

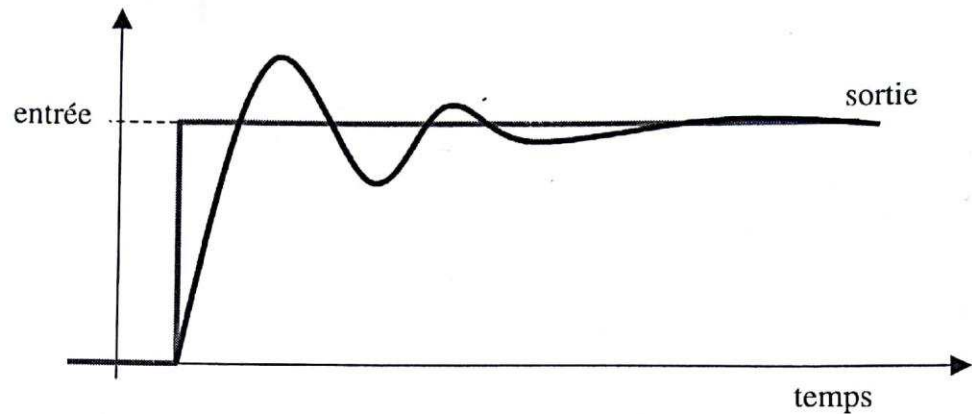
Chapitre 1: Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermé dans le domaine fréquentiel

Stabilité d'un système asservi

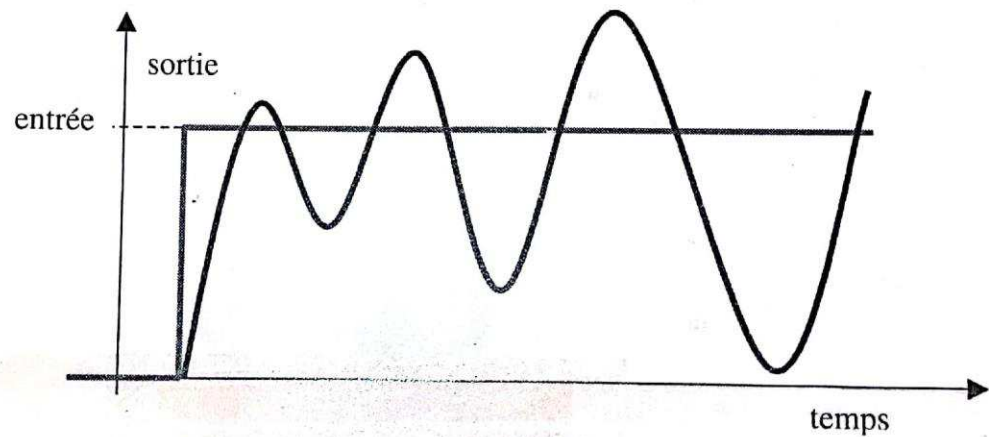
1. Notion de stabilité et définition.

Définition n° 1 : on dit que le système est stable si pour une entrée bornée, la sortie reste bornée quelles que soient les perturbations.

Système stable



Système instable



2. Condition fondamentale de stabilité d'un système asservi.

Etudions la stabilité du système en considérant la deuxième définition : ce qui revient à considérer que le système est soumis à l'instant $t = 0$ à une impulsion.

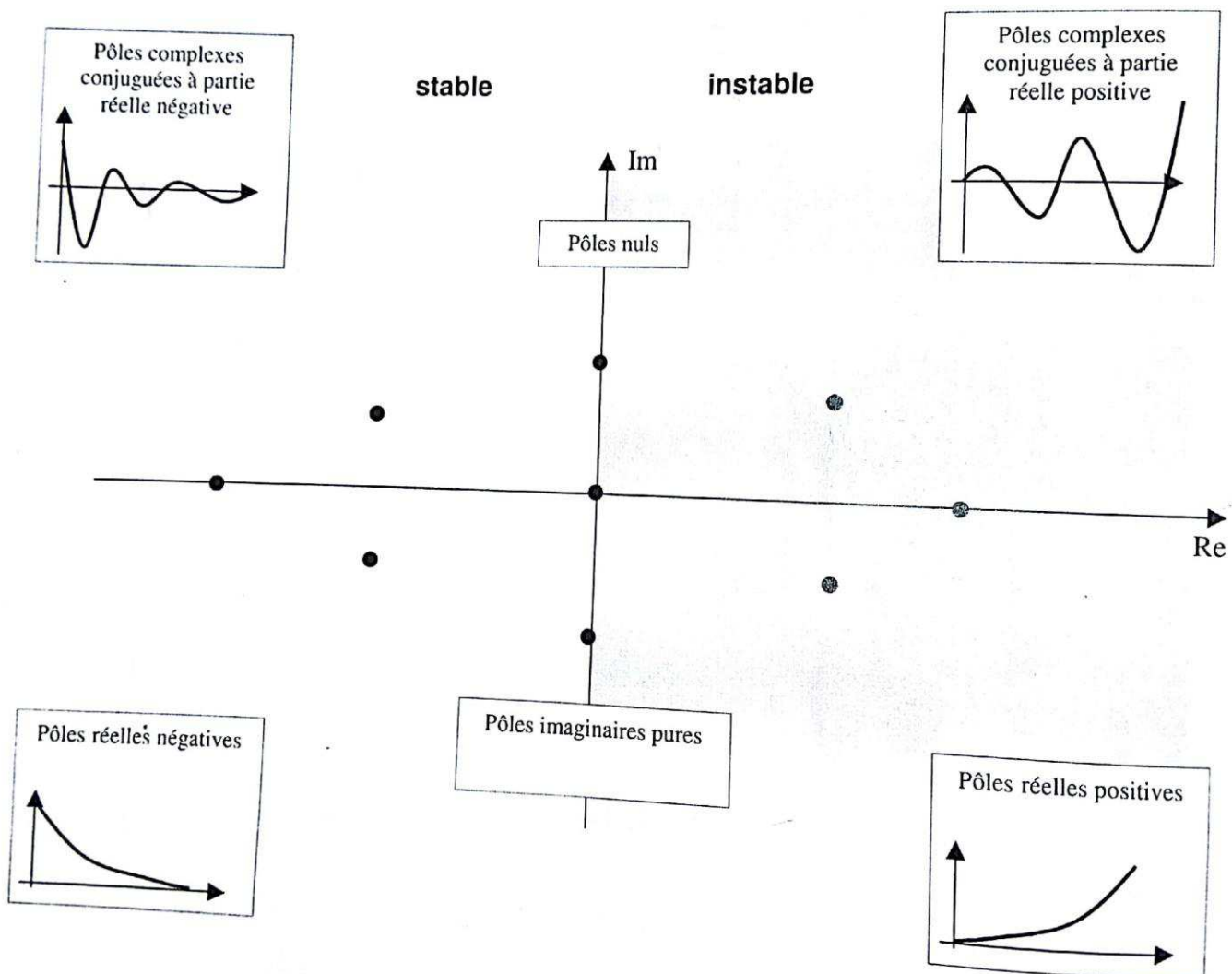
$$S(p) = H(p) \text{ car } E(p) = 1$$

$$\text{Avec FTBF} = H(p) = \frac{T(p)}{1 + G(p).T(p)}$$

- **Condition nécessaire et suffisante de stabilité :**

Un système linéaire invariant est stable si et seulement si tous ses pôles ont une partie réelle négative.

- **Position des pôles de $H(p)$ dans le repère complexe (ou des zéros de $FTBO + 1$).**



Il suffit donc d'avoir une méthode pour déterminer le signe des parties réelles des pôles de la fonction de transfert du système

Critère algébrique de stabilité :

a- Critère de Routh-Hurwitz =

Le Critère de Routh est un Critère permettant de déterminer à partir du polynôme dénominateur de la fonction de transfert le signe des racines de ce polynôme sans avoir à résoudre l'équation.

$$F(p) = \frac{K G(p)}{1 + K G(p) \cdot H(p)} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

$$D(p) = 1 + K G(p) \cdot H(p) \text{ Eq caractéristique}$$

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_0$$

Condition nécessaire et non suffisante C.N.N.S =

Pour que le système soit stable il faut que tous les coefficients de l'équation caractéristique soient de même signe

table de Routh:

C'est une condition et suffisante C.N.S dans le cas ou C.N.N.S est vérifiée. On a construit le tableau de Routh qui permet de déterminer le signe des racines d'un polynôme.

$$D(p) = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + b_{n-2} p^{n-2} + \dots + b_1 p^1 + b_0 \quad (n \text{ paire})$$

p^n	b_n	b_{n-2}	b_{n-4}	b_{n-6}	b_0
p^{n-1}	b_{n-1}	b_{n-3}	b_{n-5}	$b_{n-7} \dots b_1$	
p^{n-2}	C_1	C_2	C_3		
p^{n-3}	D_1	D_2			
$\vdots$					
p^1					
p^0					

$$C_1 = \frac{-1}{b_{n-1}} \begin{bmatrix} b_n & b_n \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{bmatrix} = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$C_2 = \frac{b_{n-1} \cdot b_{n-4} - b_n \cdot b_{n-5}}{b_{n-1}}$$

$$D_1 = \frac{C_1 \cdot b_{n-3} - b_{n-1} \cdot C_2}{C_1} \quad D_2 = \frac{C_1 \cdot b_{n-5} - C_3 b_{n-1}}{C_1}$$

Enoncé du Critère : Un système est stable selon le critère de Routh si toutes les Coefficient de 1^{ère} Colonne de la table sont de m^{ême} signe

* Le nombre de racine à partie réelle positive égale au nombre de changement de signe de la 1^{ère} Colonne.

Exemple 1:

$$F_1(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + p + 1p^0}$$

C.N.N.S → toutes les Coef sont de même signe

C.N.S Critère de Routh.

$$p^3 \quad 1 \quad 1$$

$$p^2 \quad 2 \quad 1$$

$$p \quad \frac{(2)(1) - (1)(1)}{2} = \frac{1}{2} \quad 0$$

$$p^0 \quad \frac{(\frac{1}{2})(1) - (2)(0)}{\frac{1}{2}} = 1$$

toutes les Coef de la 1^{re} colonne sont de même signe → système stable.

Exemple 02:

$$F(p) = \frac{K}{p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 2}$$

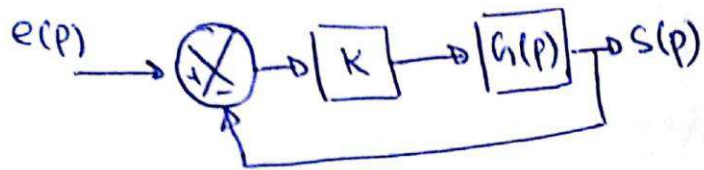
C.N.N.S → Vérifier

$$\begin{array}{l} p^4 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \\ p^3 \quad 2 \quad 4 \quad 0 \\ p^2 \quad \frac{(2)(1) - (1)(4)}{2} = -1 \quad 2 \quad 0 \\ p \quad 8 \quad 0 \\ p^0 \quad 2 \end{array}$$

On a deux changements de signe ⇒
on a 2 racines à partie réelle positive
→ système instable.

Exercice d'application

On considère le système donné par le schéma bloc suivant



$$G(p) = \frac{1}{3p^3 + 2p^2 + p + 5}$$

- ① Le système en B.O est-il stable
- ② pour quelle valeur de K le système en B.F sera stable.

Solution:

Eq. Cara $\Rightarrow 3p^3 + 2p^2 + p + 5 = 0$ C.N.N.S est vérifié

F.T.B.O $e(p) \rightarrow \boxed{KG(p)} \rightarrow S(p)$ $KG(p) = \frac{K}{3p^3 + 2p^2 + p + 5}$

Table de Routh

p^3	3	1	0
p^2	2	5	0
p^1	$-\frac{13}{2}$	0	
p^0	5		

On a deux changements de signe $\Rightarrow$ 2 racines à partie réelle positive donc le système en B.O est instable.

La fonction de transfert en B.F.:

$$F(p) = \frac{K h(p)}{1 + K h(p)} = \frac{K}{3p^3 + 2p^2 + p + 5 + K}$$

$$\text{Eq. Caract.} = 3p^3 + 2p^2 + p + 5 + K$$

$$\text{C.N.N.S.} = 5 + K > 0 \Rightarrow \boxed{K > -5}$$

Table de Routh

p^3	3	1
p^2	2	$5 + K$
p^1	$\frac{-13 - 3K}{2}$	0
p^0	$5 + K$	

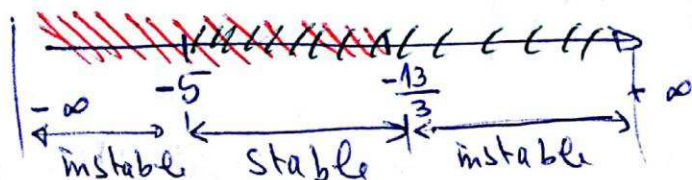
Pour que le système soit stable =

$$\begin{cases} \frac{-13 - 3K}{2} > 0 \Rightarrow K < -\frac{13}{3} \\ 5 + K > 0 \rightarrow \text{vérifier C.N.N.S.} \end{cases}$$

$$K > -5 \Rightarrow K \in]-5, +\infty[$$

$$K < -\frac{13}{3} \Rightarrow K \in]-\infty, -\frac{13}{3}[$$

pour avoir un système stable en B.F. on doit introduire un gain de valeur $K \in]-5, -\frac{13}{3}[$



Cas particulier:

Une ligne de zéro indique la présence d'une racine imaginaire pure, le système est juste instable (limite de stabilité) dans ce cas on utilise le polynôme auxiliaire.

Exemple:

$$D(p) = p^3 + 10p^2 + 16p + 160 = 0$$

p^3	1	16	
p^2	10	160	→ polynôme Auxiliaire
p	0 (20)	0	
p^0	160		

$$P_{Aux} = 10p^2 + 160 \Rightarrow P'_{Aux} = 20p$$

polynôme auxiliaire, on le considère la ligne précédente

$$P_{Aux} = 10p^2 + 160$$

Le système est juste instable (la limite de stabilité) donc on a deux racines imaginaire pure

$$P_{Aux} = 10p^2 + 160 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Aux} = \pm 4j}$$

Exemple (2) =

$$D(p) = p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0$$

p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0(2)	0	0
p^0	4		

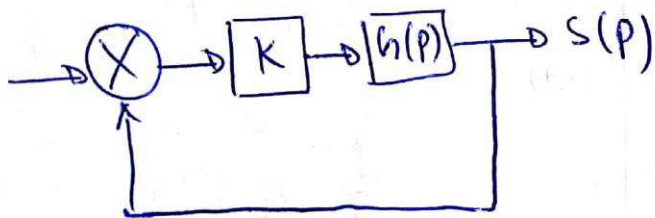
Le système est à la limite de stabilité 2 racines imaginaires pures

$$P_{Aux} = p^2 + 4 \Rightarrow P_{1,2} = \pm 2j$$

$$P'_{Aux} = 2p$$

→ les autres racines ont à partie réelle pure.

Exercice d'application:



$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 4p}$$

① Étudier la stabilité en B.F

② Déterminer les pôles pour $K=8$

(63)

① FTBF $F(p) = \frac{Kh(p)}{1 + Kh(p)} = \frac{K}{p^3 + 2p^2 + 4p + K}$

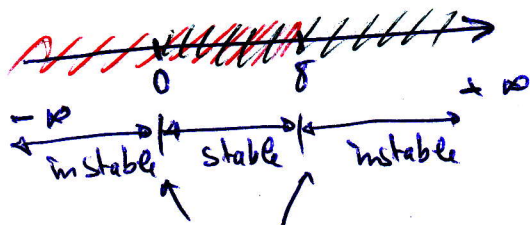
Eq. Car $p^3 + 2p^2 + 4p + K$

C.N.N.S $K > 0$

p^3	1	4
p^2	2	K
p	$\frac{8-K}{2}$	0
p^0	K	

Le système est stable si

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{8-K}{2} > 0 \\ K > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} K < 8 \\ K > 0 \end{array} \right.$$



limite
de
stabilité

système stable $\Rightarrow K \in]0, 8[$

② pour $K=8$ limite de stabilité

$\rightarrow$ 2 pôles Im pure

Eq. Car $p^3 + 2p^2 + 4p + 8$

p^3	1	4	$P_{Aux} = 2p^2 + 8$
p^2	2	8	$P'_{Aux} = 4p$
p	0(4)		$P_{Aux} = 0 \Rightarrow$
p^0	8		$P_{1,2} = \pm 2j$

Lien de transfert

Def: ce sont des outils qui permettent de déterminer la réponse fréquentielle d'un système en boucle ouverte et conclure les performances de ce système en système en B.F.

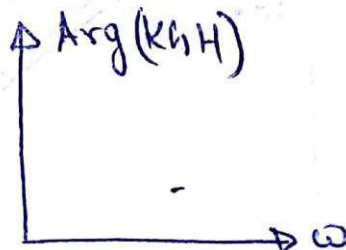
Diagramme de Bode: Le passage au domaine fréquentiel s'effectue en remplaçant $p = j\omega$ $\omega = 2\pi f$

$$K_{GH}(p) = K_{GH}(j\omega) = |K_{GH}| e^{Arg(K_{GH})}$$

$|K_{GH}|$ module de $K_{GH}(j\omega)$

$Arg(K_{GH})$ Argument de $K_{GH}(j\omega)$

Le tracé de Bode:



Le tracé du module s'effectue sur une échelle logarithmique graduée en Décibel.

$$|K_{GH}(j\omega)| = 20 \log |K_{GH}|$$

Exemple tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante

$$G_H(p) = \frac{k}{1 + \tau p} \quad p \rightarrow j\omega \quad \text{avec } \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

$$G_H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$|G_H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log \frac{K}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{Arg}(G_H(j\omega)) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Les Asymptotes:

1^{er} Cas $\omega \ll \omega_0$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K$$

$$\text{Arg}(G_H(j\omega)) = 0$$

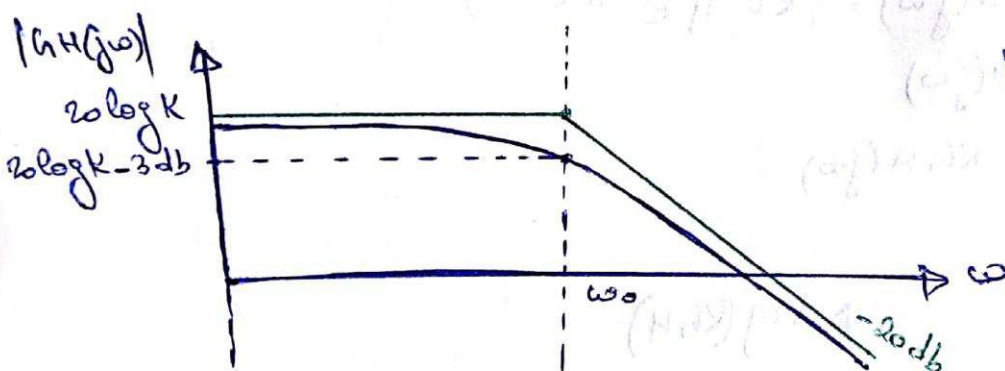
2^e Cas $\omega \gg \omega_0$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K - 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \quad \text{Arg}(G_H(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$$

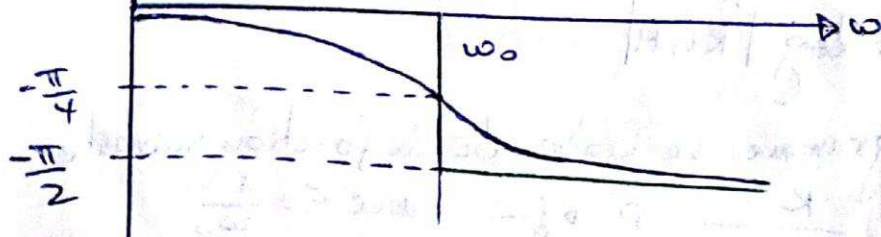
Cas particulier

$$|G_H(j\omega)| = 20 \log K - 20 \log \sqrt{2} = 20 \log K - 3 \text{ db}$$

$$\text{Arg}|G_H(j\omega)| = -\frac{\pi}{4}$$



$\text{Arg}(G_H(j\omega))$



Exemple 02 :

$$G_H(p) = K(1 + \tau p) \quad K > 1 \quad \tau = \frac{1}{\omega_0}$$

$$G_H(j\omega) = K(1 + \frac{1}{\omega_0} j\omega)$$

$$|G_H(j\omega)| = K \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + (\frac{\omega}{\omega_0})^2}$$

$$\text{Arg}[G_H(j\omega)] = \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

Les Asymptotes :

1^{re} Cas $\omega \ll \omega_0$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K$$

$$\text{Arg}[G_H(j\omega)] = 0$$

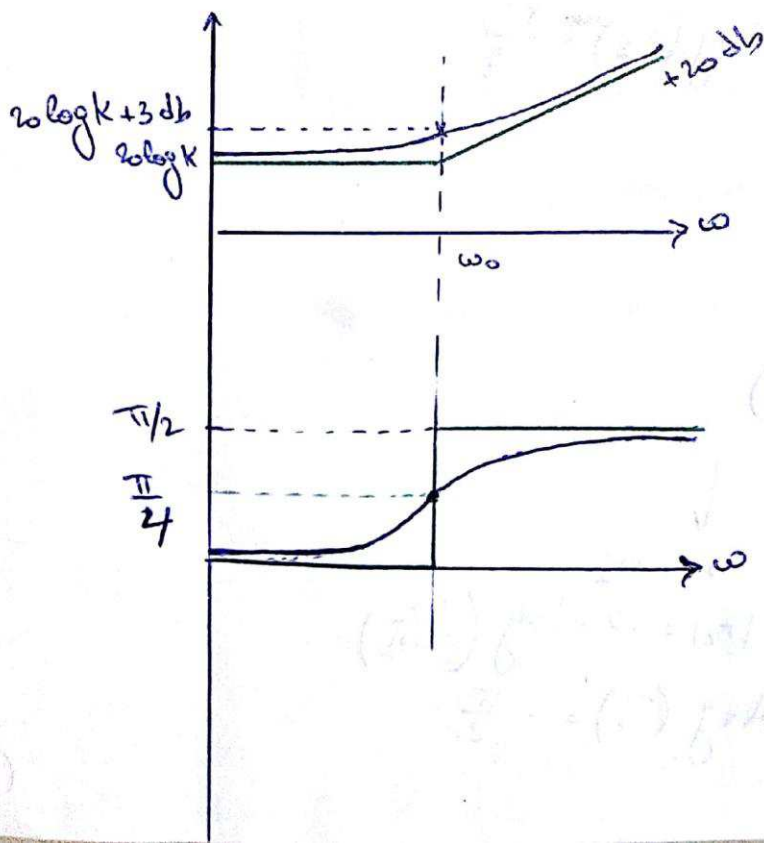
2^e Cas $\omega \gg \omega_0$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\text{Arg}[G_H(j\omega)] = \frac{\pi}{2}$$

Cas particulier : $|G_H(j\omega_0)| = 20 \log K + 3 \text{ db}$

$$\text{Arg}[G_H(j\omega_0)] = \frac{\pi}{4}$$



Exemple 03 =

$$G_H(p) = \frac{K(1 + \tau_0 p)}{(1 + \tau_1 p)(1 + \tau_2 p)^2}$$

$$\tau_0 = \frac{1}{\omega_0}, \tau_1 = \frac{1}{\omega_1}, \tau_2 = \frac{1}{\omega_2}$$

$$\text{avec : } \omega_0 < \omega_1 < \omega_2$$

$$|G_H(j\omega)|_{db} = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} - 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} - 20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)$$

$$\text{Arg}(G_H(j\omega)) = \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - 2 \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

1^{re} partie =

$$|F_1| = 20 \log K + 20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{Arg}(F_1) = \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\omega \ll \omega_0$$

$$|F_1| = 20 \log K$$

$$\text{Arg}(F_1) = 0$$

$$\omega \gg \omega_0$$

$$|F_1| = 20 \log K + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\text{Arg}(F_1) = \frac{\pi}{2}$$

2^e partie =

$$|F_2| = -20 \log \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}$$

$$\text{Arg}(F_2) = -\text{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

$$\omega \ll \omega_1$$

$$|F_2| = 0$$

$$\text{Arg}(F_2) = 0$$

$$\omega \gg \omega_1$$

$$|F_2| = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

$$\text{Arg}(F_2) = -\frac{\pi}{2}$$

3^e partie =

$$|F_3| = -20 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)$$

$$\text{Arg}(F_3) = -2 \text{Arctg} \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)$$

$$\omega \ll \omega_2 \qquad \omega \gg \omega_2$$

$$|F_3| = 0$$

$$\text{Arg}(F_3) = 0$$

$$|F_3| = -20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 = -40 \log \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)$$

$$\text{Arg}(F_3) = -\pi$$

pas de pent = 0 (ouverte)

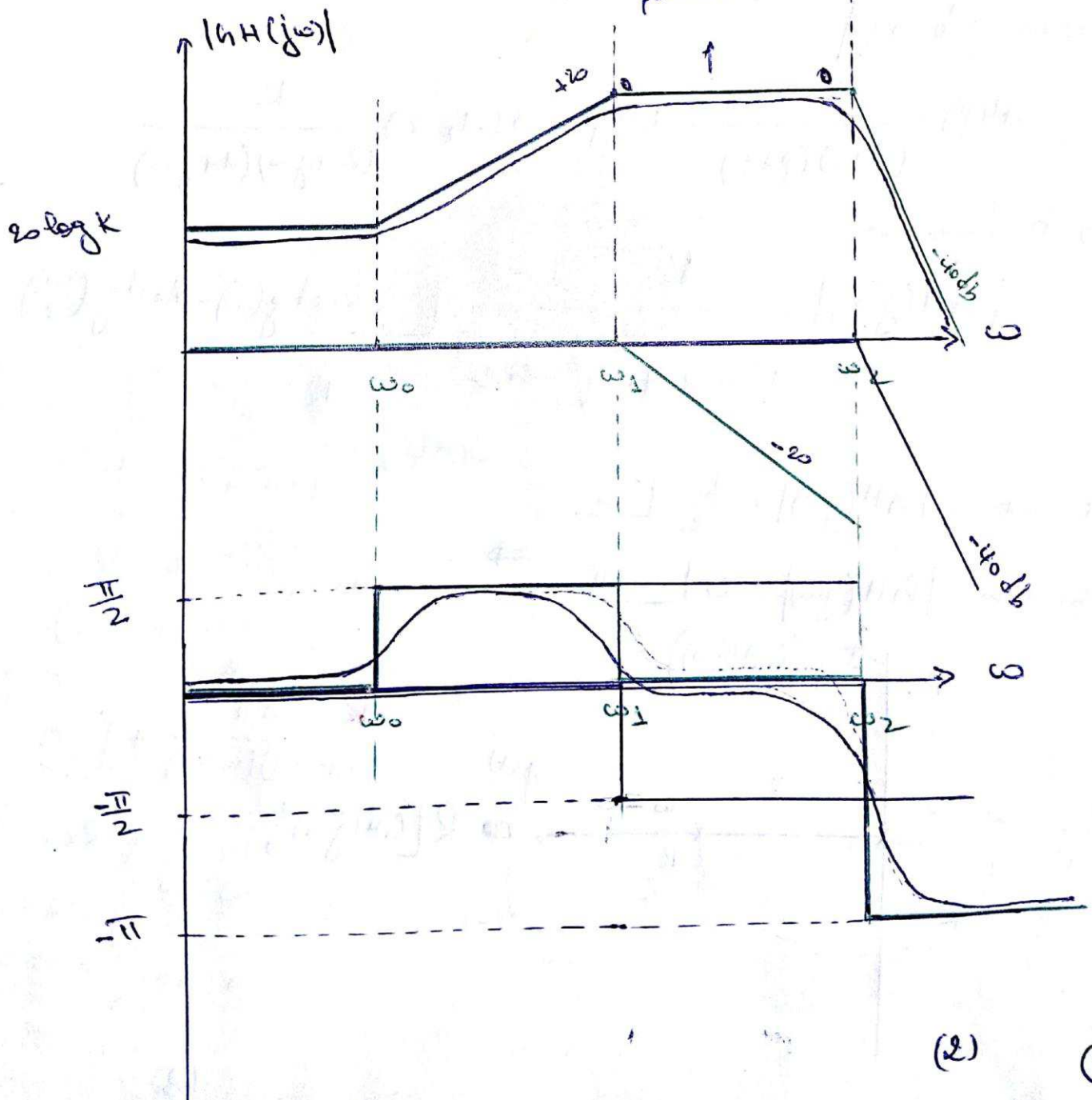
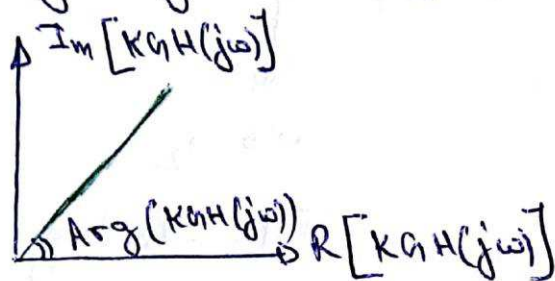


Diagramme de Nyquist

Def : Le diagramme de Nyquist au lieu de transfert dans le plan de Nyquist et le lieu de point de finissent les coordonnées polaire de Nyquist et le lieu de point de finissent les coordonnées polaire par un rayon vecteur égal $KH(j\omega)$ et par angle à l'argument de $KH(j\omega)$ angle égale à l'argument de $KH(j\omega)$



$$KH(j\omega) = \text{Re}[KH(j\omega)] + j \text{Im}[KH(j\omega)]$$

Exemple 01

$$G_H(p) = \frac{K}{(p+2)(p+1)}, \text{ Les poles } (-1, -2) \quad \frac{K}{(2+j\omega)(1+j\omega)}$$

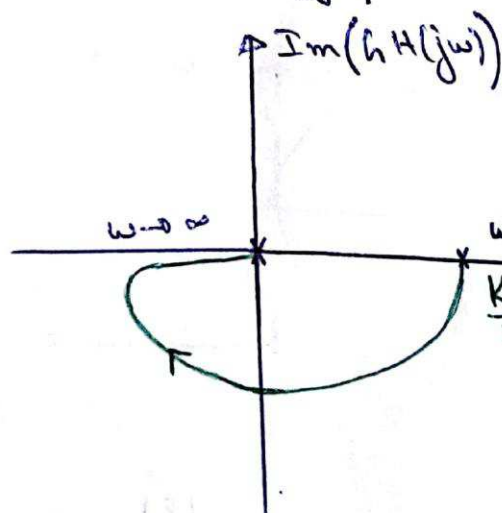
$$(\omega): 0 \rightarrow \infty$$

$$|G_H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{\omega^2+4} \sqrt{\omega^2+1}} \quad \begin{matrix} -\text{Arctg}(\omega) - \text{Arctg}(\frac{\omega}{2}) \end{matrix}$$

$$G_H(p) = \frac{K(-j\omega+2)(-j\omega+1)}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad |G_H(j\omega)| = \frac{K}{2} \quad 0$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |G_H(j\omega)| = 0 \quad -\pi \Rightarrow$$



$$\begin{aligned} &= \frac{K(-\omega^2+2-3j\omega)}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)} \\ &= \frac{\overbrace{K(-\omega^2+2)}^{\text{Re}}}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)} + j \frac{\overbrace{-3\omega K}^{\text{Im}}}{(\omega^2+4)(\omega^2+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega \rightarrow 0 &\begin{cases} \text{Re} = \frac{K}{2} \\ \text{Im} = 0 \end{cases} \\ \omega \rightarrow \infty &\begin{cases} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Exemple 02

$$KGH(p) = \frac{K}{p(p+2)} \quad \text{2 poles } (0, -2)$$

$$= \frac{K}{j\omega(j\omega+2)}$$

$$|KGH(j\omega)| = \frac{K}{\omega \sqrt{\omega^2+4}} \quad \left| \frac{-1}{2} - \text{Arctg}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|$$

$$KGH(j\omega) = \frac{K(-j\omega)(-j\omega+2)}{\omega^2(\omega^2+4)}$$

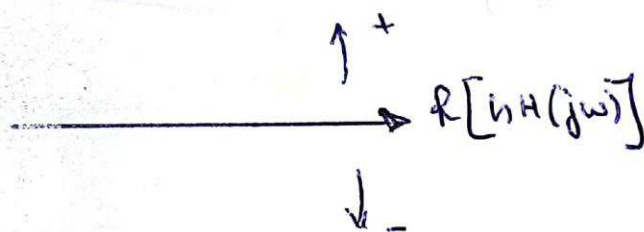
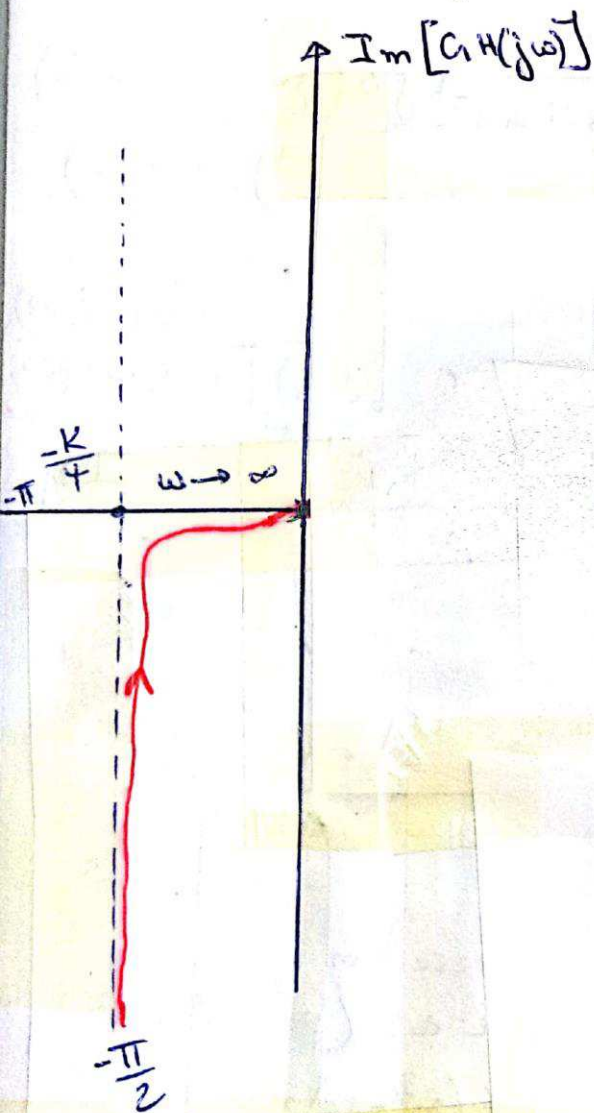
$$\omega \rightarrow 0 \quad |KGH(j\omega)| = \infty \quad \left| \frac{-\pi}{2} \right|$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |KGH(j\omega)| = 0 \quad \left| -\pi \right|$$

$$KGH(j\omega) = \frac{K[-\omega^2 - 2j\omega]}{\omega^2(\omega^2+4)}$$

$$= \frac{-K\omega^2 - 2jK\omega}{\omega^2(\omega^2+4)}$$

$$= \frac{-K\omega^2}{\omega^2(\omega^2+4)} + j \frac{-2K\omega}{\omega^2(\omega^2+4)}$$



$$KGH(j\omega) = \underbrace{\frac{-K}{\omega^2+4}}_{\text{Re}} + j \underbrace{\frac{-2K\omega}{\omega(\omega^2+4)}}_{\text{Im}}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = -\frac{K}{4} \\ \text{Im} = -\infty \end{array} \right.$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{array} \right.$$

Exemple 03

$$K_{GH}(p) = \frac{K}{p(p+3)(p+4)}$$

Les p-poles 0, -3, -4

$$K_{GH}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+3)(j\omega+4)}$$

$$[K_{GH}(j\omega)] = \frac{K}{\omega \sqrt{\omega^2+9} \sqrt{\omega^2+16}} \left[-\frac{\pi}{2} - \text{Arctg} \frac{\omega}{3} - \text{Arctg} \frac{\omega}{4} \right]$$

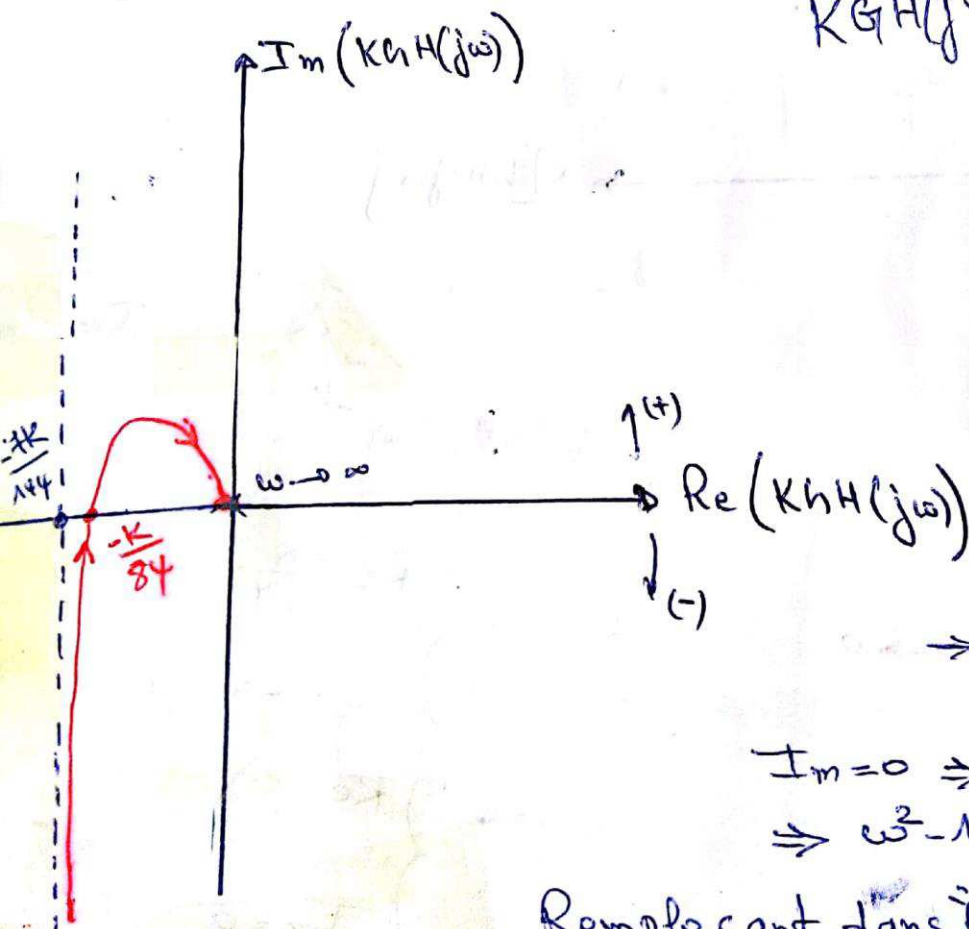
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega \rightarrow 0 \quad K_{GH}(j\omega) = \infty \quad \left[-\frac{\pi}{2} \right] \\ \omega \rightarrow \infty \quad K_{GH}(j\omega) = 0 \quad \left[-\frac{3\pi}{2} \right] \end{array} \right.$$

$$K_{GH}(j\omega) = \frac{-Kj\omega(-j\omega+3)(-j\omega+4)}{\omega^2(\omega^2+9)(\omega^2+16)}$$

$$K_{GH}(j\omega) = \underbrace{\frac{-7K}{(\omega^2+9)(\omega^2+16)}}_{\text{Re}} + j \underbrace{\frac{K(\omega^2-12)}{\omega(\omega^2+9)(\omega^2+16)}}_{\text{Im}}$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = \frac{-7K}{144} \\ \text{Im} = -\infty \end{array} \right.$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{array} \right.$$



→ l'intersection avec l'axe Réel: (pt critique)

$$\begin{aligned} \text{Im} = 0 &\Rightarrow K(\omega^2-12) = 0 \\ &\Rightarrow \omega^2-12=0 \Rightarrow \omega_{\text{crit}} = \pm \sqrt{12} \end{aligned}$$

Remplaçant dans "Re" ou dans $|K_{GH}(j\omega)|$

$$\text{on trouve } \text{Re} = \frac{-7K}{(12+9)(12+16)} = \frac{-K}{84}$$

Théorème de stabilité des systs en B.F:

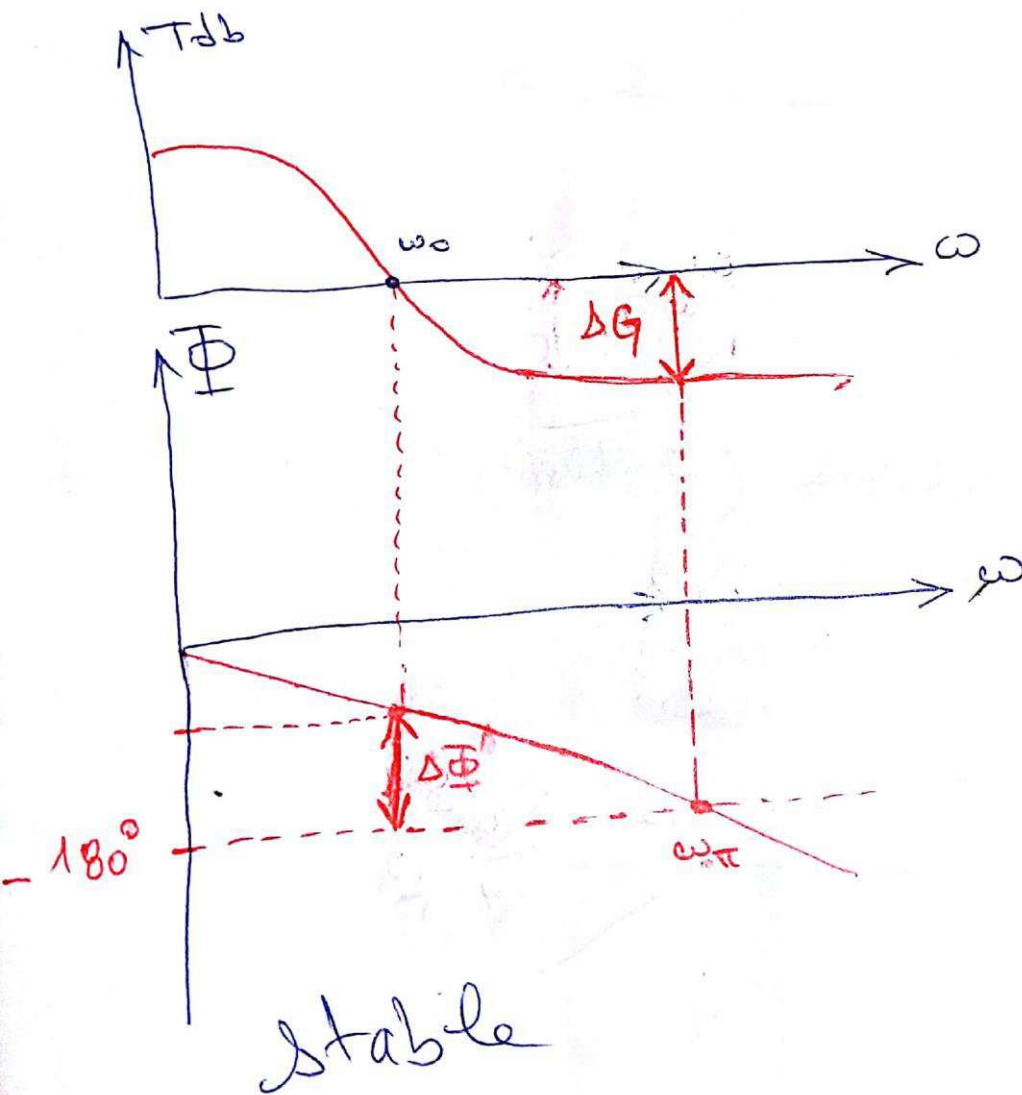
a- Stabilité dans le plan de Bode.

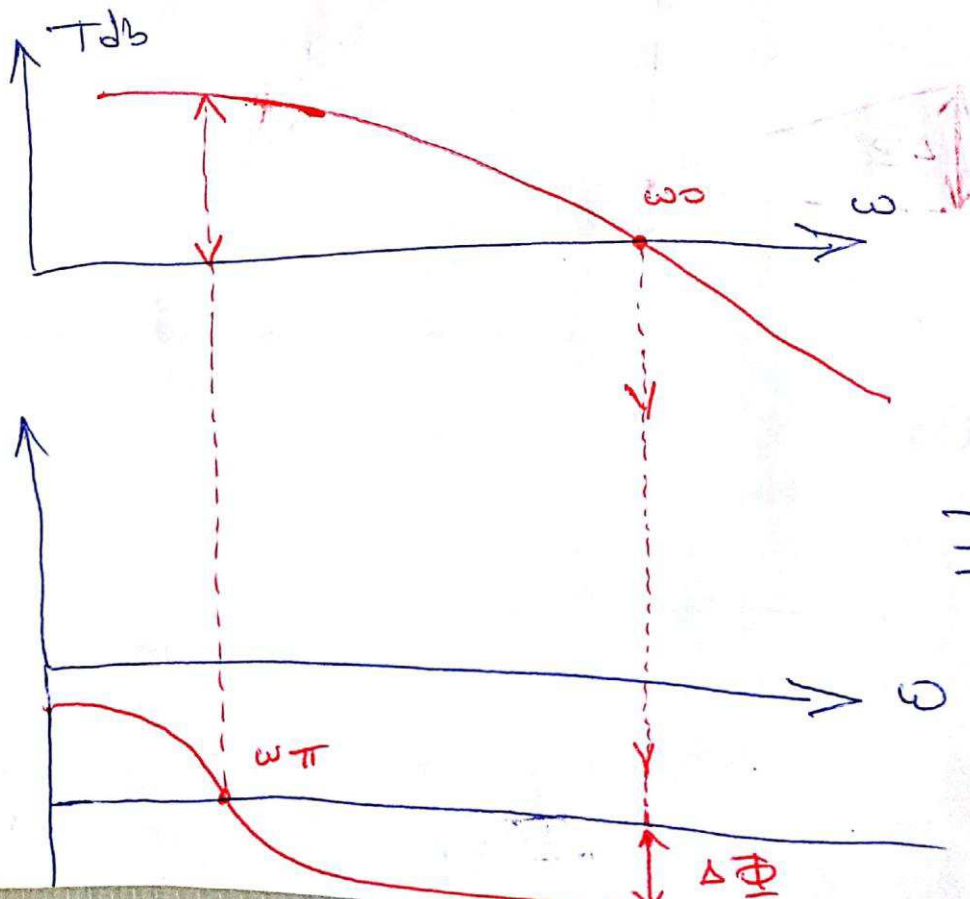
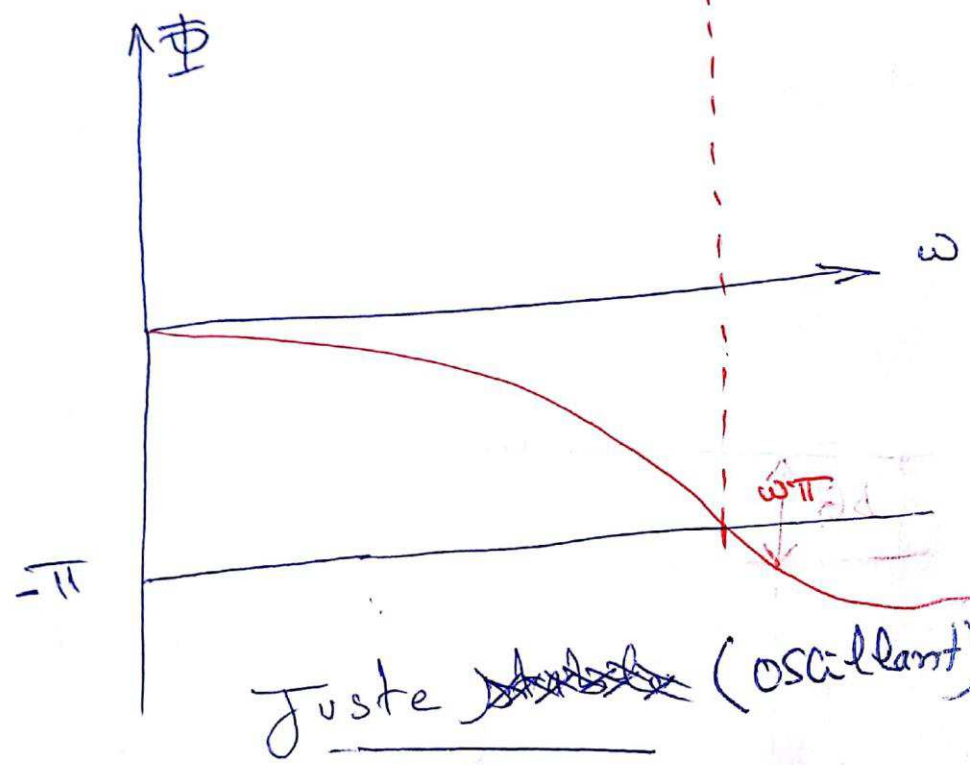
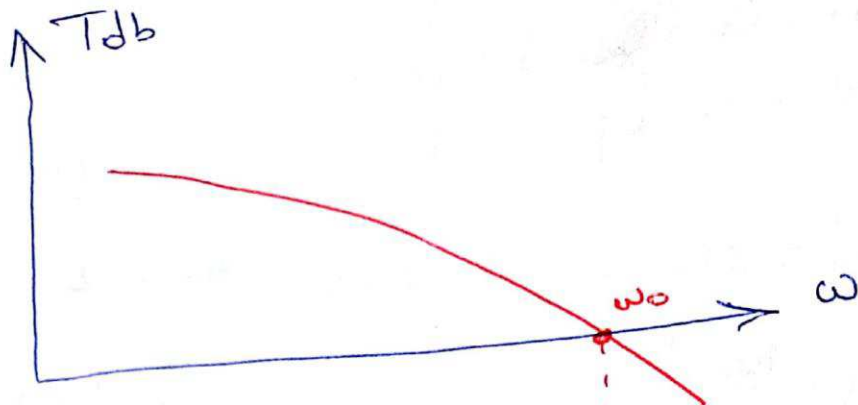
Un système est stable si la pulsation ω_0 pour laquelle

$20 \log |T(j\omega)| = 0 \text{ db}$ lui correspond un déphasage

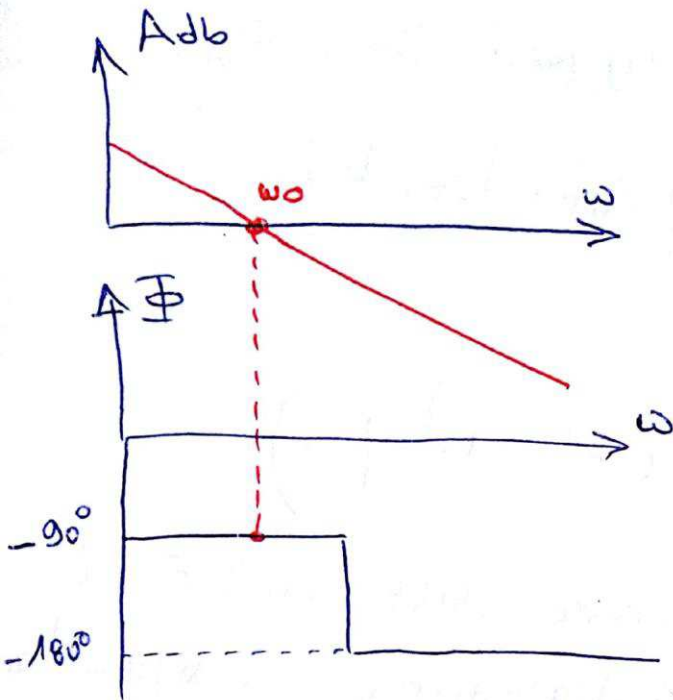
Φ supérieur à (-180°) de la réponse en fréquence

en boucle ouverte.

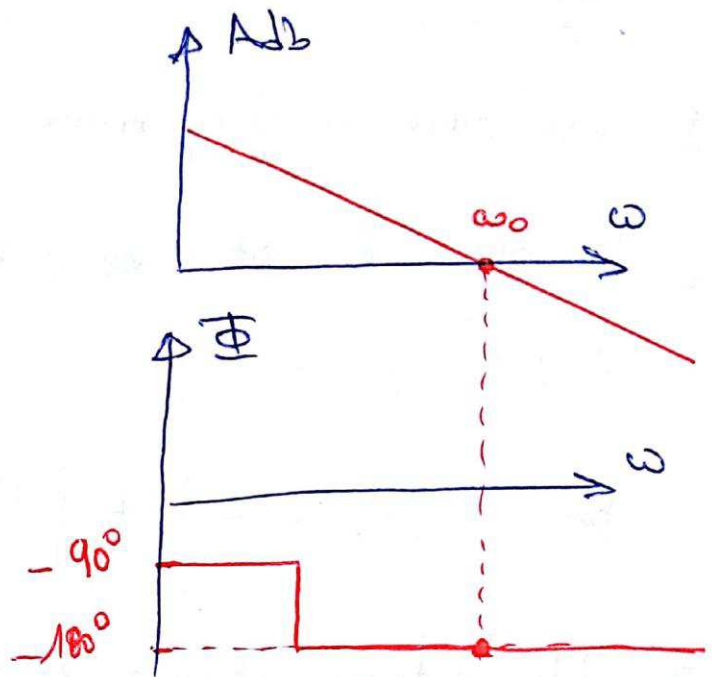




Exemple :



$\omega = \omega_0 =$ pulsation pour laquelle le module en db
 $20 \log |T(j\omega)| = 0 \text{ db}$
 le système est stable car
 $\Phi = -90^\circ > -180^\circ$



la phase qui correspond
 à $20 \log |T(j\omega)| = 0 \text{ db}$
 est $\Phi = -180^\circ \Rightarrow$ syst
 juste oscillant

Remarque :

→ La marge de gain ΔG est donnée par :

$$\Delta G = -20 \log |T(j\omega_\pi)| \quad \Delta G = \frac{1}{|T(j\omega_\pi)|}$$

→ la marge de phase est donnée par :

$$\Delta \Phi = \pi + \arg(T(j\omega_0)), \quad \Delta \Phi = -\pi + \arg(T(j\omega_1))$$

b- Critère de stabilité par Nyquist:

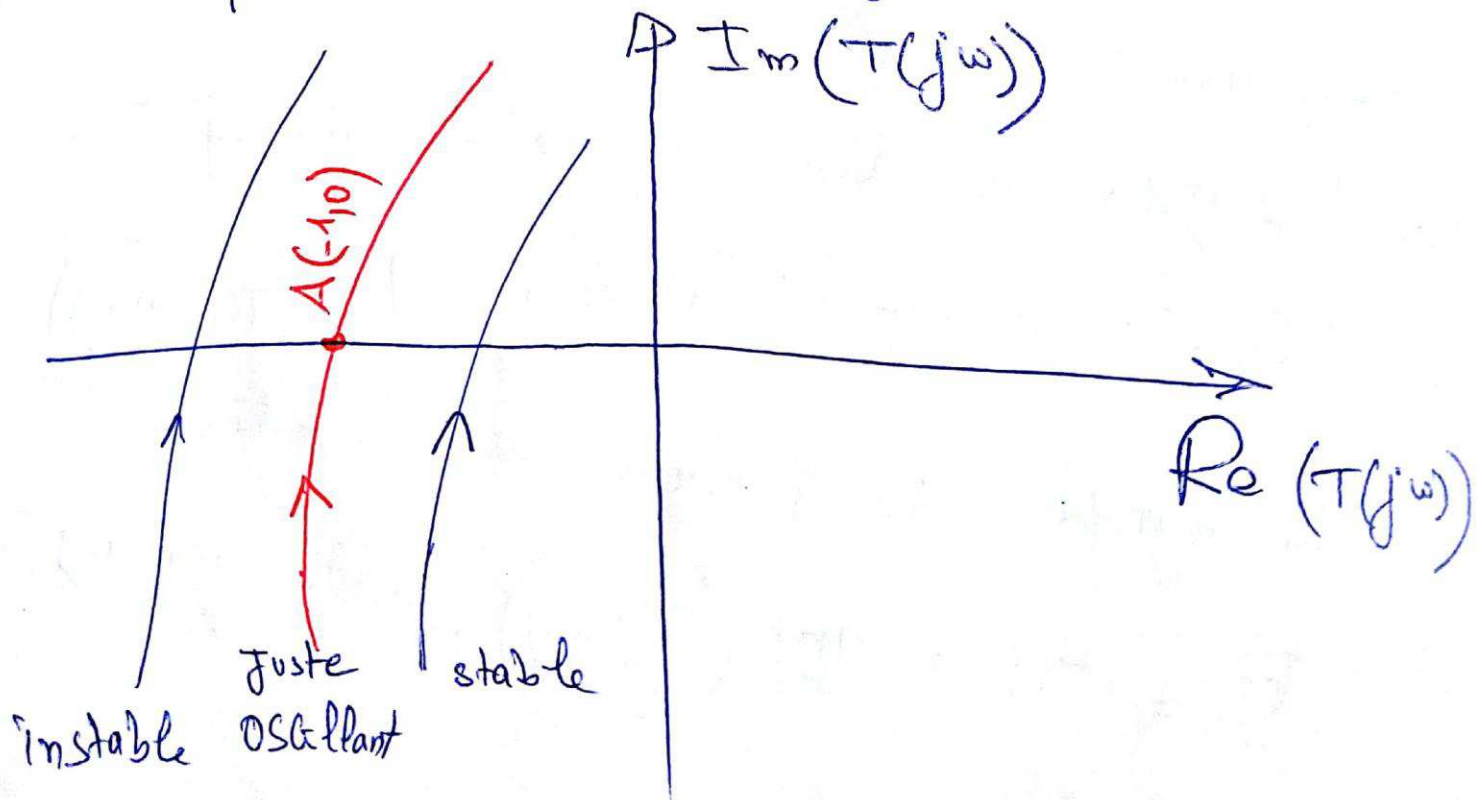
1- On trace le diagramme de Nyquist pour $\omega \geq 0$

2- La stabilité est liée à l'eq caractéristique

$$1 + T(p) = 0$$

$$\Rightarrow T(p) = -1 + j0 \quad (\text{pt Critique})$$

3- Un système stable en B.O reste stable en B.F si par croissant des ω croissantes; le diagramme de Nyquist B.O; laisse le point critique $A(-1,0)$ à sa gauche; si on laisse le pt A à sa droite, le système instable; enfin si la courbe passe par le pt A le système est juste oscillant.



Exemple:

$$T(p) = \frac{1}{p(p+1)} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)}$$

$$T(j\omega) = \underbrace{\frac{-1}{\omega^2+1}}_{\text{Re}} + j \underbrace{\frac{-1}{\omega(\omega^2+1)}}_{\text{Im}}$$

$$\text{Re} = \frac{-1}{\omega^2+1}$$

$$\omega \rightarrow 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = -1 \\ \text{Im} = -\infty \end{array} \right.$$

$$\text{Im} = \frac{-1}{\omega(\omega^2+1)}$$

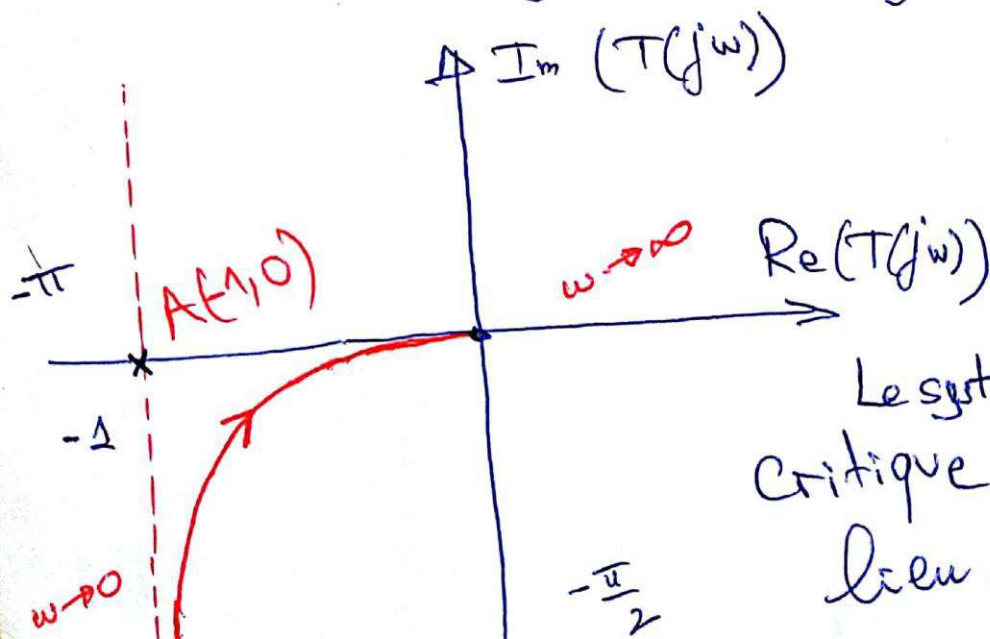
$$\omega \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} \text{Re} = 0 \\ \text{Im} = 0 \end{array} \right.$$

$$|T(j\omega)| = \frac{1}{\omega \sqrt{\omega^2+1}}$$

$$\text{Arg}(T(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \arctg(\omega)$$

$$\omega \rightarrow 0 \quad |T(j\omega)| = \infty \quad \text{Arg}(T(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\omega \rightarrow \infty \quad |T(j\omega)| = 0 \quad \text{Arg}(T(j\omega)) = -\pi$$



Le syst est stable car le pt Critique est à gauche du lieu.

2^e Partie Précision:

I. performance en Régime Permanent:

Problématique: Un système est jugé par la stabilité, par la précision avec laquelle il suit la loi d'entrée, Les sources d'erreurs sont à la fois les variations de l'entrée mais aussi des effets de perturbation,

Etudier la précision d'un système c'est calculer son erreur statique

Erreur statique:

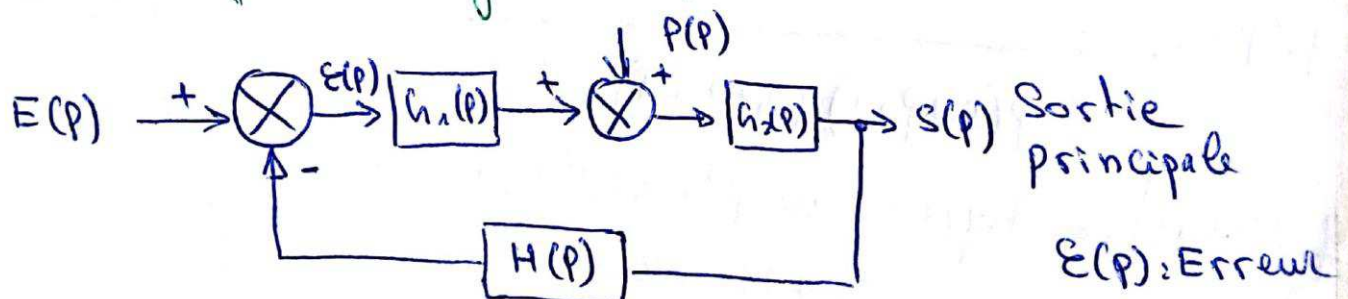
c'est l'erreur en régime permanent entre la sortie et l'entrée pour déterminer cette erreur, on soumet le système à des entrées Canoniques

Echelon: On parle alors d'erreur indicielle ou de position

rampe: Erreur de traînage ou de poursuite

parabole: Erreur d'accélération.

II - précision Relative à la fonction d'Asservissement et à la fonction régulation:



$P(p)$ entrée secondaire (perturbation)

$$E(p) = E(p) - H(p) S(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - H(p) [G_2(p) [P(p) + G_1(p) \varepsilon(p)]]$$

$$\varepsilon(p) [1 + H(p) G_1(p) G_2(p)] = E(p) - H(p) G_2(p) P(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p) G_1(p) G_2(p)} - \frac{H(p) G_2(p) P(p)}{1 + H(p) G_1(p) G_2(p)}$$

↑
fonction
d'Asservissement

↑
fonction de
régulation

Erreur permanente relative à l'entrée:

$$P(p) = 0$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + H(p) G_1(p) G_2(p)}$$

$$\text{posant } G(p) = H(p) G_1(p) G_2(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)}$$

on peut écrire $G(p) = H(p) G_1(p) G_2(p)$ de la manière:

$$G(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \frac{\prod_{i=1}^m (p - z_i)}{p^d \prod_{i=1}^n (p - p_i)} = \frac{K (1 + a_1 p + a_2 p^2 + \dots + a_m p^m)}{p^d (1 + b_1 p + b_2 p^2 + \dots + b_n p^n)}$$

z_i : Zeros de la FTBO

p_i : poles = = =

L'erreur statique est calculée par

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p)$$

α type du système : nombre de pôles nuls (B.O)

$$t \rightarrow \infty \quad p \rightarrow 0 \quad G(p) = \frac{K}{p^\alpha}$$

1^{er} cas: si $\alpha=0 \Rightarrow G(p) \approx K \Rightarrow$ pas d'intégration, il dit de classe 0 K est appelé gain statique

2^e cas: si $\alpha=1 \Rightarrow G(p) = \frac{K}{p} \Rightarrow$ le système possède $K=K_v$ gain en vitesse
Une intégration il est dit de classe 1

3^e cas: $\alpha=2 \quad G(p) = \frac{K}{p^2}$ le système possède 2 intégration

classe 2 $K=K_a$ gain d'accélération.

Système de classe 0 ($\alpha=0$)

Echelon $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \frac{E(p)}{1 + \frac{K}{p^\alpha} \frac{1+a_1 p + \dots}{1+b_1 p + \dots}}$

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

$$E(p) = \frac{E}{p}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p}}{1+K} = \frac{E}{1+K} = Cte$$

Rampe

$$\varepsilon(\infty) = \infty$$

Parabole

$$\varepsilon(\infty) = \infty$$

b/ Système de classe 1 ($\alpha=1$):

Echelon $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p}}{1 + \frac{K}{p}} = 0$

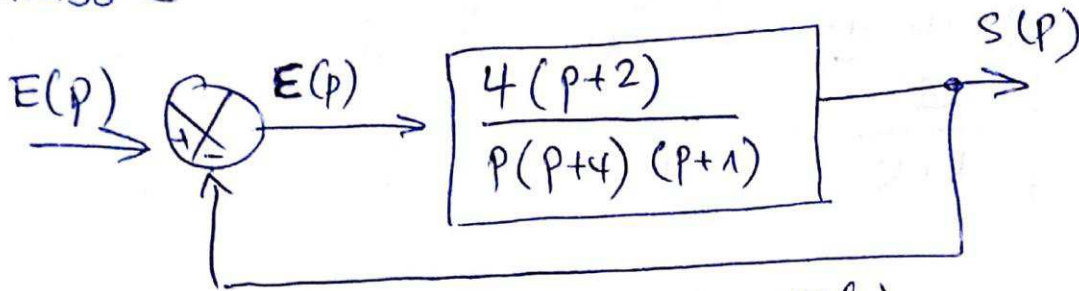
Rampe $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p^2}}{1 + \frac{K}{p}} = \frac{E}{K} = Cte$

(44)

(8)

Exemple 01:

Determiner l'erreur pour les 3 entrées échelon, Rampe, parabole



$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} p \varepsilon(p), \quad \varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)}$$

1- Constante de position K_s (entrée échelon)

$$K_s = \lim_{p \rightarrow 0} G(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{4(p+2)}{p(p+4)(p+1)} = 0$$

Erreur de position

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p}}{1 + \frac{4(p+2)}{p(p+4)(p+1)}} = 0$$

2- Constante de vitesse

$$K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{4(p+2)}{(p+4)(p+1)} = 2$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{4(p+2)p}{p(p+4)(p+1)}} = \frac{1}{2}$$

3- Constante d'accélération : $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 G(p) = \frac{4p(p+2)}{(p+4)(p+1)} = 0$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{p^3}}{1 + \frac{4(p+2)}{p(p+4)(p+1)}} = \frac{1}{p^2 + \frac{4p(p+2)}{(p+4)(p+1)}} = \infty$$

Parabole $\varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p \frac{E}{p^3}}{1 + \frac{K}{p^2}} = \frac{E}{K} = C_{te}$

Entrée \ classe du syst	classe 0 pas d'intégrate	classe 1 1 intégrate	classe 2 2 intégrate	classe > 2
Entrée Echelon	$\frac{E}{1+K}$	0	0	0
Entrée rampe	∞	$\frac{E}{K}$	0	0
Entrée parabole	∞	∞	$\frac{E}{K}$	0

Remarque:

- * L'erreur permanente lorsqu'elle est constante non nulle décroît lorsque le Gain en B.O Croît
- * On peut Supprimer l'erreur en position en introduisant une intégration dans la chaîne
- * On Supprime l'erreur de traînage en introduisant Une double intégration.

~~Erreur relative à l'entrée Secondaire~~

~~(Perturbation)~~

Reça p: Erreur de position (entrée échelon)
 $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1+K_p}$, $K_p = \lim_{p \rightarrow 0} G(p)$

Erreur de vitesse (trainage) (Entrée rampe)
 $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_v}$, $K_v = \lim_{p \rightarrow 0} p G(p)$

Erreur d'accélération $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_a}$, $K_a = \lim_{p \rightarrow 0} p^2 G(p)$

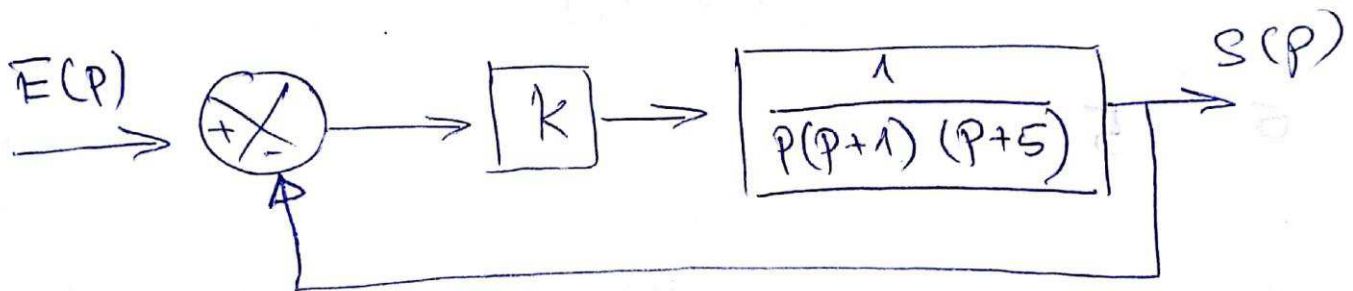
• Influence du gain K sur la stabilité

Pour les systèmes bouclés usuels, on note qu'une augmentation du gain statique dans la boucle ouverte conduit souvent à se rapprocher d'un comportement instable; et même parfois à provoquer l'apparition d'oscillation

= "Dilemme stabilité-précision".

Exemple 1

Soit le système en B.F suivant



les spécifications exigées

- 1- Entrée rampe.
- 2- Erreur en régime permanent $\leq 1\%$
- 3- Système stable.

la condition sur K pour:
une erreur $\leq 1\%$

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + G(p)}$$

$$\varepsilon(p) = \frac{\frac{1}{p^2}}{1 + \frac{K}{p(p+1)(p+5)}}, \quad \varepsilon(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \varepsilon(p) = \frac{1}{0 + \frac{K}{5}}$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{5}{K}}$$

$$\frac{5}{K} \leq 1\% \Rightarrow \frac{5}{K} \leq 0.01$$

$$\frac{K}{5} \geq 100 \Rightarrow \boxed{K \geq 500}$$

Donc pour avoir une erreur $\leq 1\% \Rightarrow \boxed{K \geq 500}$

2/ La condition sur K pour la stabilité

Eq caract: $1 + G(p) = 0$

$$1 + \frac{K}{p(p+1)(p+5)} = 0$$

$$p^3 + 6p^2 + 5p + K = 0$$

Routh:

p^3	1	5
p^2	6	K
p^1	$\frac{30-K}{6}$	0
p^0	K	

Donc le syst est stable

$$K > 0$$

$$30 - K > 0 \Rightarrow K < 30$$

$$0 < K < 30$$

} Donc: pour la précision: $K \geq 500$
 " la stabilité: $0 < K < 30$

$\Rightarrow$ Dilemme stabilité-précision
 et pour réduire ce dilemme on
 utilise les correcteurs

(48)