Chapitre 2. Méthode des variables instrumentales

- Biais de l'estimation des paramètres:

Le biais d'un estimateur est l'espérance de l'écart entre l'estimation et les vraies valeurs.

L'estimateur non-biaisé fournit une valeur non-décalée par rapport à la vraie valeur

⇨ Soit $\underline{\tilde{\theta}}$ la valeur théorique des paramètres.

⇨ Le modèle parfait a pour valeur : $\underline{X} = H\underline{\tilde{\theta}}$

⇨ Les mesures ont pour valeur : $\underline{Y} = H\tilde{\theta} + \underline{\nu}$ avec $\underline{\nu}$ bruit de mesure

$$\underline{\hat{\theta}} = (H^T H)^{-1} H^T [H\underline{\tilde{\theta}} + \underline{\nu}]$$

⇨ L'écart entre l'estimation et la vraie valeur des paramètres du modèle est :

$$\underline{\hat{\theta}} - \underline{\tilde{\theta}} = (H^T H)^{-1} H^T \underline{\nu}$$

⇨ L'espérance de l'erreur d'estimation est :

$$E[\underline{\hat{\theta}} - \underline{\tilde{\theta}}] = E[(H^T H)^{-1} H^T \underline{\nu}]$$

⇨ Pour un bruit de mesure non corrélé à H, l'espérance sera :

$$\boxed{E[\underline{\hat{\theta}} - \underline{\tilde{\theta}}] = (H^T H)^{-1} H^T E[\underline{\nu}]}$$

Dans les cas usuels (bruit à valeur moyenne nulle), l'estimateur des moindres-carrés est non-biaisé : la valeur estimée des paramètres est proche de la vraie valeur en moyenne.

Il fournit une estimation non-décalée par rapport aux vraies valeurs.

Puisque le biais de l'estimateur des moindres carrés est biaisé à cause de la corrélation entre X et e, on se propose de déterminer une autre matrice qui permette le calcul de θ tout en évitant cette corrélation et donc le biais de l'estimateur.

Posons :

$$\widehat{\theta} = (Z^T X)^{-1} Z^T y$$

où Z est la matrice instrumentale.

Quelles sont les conditions sur Z pour que l'équation précédente ait un sens ?
En poursuivant le calcul :

$$\widehat{\theta} = (Z^T X)^{-1} Z^T (X\theta + e)$$
$$\widehat{\theta} = \theta + (Z^T X)^{-1} Z^T e$$

Pour que

$$E[\widehat{\theta}] = \theta$$

il faut :

$$E[Z^T X] \neq 0 \quad \text{et} \quad E[Z^T e] = 0$$

Plusieurs choix de Z sont possibles, en voici deux :

le premier choix consiste à faire deux campagnes de mesures avec la même entrée u_i, le plus souvent consécutives (décalées dans le temps). Vous avez alors la possibilité de déterminer deux matrices X soit X_1 et X_2, puis déterminer $\widehat{\theta}$ en posant :

$$\widehat{\theta} = (X_2^T X_1)^{-1} X_2^T y_1$$

Il n'y a plus de corrélation entre X_2 et y_1 (le bruit est stochastique et ergodique) donc le biais est bien nul.

La deuxième proposition consiste à créer les données nécessaires à la création de la matrice X_2 à l'aide d'un modèle de type moindre carrés simples issu de la première campagne de mesure.