mathbb{R}^{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$A \longmapsto \|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

نظيم على $\mathbb{R}^{n \times n}$ (نظيم مصفوفي)

أشهر نظائم المصفوفات:

2

$$\|A\|_1 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = \max_j \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$ (مجموع الأسطر)

$$\|A_2\| = \max \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sqrt{\rho(AA^T)} = \|A^T\|_2$$

ملاحظة: $\|A\|_2$ عملية مكلفة ~~حسابيا~~ عمومًا ولذلك نستبدلها عادة بنظيم أسهل « حسابيا » وله نفس الخواص هو نظيم (فوربينوس)

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}$$

مثال: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\|A\|_1 = \text{Max}(1+3,\ 2+4) = 6.$

$\|A\|_\infty = \text{Max}(1+2,\ 3+4) = 7$

$\|A\|_F = \sqrt{1^2+2^2+3^2+(-4)^2} = \sqrt{30} = 5{,}48$

لحساب $\|A\|_2$ نحسب $\sqrt{\rho(AA^T)}$

$$AA^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -5 & 25 \end{pmatrix}$$

$$|AA^T - \lambda I| = (5-\lambda)(25-\lambda) - 25 = 0$$

وبالتالي: $\lambda^2 - 30\lambda + 100 = 0 \Leftarrow$ $\lambda_2 = 3{,}82\ ,\ \lambda_1 = 26{,}18$

$\Leftarrow \|A\|_2 = \sqrt{\lambda_1} = 5{,}12$

- حل جملة المعادلات الخطية: نعتبر جملة المعادلات الخطية من الدرجة n:

$$Ax = b \longrightarrow (1)$$

حيث: A مصفوفة مربعة (حقيقية) من الدرجة n: تسمى مصفوفة الأمثال أو مصفوفة الجملة.

$x \in \mathbb{R}^n$: شعاع المجاهيل

$b \in \mathbb{R}^n$: شعاع ثابت يسمى الطرف الثاني للجملة

- وجود ووحدانية الحل: إذا كان $b=0$ فالجملة (1) تسمى جملة متجانسة وتملك حلا تلقائيا هو $x=0$

- وإذا كان $b \neq 0$ فإن الجملة (1) غير متجانسة وفي هذه الحالة يكون لدينا احتمالات:

(أ) A نظامية : ($\det(A) \neq 0$) فالجملة تملك حلاً وحيداً هو :

$$x = A^{-1} b$$

مثال : لدينا $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\det(A) = 1$

و الحل الوحيد للجملة هو $x_1 = 1$ ، $x_2 = 2$

(ب) A شاذة : $\det A = 0$: إما أن تكون الجملة مستحيلة ، أو غير معينة

- مثال لا استحالة : لا يوجد شعاع $x \in \mathbb{R}^2$ يحقق الجملة

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

- مثال عدم التعين : وجود ∞ نهاية من الحلول فالجملة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

تملك ∞ نهاية من الحلول :

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \dfrac{4 + 2\lambda}{3} \quad \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

- تعيين الحل : لتعيين الحل أي لحسابه يفترض أن يكون هذا الأخير وحيداً أي ($\det A \neq 0$)

- حل الجملة (1) نظرياً (طريقة كرامر) : رياضي سويسري (1704-1752) يعطي الحل وفق القاعدة التالية

$$x_i = \frac{|B_j|}{|A|} \qquad j = 1 \ldots n$$

حيث : B_j هي المصفوفة التي نحصل عليها عند استبدال العمود j للمصفوفة A بالشعاع b

مثال :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 12$$

$$|B_1| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 35 \qquad |B_2| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -13,$$

$$B_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = -15$$

$$x_1 = \frac{35}{12} , \quad x_2 = -\frac{13}{12} , \quad x_3 = \frac{-15}{12} = \frac{-5}{4}$$

3

- نقد الطريقة: نعلم أن محددة A مربعة من الدرجة n تعطى ب:

$$\det(A) = |A| = \sum (-1)^{|\sigma|} a_1\sigma_1(1) + a_2\sigma(2) + \dots a_n\sigma(n)$$

حيث S_n مجموعة التبديلات $E_n = \{1 \dots n\}$: لي $n!$ تبديلة

$|\sigma| = (-1)^{v}$ حيث v هو عدد التبديلات الأولية

$|\sigma|$ تسمى ناتج شيرة σ أو توقيعه: $\sigma = \begin{cases} +1 & \text{زوجي} \\ -1 & \text{فردي} \end{cases}$

- لدينا في حساب $|A|$، $n!$ حدًا وفي كل حد $(n-1)$ عملية ضرب (بغض النظر عن
و بالتالي حساب محددة $|A|$ يكلفنا $n!(n-1)$ عملية ضرب

- في طريقة كرامر نحتاج حساب $(n+1)$ محددة من الدرجة n أي ما يعادل
$n!(n^2-1)$

فإذا كانت عملية الضرب واحدة تتكلف 3×10^{-6} ثانية في كومبيوتر ما
فلحل جملة من الدرجة $n=20$ (صغيرة) فعدد عمليات الضرب اللازمة
في هذه الطريقة يعادل 3×10^{15} أي 10^{8} سنة

خلاصة: الطرق النظرية (لكونها تستعمل المحددات) لا تصلح للاستعمال الآلي. وبالتالي يصبح من الضروري البحث عن طرق عملية لحل الجملة

- ملاحظة هامة: يكون الحل تلقائيا للجملة (1) في كل من الحالتين التاليتين:

أ- قطرية:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 \dots = b_1 \\ \dots a_{22}x_2 \dots = b_2 \\ \dots \\ \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

لدينا $x_i = \frac{b_i}{a_{ii}}$, $i=1..n$

ب- A مثلثية (سفلى):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \dots = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 \dots a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

نحصل على قيمة x_1 من المعادلة (1) لنعوضها في المعادلة 2
و نحصل على x_2 و هكذا إلى غاية x_n

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad , \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j}{a_{ii}}$$

لنفس الطريقة نجد الحل بالنسبة لجملة مثلثية عليا:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \qquad \begin{cases} x_i = \dfrac{b_i - \sum a_{ij}x_j}{a_{ii}} \\ i = n-1 \dots 1 \end{cases}$$

3 - حل الجملة (1) بطرق عددية: هناك نوعان من الطرق العددية

حل الجملة (1)

1 - 3 - **الطرق المباشرة**: تعطي الحل "الدقيق" خلال عدد منته من العمليات الحسابية تعتمد على تفكيك أو تبسيط مصفوفة الأمثال الجملة وتتلاءم أكثر مع المصفوفات المليئة ذات الرتب الصغيرة $(n \leq 100)$

2 - 3 - **الطرق التكرارية**: تعطي الحل التقريبي على شكل نهاية المتتالية من التقريبات التي تطبق فيها نفس العلاقة التكرارية
- يتوقف تقاربها على عناصر المصفوفة وتعتمد سرعة هذا التقارب على كيفية اختيار التقريب الابتدائي x^0
- تستعمل أكثر مع المصفوفات الفارغة ذات الرتبة الكبيرة $(n \geq 500)$

- **ملاحظة**: لا توجد قاعدة عامة لاختيار طريقة من الطرق المختلفة لحل الجملة (1) لكن هناك نوعان عوامل مساعدة على الاختيار منها:

أ - خواص مصفوفة الأمثال (الجملة)
ب - عدد وكيفية انتشار عناصرها (المعروفة)
ج - نوع الآلة المستعملة

4 - دراسة بعض الطرق المباشرة:

1 - 4 - طريقة الحذف (غوص):

غوص عالم رياضي وفيزيائي وفلكي ألماني (1777-1855)

- **مبدأ الطريقة**: تعتمد الطريقة على حذف أو تعويض (المجاهيل بحيث تصبح الجملة الأصلية $Ax = b$ جملة مثلثية عليا: $Ux = \tilde{b}$

وهذه العملية (الانتقال من A إلى U) ممكنة دوما حسب المبرهنة التالية.

مبرهنة غوص: لتكن A مصفوفة مربعة كيفية. إذا توجد على الأقل مصفوفة نظامية P بحيث تكون: $PA = U$ حيث U مثلثية عليا

- إذا كانت A من الدرجة n فعملية التثليث تتطلب $(n-1)$ خطوة ويكفي لتبيان ذلك أخذ جملة من الدرجة $n=3$

$$(1)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 = a_{14} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 = a_{24} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 = a_{34} \end{cases}$$

الخطوة الأولى: تتمثل في حذف x_1 من المعادلتين الثانية والثالثة للجملة (1) وذلك بضرب المعادلة الأولى بالعدد $\frac{a_{21}}{a_{11}}$ وطرحها من المعادلة الثانية ثم نضرب المعادلة (1) بالعدد $\frac{a_{31}}{a_{11}}$ وطرحها من المعادلة الثالثة فنحصل بذلك على الجملة التالية:

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = a_{34}^{(1)} \end{cases}$$

الرمز (1) يدل على رقم الخطوة:

ولدينا:

$$\boxed{a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - \frac{a_{i1}}{a_{11}}a_{1j} \qquad \begin{matrix} i=2\ldots3 \\ j=2\ldots4 \end{matrix}}$$

الخطوة الثانية: نحذف x_2 من المعادلة الثالثة للجملة (2) بضرب المعادلة الثانية بالعدد $a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ وطرحها من المعادلة الثالثة فنجد الجملة المكافئة التالية

$$(3)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14} \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = a_{24}^{(1)} \\ a_{33}^{(2)}x_3 = a_{34}^{(2)} \end{cases}$$

$$\boxed{a_{3j}^{(2)} = a_{3j}^{(1)} - \frac{a_{32}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \cdot a_{2j}^{(1)}}$$

إذا خلال خطوتين $(n-1)=2$ حصلنا على الشكل المثلثي المكافئ للجملة (1) ونحل عندئذ الجملة (3) بدلاً من الجملة (1)

- تعميم: بصفة عامة تعطى عناصر الجملة المثلثية المكافئة للجملة (1) وفق الدساتير التالية

$$a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - \frac{a_{im}^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}} \times a_{mj}^{(m-1)} \quad \begin{cases} m = 2 \to n \\ i = m+1 \to n \\ j = m+1 \to n+1 \end{cases}$$

تعريف: العناصر a_{11} ، $a_{22}^{(1)}$ ... $a_{nn}^{(n-1)}$ تسمى العناصر الأساسية غير المعدومة فرضا "تسمى العناصر الأساسية (Pivots)"

ملاحظة: محدد A يساوي جداء العناصر الأساسية

$$\det A = a_{11} \, a_{22}^{(1)} \cdots a_{nn}^{(n-1)}$$

مثال:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

- الخطوة 1: $a_{11} = 2$

$$(1) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 4 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

الخطوة (2): $a_{22}^{(1)} = 2$

$$(2) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -6 & 1 & -5 \end{bmatrix} \qquad (3) \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & 2 & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$$

ومن (3) نجد الحل الوحيد للجملة

$$\boxed{x_3 = 1 ,\ x_2 = 1 ,\ x_1 = 1}$$

2 - 4 - التفكيك LU.

مبدأ الطريقة يتمثل في تفكيك مصفوفة الجملة $Ax=b$ إلى جداء مصفوفتين $A=LU$ حيث L مثلثية سفلى و U مثلثية عليا: $(\forall i \ldots u_{ii}=1)$.

- بعد تعيين L و U تستبدل الجملة (1) بجملتين متكافئتين

$$Ax=b \iff \begin{cases} Ly=b \to (2) \\ Ux=y \to (3) \end{cases}$$

تعيين L و U (عملية التفكيك)

لتكن المعادلة: $A=LU$ بشكل مفصل

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \text{—} & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \text{—} & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & A_{nn} \\ A_{n1} & A_{n2} & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & & 0 \\ & & & & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & l_{nn} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{2n} \\ \vdots & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

لتعيين العمود الأول لـ L نكتب:

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$

العمود الأول لـ L = العمود الأول لـ A.

تعيين السطر الأول لـ U نلاحظ أن:

$$(l_{11}\ 0\ 0\ 0)U = (a_{11}\ a_{12} - a_{1n})$$

فنجد:

$$\boxed{u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad j=1,\ldots,n}$$

تعيين بعد ذلك العمود الثاني لـ L ثم السطر الثاني لـ U وهكذا... نعين دوريا العمود رقم r لـ L ثم السطر رقم r لـ U.

فنجد الدساتير التالية:

العمود r لـ L: $$\boxed{l_{ir} = a_{ir} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{ik}u_{kr} \quad i \geq r > 1}$$

السطر r لـ u :

$$\boxed{u_{rj} = \left(a_{rj} - \sum_{k=1}^{r-1} l_{rk}u_{kj}\right) / l_{rr} \quad i<r<j}$$

ملاحظة

$$\det A = \det L \times \det U$$
$$= \det(L) = \prod_{i=1}^{n} l_{ii}$$

مثال حل الجملة التالية باستعمال التحليل LU ثم استنتج det(A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 4 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & l_{22} & 0 \\ 3 & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4+l_{22} & 4+l_{22}u_{23} \\ 3 & 3+l_{32} & 3+l_{32}u_{23}+l_{33} \end{pmatrix}$$

$4 + l_{22} = 3 \Rightarrow l_{22} = -1 \Longrightarrow, \quad 3 + l_{32} = 5 \Longrightarrow l_{32} = 2.$

$4 + l_{22}u_{23} = 4 - u_{23} = -1 \Rightarrow u_{23} = 5.$

$3 + 10 + l_{33} = 3 \Rightarrow l_{33} = -10$

$$L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & -10 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$Ax = LUx = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Ly = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} y_1 = 1 \\ 4y_1 - y_2 = 6 \\ 3y_1 + 2y_2 - 10y_3 = 4 \end{cases} \qquad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ثم الحل $Ux = y$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 5x_3 = -2 \\ x_3 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow x = \begin{pmatrix} \cancel{-1/2}\ 1 \\ 1/2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

ثم نحل الجملتين $(2)'$ و $(3)'$ على التوالي نجد.

$$y_1 = \frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{60}}, \quad y_3 = \frac{1}{\sqrt{840}}, \quad y_4 = \frac{1}{\sqrt{11704}}$$

$$x_1 = \frac{56}{209}, \quad x_3 = \frac{4}{209}, \quad x_2 = \frac{15}{209}, \quad x_4 = \frac{1}{209}$$

$$|A| = |L|^2 = 4 \times \frac{15}{4} \times \frac{56}{15} \times \frac{209}{56}$$

حل جملة معادلات خطية بطرق تكرارية

نعتبر دوما الجملة الخطية $Ax=b$ حيث A مصفوفة عددية نظامية من الدرجة n فيما يلي سندرس أشهر طرق تكرارية لحل الجملة (1) سنتذكر في الفكرة العامة التالية

المبدأ: هو مبدأ التقريبات المتتالية المتمثل في خطوتين أساسيتين

(1) وضع الجملة (1) على الشكل المكافئ: $\boxed{x = Hx + c}$ (2)

وذلك بكتابة

$$A = M - N$$

حيث M نظامية يفترض أن يكون تعيين M^{-1} سهلا

بالتعويض في (1) $(M-N)x = b \Rightarrow \boxed{Mx = Nx + b}$

$$\boxed{x = M^{-1}Nx + M^{-1}b}$$

وهي من الشكل (2) حيث

$$H = M^{-1}N \quad \text{و} \quad c = M^{-1}b$$

(2) انطلاقا من شعاع ابتدائي $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ ننشئ متتالية $\{x^{(k)}\}$ بالشكل:

$$\boxed{x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + c} \quad (3)$$

نحسب: $\lim x^{(k)} = \bar{x}$ حيث $\bar{x}$ هو الحل الوحيد للجملة (1)

طريقتي جاكوبي و غوص سايدل :

نكتب A على الشكل التالي :

$$A = \begin{pmatrix} D & -U \\ -L & \end{pmatrix} = D-L-U$$

حيث D قطرية $D_{ii} = a_{ii} \ \forall i$

L مثلثية سفلى و قطرها معدوم إذن $l_{ij} = -a_{ij}$

إذن $l_{ij} = 0$)

U = مثلثية عليا قطرها معدوم

$$\begin{cases} u_{ij} = -a_{ij} & j > i \\ u_{ij} = 0 & j \leq i \end{cases}$$

طريقة جاكوبي : نأخذ $M = D$ و $N = L+U$

و بالتالي نجد مصفوفة التكرار .

$$H_J = J = D^{-1}(L+U)$$

و نكتب الدستور (3) بالشكل

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L+U)x^{k} + D^{-1}b$$

أو بشكل تفصيلي :

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right] \quad i = 1 \ldots n .$$

5 - طريقة غوص سايدل :

نأخذ : $M = D-L$ و $N = U$ ومنه نجد .

$$H_G = H = G = (D-L)^{-1}U$$

و يكون لدينا

$$x^{k+1} = (D-L)^{-1}U\,x^{(k)} + (D-L)^{-1}b$$

(ب)

أ- بشكل تفصيلي

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}\right]$$

$i = 1 \longrightarrow n$

أمثلة نعتبر الجملة الخطية

$a \in \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} +1 & -a \\ -a & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$

عين قيم a التي تضمن تقارب طريقتي جاكوبي وغوص سايدل وقارن بين سرعة تقاربهما

الحل طريقة جاكوبي

$$J = D^{-1}(L+U) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|J - \lambda I| = \lambda^2 - a^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \mp a$$

ومنه $\rho(J) = |a|$ وبالتالي فالطريقة تتقارب $\Leftrightarrow |a| < 1$

طريقة غوص سايدل

$$G = (D-L)^{-1} U = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$|G - \lambda I| = \lambda(\lambda - a^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = a^2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \rho(G) = a^2$ وبالتالي الشرط اللازم للتقارب هو :

$\Longrightarrow a^2 < 1 \Leftrightarrow |a| < 1$

$\Leftarrow \rho(G) = \rho^2(J) < \rho(J) \Rightarrow$ الطريقة الثانية أسرع تقاربا من الطريقة الأولى

(2) طبق طريقتي جاكوبي ثم غوص سايدل لحل الجملة التالية

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 = -5 \\ 2x_1 + 3x_2 = 7 \end{cases}$$

نلاحظ أن مصفوفة الأمثال ذات قطر غالب تماما

$(8 > 1, 3 > 2)$ فتتقارب الطريقتين مضمونا

طريقة جاكوبي نكتب الجملة بالشكل

(2) $\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{8}x_2 - \frac{5}{8}, & x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{7}{3} \end{cases}$

ومنه دستور جاكوبي

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{8}x_2^{(k)} - \frac{5}{8} \\ x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{3}x_1^{(k)} + \frac{7}{3} \end{cases}$$

$x_0^{(0)} = (-\frac{5}{8} = -0.625, \frac{7}{3} = 2.33$

k	0	1	2	3	4	
$x_1^{(k)}$	-0.625	-0.916	-0.968	-0.993	-0.998	-1
$x_2^{(k)}$	2.33	2.744	2.941	2.98	2.99	3

يمكن أخذ

$$\bar{x} = x_J^{(4)} = (-0.998, 2.99)^T$$

بمقدار

$$\|\bar{x} - x_J^{(4)}\| = Max\{0.002, 0.01\} = 0.01$$

طريقة غوص سايدل

$$x_1^{(k+1)} = -\frac{1}{8}x_2^{(k)} - \frac{5}{8}, \quad x_2^{(k+1)} = -\frac{2}{3}x_1^{(k+1)} + \frac{7}{3}$$

$$x^{(0)} = \left(-\frac{5}{8} = -0.625, 2.33 = \frac{7}{3}\right)^T$$

k	0	1	2	3	
$x_1^{(k)}$	-0.625	-0.916	-0.993	-0.999	-1
$x_2^{(k)}$	2.33	2.941	2.99	2.996	3

$$\bar{x} = x_G^{(3)} = \begin{pmatrix} -0.999 \\ 2.996 \end{pmatrix}$$

يمكن أخذ

$$\|x_G^{(3)} - \bar{x}\|_\infty = 0.004$$

في هذا المثال طريقة غوص سايدل أسرع تقاربا

وأدق نتيجة من جاكوبي

هذه النتيجة ليست عامة

Comment calculer l'inverse d'une matrice 3×3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) $\det(M) = 1(0-24) - 2(0-20) + 3(0-5) = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $M^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24$ $\quad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18$

$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20$ $\quad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15$

$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5$ $\quad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4$

3) $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$, $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$, $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

تسمى → matrice adjointe notée $\mathrm{adj}(M)$.

4) $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \left(\mathrm{adj}(M) \right)$

$$\hookrightarrow \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow M^{-1}$$

هي نفسها