Fondements théoriques et mathématiques préliminaires

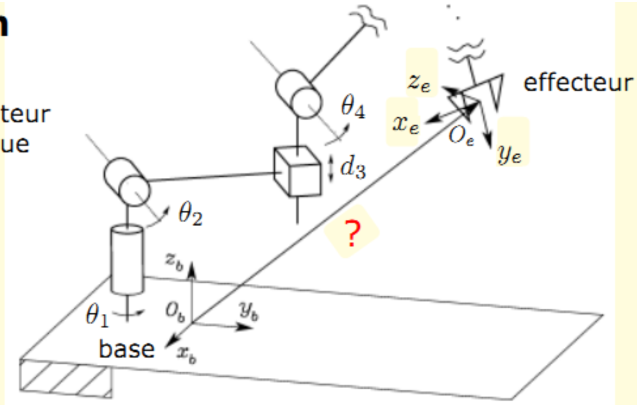
1. Positionnement

Conventions

R_i	Repère numéro i
P	Point
${}^iP$	Coordonnées de P dans le repère i
$\vec{v}$ ou $\boldsymbol{v}$	Vecteur
${}^i\boldsymbol{v}$	Coordonnées de $\vec{v}$ dans le repère i
$\overrightarrow{OP}$ ou $\boldsymbol{OP}$	Vecteur
${}^i(\boldsymbol{OP})$	Coordonnées de $\overrightarrow{OP}$ dans le repère i
$\vec{u} \times \vec{v}$	Produit vectoriel
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	Produit scalaire
${}^0R_{01}$ ou R_{01}	Rotation du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0*
${}^0M_{01}$ ou M_{01}	Matrice homogène du repère 0 vers le repère 1 exprimée dans 0*

Motivation

Manipulateur générique



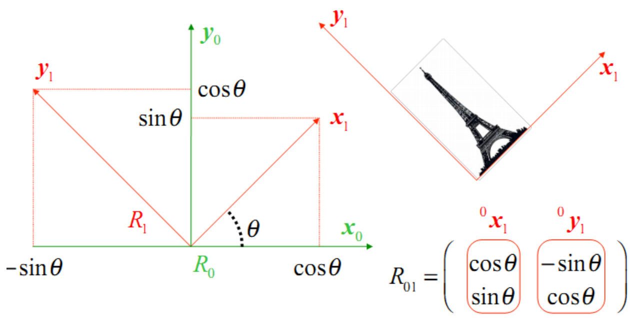
- Un manipulateur peut être représenté comme une *chaîne cinématique* de segments reliés par l'intermédiaire d'articulations rotoïdes ou prismatiques
- Le mouvement résultant de la structure est obtenu par *composition* des mouvements élémentaires de chaque segment par rapport au précédent
- Afin de manipuler un objet dans l'espace, il est nécessaire de décrire la *position* et l'*orientation* (**pose**) de l'effecteur

Objectif final: Exprimer la pose de l'effecteur en fonction des variables des articulations, par rapport à un repère donné (ex. le repère de la base)

1.1. Rotation

I.1. Rotations : le cas 2D

- Représentation de la rotation :



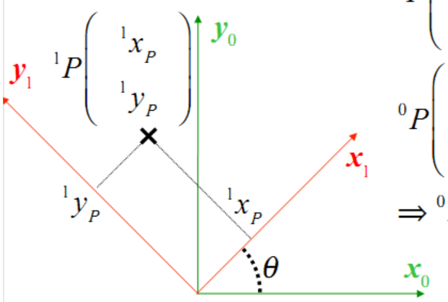
- Propriétés :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left\{R_{01}\right\} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow R_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = R_{01}^{T} = R_{10}$$

- Ce type de matrice *2x2* appartient au groupe spécial orthogonal d'ordre *2* noté *SO(2)*

- Changement de repère :



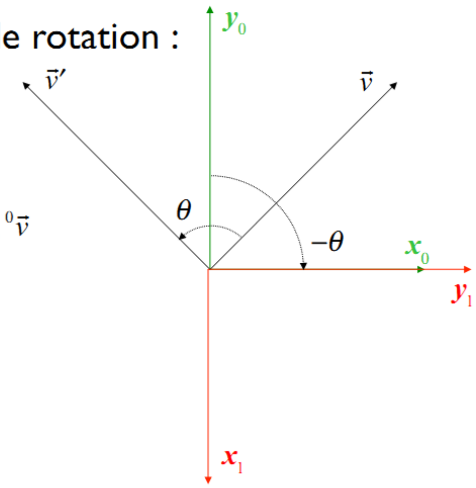
$$^1P\begin{pmatrix} ^1x_P \\ ^1y_P \end{pmatrix}$$

$$^0P\begin{pmatrix} ^0x_P = {}^1x_P\cos\theta - {}^1y_P\sin\theta \\ ^0y_P = {}^1x_P\sin\theta + {}^1y_P\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^0P = R_{01}\,{}^1P$$

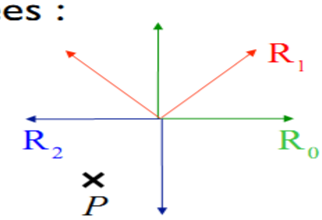
- Opérateur de rotation :

$$^0\vec{v}' = {}^1\vec{v} = R_{10}\,{}^0\vec{v} = R_{\theta}\,{}^0\vec{v}$$



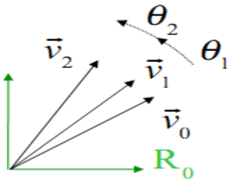
- Composition :
  - Transformation de coordonnées :

$$^1P = R_{12}\,{}^2P$$
$$^0P = R_{01}\,{}^1P$$
$$\Rightarrow {}^0P = R_{01}R_{12}\,{}^2P = R_{02}\,{}^2P$$



  - Opérateur de rotation :

$$\vec{v}_1 = R_{\theta_1}\vec{v}_0 \qquad \vec{v}_2 = R_{\theta_2}\vec{v}_1$$
$$\Rightarrow \vec{v}_2 = R_{\theta_2}R_{\theta_1}\vec{v}_0$$



I.1. Rotations : généralisation à la 3D

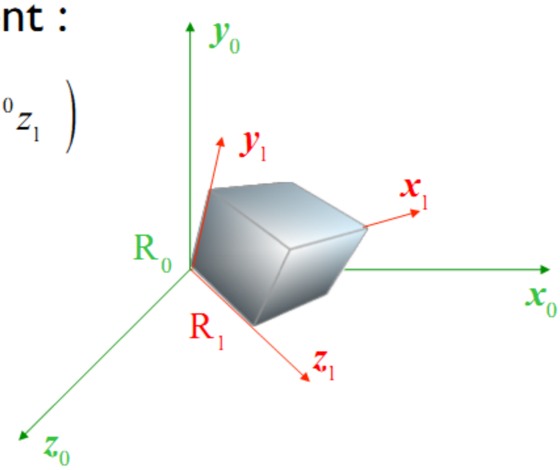
- Positionnement :

$$R_{01} = \begin{pmatrix} {}^{0}x_1 & {}^{0}y_1 & {}^{0}z_1 \end{pmatrix}$$

$$\det\left\{R_{01}\right\} = 1$$

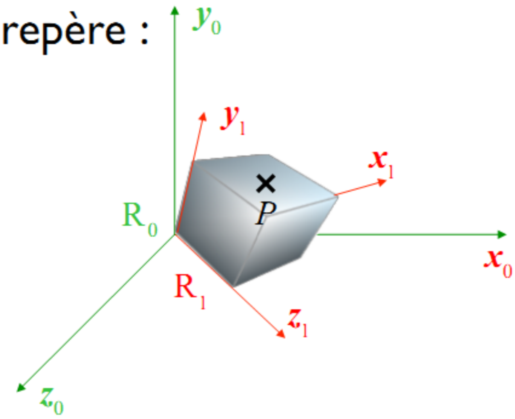
$$R_{01}^{-1} = R_{01}^{T} = R_{10}$$

$$R_{01} \in SO(3)$$



- Changement de repère :

$${}^{0}P = R_{01}\,{}^{1}P$$



- Composition :

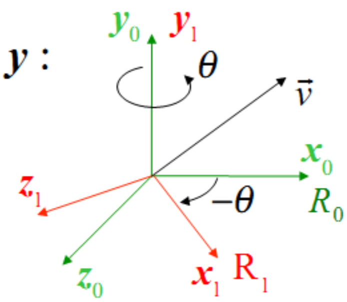
$${}^{1}P = R_{12}\,{}^{2}P$$

$${}^{0}P = R_{01}\,{}^{1}P$$

$$\Rightarrow {}^{0}P = R_{01}R_{12}\,{}^{2}P = R_{02}\,{}^{2}P$$

- Opérateur de rotation :
  - Ex : rotation de $\boldsymbol{v}$ autour de $\boldsymbol{y}$:

$$R_{(y_0,\theta)} = R_{10} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \cos\theta & & \sin\theta \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{pmatrix} \end{array}$$

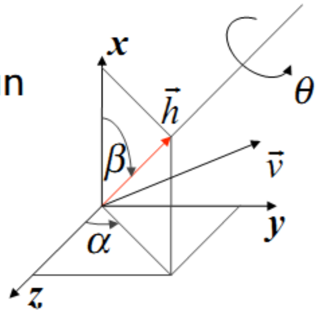


$${}^{0}\boldsymbol{v}' = R_{10}\,{}^{0}\boldsymbol{v} = R_{(y_0,\theta)}\,{}^{0}\boldsymbol{v}$$

  - Autres rotations élémentaires :

$$R_{(x_0,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta & -s\theta \\ 0 & s\theta & c\theta \end{pmatrix} \qquad R_{(z_0,\theta)} = \begin{pmatrix} c\theta & -s\theta & 0 \\ s\theta & c\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Opérateur de rotation : cas général
  - Rotation de $\boldsymbol{v}$ autour de $\boldsymbol{h}$ d'un angle θ :
  - Méthode :
    - Transformer $\boldsymbol{v}$ par une rotation qui amène $\boldsymbol{h}$ sur $\boldsymbol{x}$
    - Faire la rotation de θ autour de $\boldsymbol{x}$
    - Faire la transformation inverse pour ramener $\boldsymbol{h}$ à sa position initiale



$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = R_{(\boldsymbol{x},\alpha)} R_{(\boldsymbol{y},\beta)} R_{(\boldsymbol{x},\theta)} R_{(\boldsymbol{y},-\beta)} R_{(\boldsymbol{x},-\alpha)}$$

- Avec :

$$R_{(\boldsymbol{h},\theta)} = \begin{bmatrix} h_x^2 v_\theta + c\theta & h_x h_y v_\theta - h_z s\theta & h_x h_z v_\theta + h_y s\theta \\ h_x h_y v_\theta + h_z s\theta & h_y^2 v_\theta + c\theta & h_y h_z v_\theta - h_x s\theta \\ h_x h_z v_\theta - h_y s\theta & h_y h_z v_\theta + h_x s\theta & h_z^2 v_\theta + c\theta \end{bmatrix}$$

- Et : $v_\theta = 1 - c\theta \quad \boldsymbol{h} = \begin{bmatrix} h_x & h_y & h_z \end{bmatrix}^T$

1.1. Rotations : résumé

- Propriétés :
  - Ortho-normalité :
    - La norme des vecteurs lignes et des vecteurs colonne est égale à 1.
    - Les vecteurs ligne et les vecteurs colonne sont orthogonaux deux à deux.
  - L'inverse est égale à la transposée.
  - Le déterminant est égal à 1.
  - $R_{02} = R_{01} R_{12} \quad R_{(\boldsymbol{h}_1,\theta_1)(\boldsymbol{h}_2,\theta_2)} = R_{(\boldsymbol{h}_2,\theta_2)} R_{(\boldsymbol{h}_1,\theta_1)}$
  - Pas commutatif : $R_{01} R_{12} \neq R_{12} R_{01}$

1.2. Représentations de la rotation

- Soit R, une matrice de rotation :
  - R comprend 9 termes
  - Il y a 6 relations indépendantes entre ces termes :

$$R = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}_x & \boldsymbol{r}_y & \boldsymbol{r}_z \end{bmatrix}$$

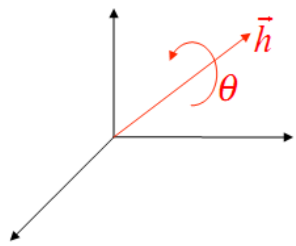
$$\boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_y = 0 \quad \boldsymbol{r}_x \cdot \boldsymbol{r}_z = 0 \quad \boldsymbol{r}_y \cdot \boldsymbol{r}_z = 0$$

$$\|\boldsymbol{r}_x\| = \|\boldsymbol{r}_y\| = \|\boldsymbol{r}_z\| = 1$$

  - Il n'y a donc que 3 termes indépendants.

I.2. Représentations de la rotation : angle/axe

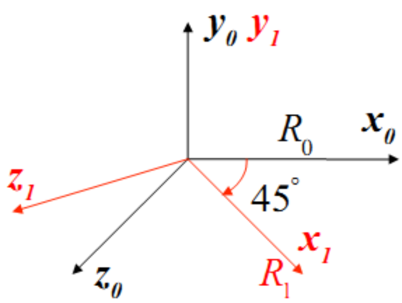
- Paramétrage angle/axe :
  - Toute rotation peut être représentée par un axe de rotation défini par un vecteur unitaire $\boldsymbol{h}$ autour duquel on effectue une rotation θ.



$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{11} + r_{22} + r_{33} - 1}{2}\right) \quad \boldsymbol{h} = \frac{1}{2\sin\theta}\begin{bmatrix} r_{32} - r_{23} \\ r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} \end{bmatrix}$$

  - Le vecteur $\theta\boldsymbol{h}$ définit entièrement la rotation.

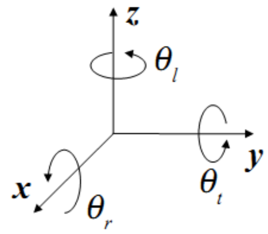
- Trouver le paramétrage angle/axe de la rotation entre les repères R_0 et R_1 :



1.2. Représentations de la rotation : roulis, tangage, lacet

- Définition :
  - 3 rotation successives autour des axes x (roulis, *roll*), y (tangage, *pitch*), et z (lacet, *yaw*) de R_0.

$$R_{01} = R_{(z,\theta_l)} R_{(y,\theta_t)} R_{(x,\theta_r)}$$



  - Il existe des définitions alternatives des noms des axes et/ou de la rotation associée.

- Matrice de rotation :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} c\theta_l & -s\theta_l & 0 \\ s\theta_l & c\theta_l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_t & 0 & s\theta_t \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta_t & 0 & c\theta_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\theta_r & -s\theta_r \\ 0 & s\theta_r & c\theta_r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c\theta_l c\theta_t & -s\theta_l c\theta_r + c\theta_l s\theta_t s\theta_r & s\theta_l s\theta_r + c\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ s\theta_l c\theta_t & c\theta_l c\theta_r + s\theta_l s\theta_t s\theta_r & -c\theta_l s\theta_r + s\theta_l s\theta_t c\theta_r \\ -s\theta_t & c\theta_t s\theta_r & c\theta_t c\theta_r \end{bmatrix}$$

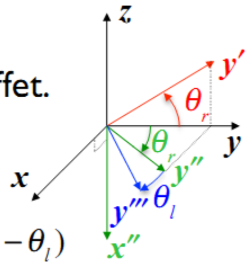
- Transformation inverse :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

  - Trouver θ_r, θ_t, θ_l à partir des r_{ij} de la matrice R_{01}
  - On définit $\theta_t = \arcsin(-r_{31})$
  - D'où :

$$\begin{cases} \theta_l = \arctan 2\left(\dfrac{r_{21}}{c\theta_t};\dfrac{r_{11}}{c\theta_t}\right) \\ \theta_r = \arctan 2\left(\dfrac{r_{32}}{c\theta_t};\dfrac{r_{33}}{c\theta_t}\right) \end{cases} \quad \text{pour } \cos\theta_t \neq 0$$

- Cas singulier : $\theta_t = \pm\dfrac{\pi}{2}$
  - Roulis et lacet ont le même effet.
  - *Gimbal lock* en anglais.



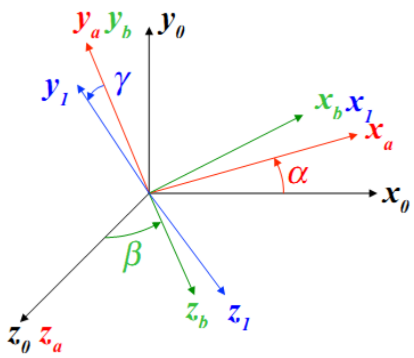
$$\theta_t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} r_{12} = \sin(\theta_r - \theta_l) & r_{13} = \cos(\theta_r - \theta_l) \\ r_{22} = \cos(\theta_l - \theta_r) & r_{23} = \sin(\theta_l - \theta_r) \end{cases}$$

On choisit $\theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = \arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$

$$\theta_t = -\frac{\pi}{2} : \theta_l = 0 \Rightarrow \theta_r = -\arctan 2\left(r_{12}, r_{22}\right)$$

1.2. Représentations de la rotation : angles d'Euler

- Principe :
  - Faire trois rotations successives d'angle α, β, γ autour des axes ***z***, ***y*** et ***x*** du repère <u>courant</u>.



- Matrice de rotation :

$$R_{01} = R_{0a} R_{ab} R_{b1} \quad \text{avec} \quad R_{0a} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{ab} = \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} R_{b1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où : } R_{01} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix}$$

- Transformation inverse :

$$R_{01} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

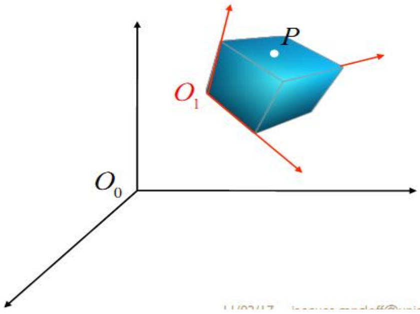
$$\left.\begin{array}{c} \beta = \arcsin(-r_{31}) \\ \alpha = \arctan 2\left(\dfrac{r_{21}}{\cos\beta} ; \dfrac{r_{11}}{\cos\beta}\right) \\ \gamma = \arctan 2\left(\dfrac{r_{32}}{\cos\beta} ; \dfrac{r_{33}}{\cos\beta}\right) \end{array}\right\} \text{pour } \beta \neq \pm\frac{\pi}{2}$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = \arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

$$\beta = -\frac{\pi}{2} : \alpha = 0 \quad \gamma = -\arctan 2(r_{12}, r_{22})$$

1.3. Attitude

- L'attitude du repère R_1 par rapport au repère R_0 est définie par la translation des origines et par la rotation R_{01} : $\left(\overline{O_0O_1}, R_{01}\right)$



- Une attitude p (*pose* en anglais) est définie de manière minimale par 6 paramètres : 3 pour la translation et 3 pour la rotation :

$$p = \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

3 coordonnées de translation

3 coordonnées de rotation : Angles d'Euler, angle/axe, …

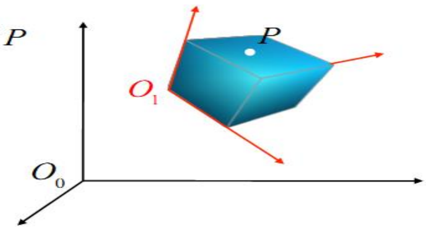
- Une attitude peut aussi être représentée par une matrice homogène.
- La matrice homogène est aussi :
  - Un opérateur de changement de repère
  - Un opérateur de transformation rigide

$$M_{01} = \begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}\left(\boldsymbol{O_0O_1}\right) \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice homogène de transformation entre le repère R_0 et le repère R_1

1.4. Les matrices de transformations homogènes

- On a : ${}^{0}P = {}^{0}\left(\boldsymbol{O_0O_1}\right) + R_{01}\,{}^{1}P$



- D'où :

$$\begin{bmatrix} {}^{0}P \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} R_{01} & {}^{0}\left(\boldsymbol{O_0O_1}\right) \\ 0 \quad 0 \quad 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_{01}} \underbrace{\begin{bmatrix} {}^{1}P \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Coordonnées homogènes}}$$

- La matrice homogène est un opérateur de transformation rigide
- Un opérateur de transformation rigide appliqué à tous les points d'un solide ne déforme pas ce solide
- La matrice homogène applique une transformation équivalente à la composition d'une translation et d'une rotation
- Composition :

$M_{02} = M_{01} M_{12}$ Opérateur de changement de repère de coordonnées de points de R_2 vers R_0

- Inverse :

$$M = \begin{bmatrix} R & T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} R^T & -R^T T \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}$$

- Pas commutatif !

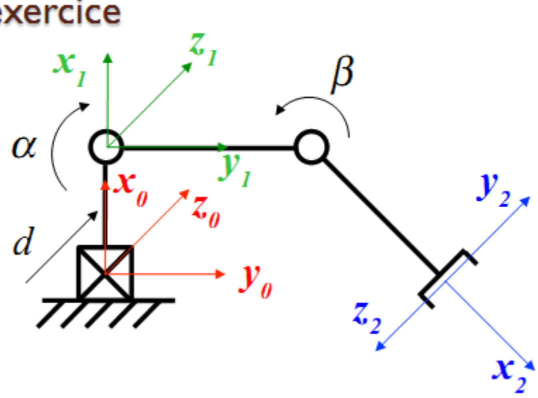
1.4. Matrices homogènes : exercice

- Soit le robot :

$\alpha = \sphericalangle(y_0, y_1)$

$\beta = \sphericalangle(y_1, x_2)$

$d =$ translation suivant z_0



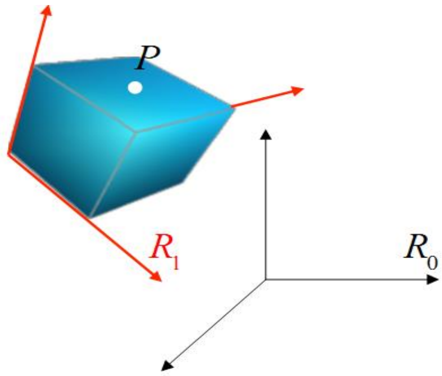
- Avec :
  - a_1 la distance entre l'origine de R_0 et celle de R_1
  - a_2 la longueur du premier bras
  - a_3 la longueur du dernier bras
  - Les angles sont nuls lorsque le bras est horizontal
- Déterminer M_{01} , M_{12} puis M_{02}

2. Cinématique

2.1. Vitesse d'un solide

Soient :

- R_1 un repère lié à un solide en mouvement par rapport à un repère R_0
- $M_{01}(t)$ la matrice homogène de transformation entre R_0 et R_1 en fonction du temps



$$\begin{bmatrix} {}^0P(t) \\ 1 \end{bmatrix} = M_{01}(t) \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^0\dot{P}(t) \\ 1 \end{bmatrix} = \dot{M}_{01}(t) \begin{bmatrix} {}^1P \\ 1 \end{bmatrix}$$

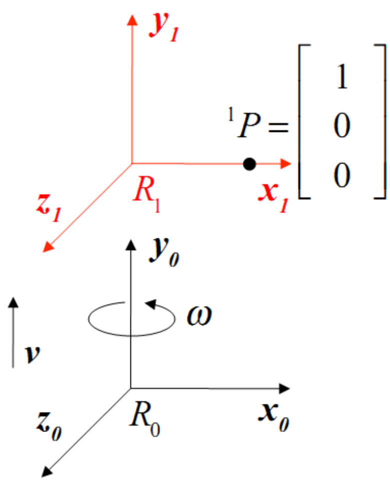
$$M_{01}(t) = \begin{bmatrix} R_{01}(t) & T_{01}(t) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^0\dot{P}(t) = \dot{R}_{01}(t)\,{}^1P + \dot{T}_{01}(t) \quad (2.1)$$

Vitesse de translation de O_1 dans R_0

Vitesse d'un solide : exemple

Soient :

- P un point d'un solide lié à R_1 en mouvement par rapport à R_0
- Le mouvement est la composition d'une translation verticale de vitesse v et d'une rotation d'axe y_0 et de vitesse ω . Pour $t=0$ on a $R_1=R_0$.



On a :

$$R_{01}(t) = \begin{bmatrix} c(\omega t) & 0 & s(\omega t) \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\omega t & 0 & c\omega t \end{bmatrix} \quad T_{01}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ vt \\ 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$^{0}\dot{P}(t)=\begin{bmatrix}-\omega s(\omega t) & 0 & \omega c(\omega t)\\ 0 & 0 & 0\\ -\omega c(\omega t) & 0 & -\omega s(\omega t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\v\\0\end{bmatrix}$$

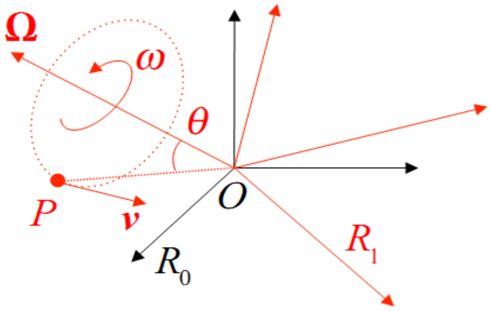
$$=\begin{bmatrix}-\omega s(\omega t)\\ v\\ -\omega c(\omega t)\end{bmatrix}\Rightarrow {}^{0}\dot{P}(0)=\begin{bmatrix}0\\ v\\ -\omega\end{bmatrix}$$

2.2. Vecteur vitesse de rotation

- C'est un vecteur dont l'axe coïncide avec l'axe de rotation, qui est dirigé suivant le « principe du tire-bouchon » et dont la norme est égale à la valeur de la vitesse angulaire.
- Note :
  - Dans l'exemple précédent, le vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0 est dirigé suivant $\boldsymbol{y_0}$ et a pour norme ω.

Application :

- Trouver la vitesse du point P lié au repère R_1 qui tourne suivant un vecteur vitesse de rotation $\boldsymbol{\Omega}$ par rapport à R_0



- On a : $\|\boldsymbol{v}\|=\|\boldsymbol{\Omega}\|\cdot\left\|\overrightarrow{OP}\right\|\cdot\sin\theta$
- De plus : $\boldsymbol{v}\perp\left(\overrightarrow{OP},\boldsymbol{\Omega}\right)$
- Et le sens de $\boldsymbol{v}$ est celui de la règle des 3 doigts.

Vitesse de P dans le mouvement de R_1 par rapport à R_0 exprimé dans R_0

- D'où : $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{\Omega}\times\overrightarrow{OP}$ $\quad {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{P}={}^{0}\boldsymbol{\Omega}\times{}^{0}(\boldsymbol{OP})\quad(2.2)$

matrice anti-symétrique

On définit :

- Les vecteurs : $\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_x & a_y & a_z \end{bmatrix}^T$ $\quad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$
- La matrice $AS(.)$:

$$AS(\boldsymbol{a}) = \begin{bmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{bmatrix}$$

D'où :

$$AS(\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} a_y v_z - a_z v_y \\ a_z v_x - a_x v_z \\ a_x v_y - a_y v_x \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v} \Rightarrow \boxed{{}^0\boldsymbol{v}_{01}^P = AS({}^0\boldsymbol{\Omega})R_{01}\,{}^1P}$$

2.3. Mouvement rigide

- Le repère R_1 se déplace par rapport à R_0 en translation et en rotation : on parle de mouvement rigide. Eq. (2.3) devient :

$$ {}^0\boldsymbol{v}_{01}^P = AS({}^0\boldsymbol{\Omega})R_{01}\,{}^1P + {}^0\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \qquad (2.4)$$

Vitesse de l'origine de R_1

Si on compare (2.4) et (2.1) :

$$\boxed{AS({}^0\boldsymbol{\Omega})R_{01} = \frac{d}{dt}R_{01}}$$

exercice

Mouvement de R_1 par rapport à R_0 :

- R_0 et R_1 ont leur origine commune,
- Les angles de roulis et tangage évoluent selon ωt
- L'angle de lacet est constant et nul

Question :

- Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de rotation de R_1 par rapport à R_0

2.4. Torseur cinématique et composition de vitesses

- En robotique, on a l'habitude de définir le torseur cinématique de la manière suivante :

$$ {}^{0}\boldsymbol{C}_{01} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_1} \\ {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} \end{bmatrix} $$

Vecteur $6x1$ des coordonnées de vitesse linéaire et angulaire de R_1 par rapport à R_0 exprimées dans R_0

Composition des vitesses

Soient :

${}^{0}\boldsymbol{C}_{01}$ le torseur cinématique de R_1 par rapport à R_0

${}^{1}\boldsymbol{C}_{12}$ le torseur cinématique de R_2 par rapport à R_1

Loi de composition :

$$ {}^{0}\boldsymbol{C}_{02} = \begin{bmatrix} {}^{0}\boldsymbol{v}_{01}^{O_2} + {}^{0}\boldsymbol{v}_{12}^{O_2} = {}^{0}\boldsymbol{v}_{02}^{O_2} \\ {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{01} + {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{12} = {}^{0}\boldsymbol{\Omega}_{02} \end{bmatrix} $$

Vitesse de O_2 dans le mouvement de 1 par rapport à 0 en figeant le mouvement de 2 par rapport à 1.