**Chapitre 1. Identification basée sur l'erreur d'équation: méthode de moindre carré**

**Définitions**:

- Modèle

Un modèle est une structure mathématique pouvant représenter le système étudié. Cette structure doit comporter des éléments d'ajustement.

- Modèle quantitatif

Un modèle est quantitatif lorsque les fonctions qui définissent les équations sont spécifiées analytiquement.

- Modèle paramétrique

Un modèle quantitatif est paramétrique lorsque son expression analytique comporte un nombre fini de constantes non-précisées numériquement appelés paramètres .
L'expression générale d'un modèle paramétrique est:

$X(t) = f(t, a_1, a_2, \dots, a_k)$ avec $t$ variable explicative du modèle

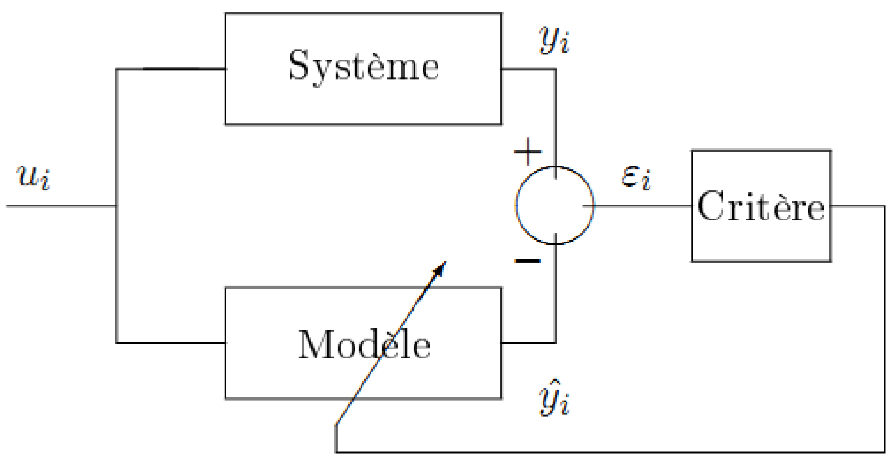
- Modèle de connaissance

Un modèle de connaissance est un modèle dont les paramètres représentent des grandeurs caractéristiques de la structure étudiée.

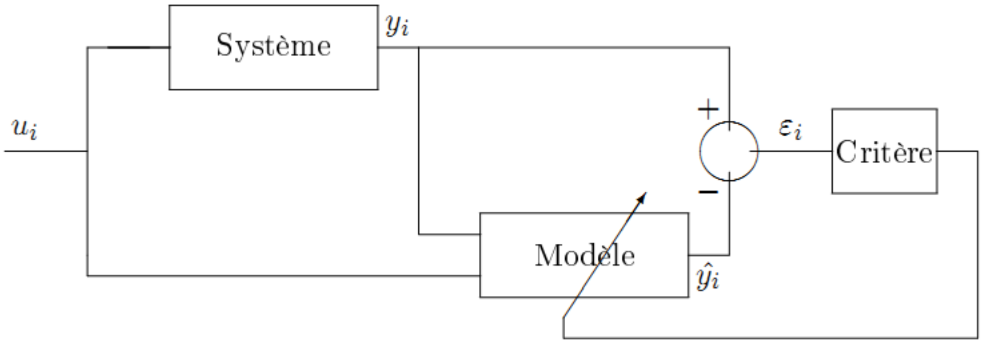
- Modèle de comportement

Un modèle de comportement est un modèle dont la structure et les paramètres sont sans rapport avec le système réel

# Identification basée sur l'erreur de sortie



# Identification basée sur l'erreur de prédiction




- Critère d'évaluation de l'erreur de modélisation

Soient : $y(t_i)$ les observations faites sur le système

$x(t_i, a_1, a_2 ...)$ les valeurs prises par le modèles aux instants d'observation

⇨ Posons $\varepsilon_i$ écart [erreur] entre les mesures et le modèle

$$y(t_i) = x(t_i, a_1, a_2 ...) + \varepsilon_i$$

⇨ L'erreur quadratique cumulée est :

$$\mathcal{E}(a_1, a_2 ...) = \sum_{n_1}^{n_2} \varepsilon_i^2$$

$$\mathcal{E}(a_1, a_2 ...) = \sum_{n_1}^{n_2} (y(t_i) - x(t_i, a_1, a_2 ...))^2$$

- Recherche du minimum de $\mathcal{E}$

On suppose qu'il y a indépendance/orthogonalité des paramètres :

Le critère d'erreur $\mathcal{E}$ présente un minimum pour :

⇨ $$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0 \quad .... \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0$$

et

⇨ $$\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a_1^2} > 0 \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a_2^2} > 0 \quad .... \quad \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial a_k^2} > 0$$

- Resolution

Le minimum est obtenu pour un jeu de valeurs dites optimales pour le critère considéré (critère des moindres-carrés)

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial a_i} = 0 \quad \xRightarrow{\text{Résolution des } k \text{ équations}} \quad \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots, \hat{a}_k$$

Le modèle le plus proche des mesures au sens du critère d'erreur est :

$$\hat{x}(t) = x(t, \hat{a}_1, \hat{a}_2, \dots \hat{a}_k)$$

Note : Selon la nature du modèle (linéaire ou non-linéaire par rapport aux paramètres), la résolution des équations peut poser problème . Ce cours porte essentiellement sur les méthodes de base applicable aux modèles linéaires.

- Ecriture matricielle du problème des moindres-carrés :

Soit *x(t)* le modèle linéaire par rapport à ses paramètres:

$$x(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) + \dots + a_k f_k(t)$$

Soit $X$ l'ensemble des valeurs prises par le modèle et $Y$ les mesures:

$$\boxed{\underline{X} = \begin{pmatrix} x(t_1) \\ x(t_2) \\ \dots \\ x(t_n) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_1 f_1(t_1) + a_2 f_2(t_1) + \dots + a_k f_k(t_1) \\ a_1 f_1(t_2) + a_2 f_2(t_2) + \dots + a_k f_k(t_2) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_1 f_1(t_n) + a_2 f_2(t_n) + \dots + a_k f_k(t_n) \end{pmatrix} \qquad \boxed{\underline{Y} = \begin{pmatrix} y(t_1) \\ y(t_2) \\ \dots \\ y(t_n) \end{pmatrix}}$$

Posons: $$\boxed{H = \begin{pmatrix} f_1(t_1) & f_2(t_1) & \dots & f_k(t_1) \\ f_1(t_2) & f_2(t_2) & \dots & f_k(t_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_1(t_n) & f_2(t_n) & \dots & f_k(t_n) \end{pmatrix}} \qquad \boxed{\underline{\theta} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_k \end{pmatrix}} \qquad \Rightarrow \underline{X} = H\,\underline{\theta}$$

L'erreur quadratique cumulée s'écrit:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} \left(y(t_i) - x(t_i)\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \qquad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \dots & \varepsilon_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

Sachant que : $\underline{\varepsilon} = \underline{Y} - \underline{X}$ et que : $\underline{X} = H\,\underline{\theta}$

L'erreur cumulée s'écrit : $\mathcal{E} = (\underline{Y} - H\,\underline{\theta})^T (\underline{Y} - H\,\underline{\theta})$

La minimisation du critère se fait pour : $$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{\theta}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} \\ \cdots \\ \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} \end{vmatrix} = \underline{0}$$

La solution optimale sera obtenue pour :
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{\theta}} = -H^T (\underline{Y} - H\,\underline{\theta}) - (\underline{Y} - H\,\underline{\theta})^T H$$

En remarquant que $\mathcal{E}$ est scalaire , on obtient :

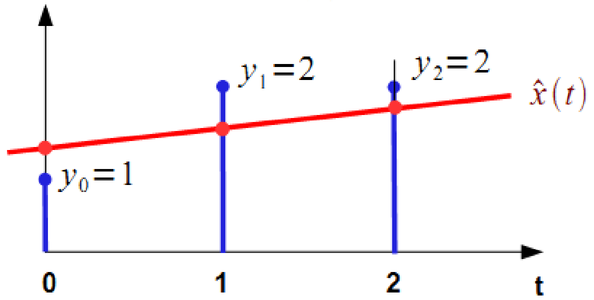
$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \underline{\theta}} = -2\,H^T (\underline{Y} - H\,\underline{\theta})$$

La solution optimale est :

$$\boxed{\hat{\underline{\theta}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{Y}}$$

- Exemple d'application

Modélisation de 3 mesures successives
par un modèle affine de la forme $x(t) = a + b\,t$




Méthode matricielle:

1°) Déterminer les valeurs prises par le modèle pour $t = 0,1,2$

2°) Construire le tableau des valeurs prises par le modèle
aux instants de mesure, le vecteur des observations.

3°) En déduire les matrices/vecteurs $Y$ , $H$ et $\theta = (a\,,b)^T$

4°) Calculer la solution optimale $\hat{\theta}$