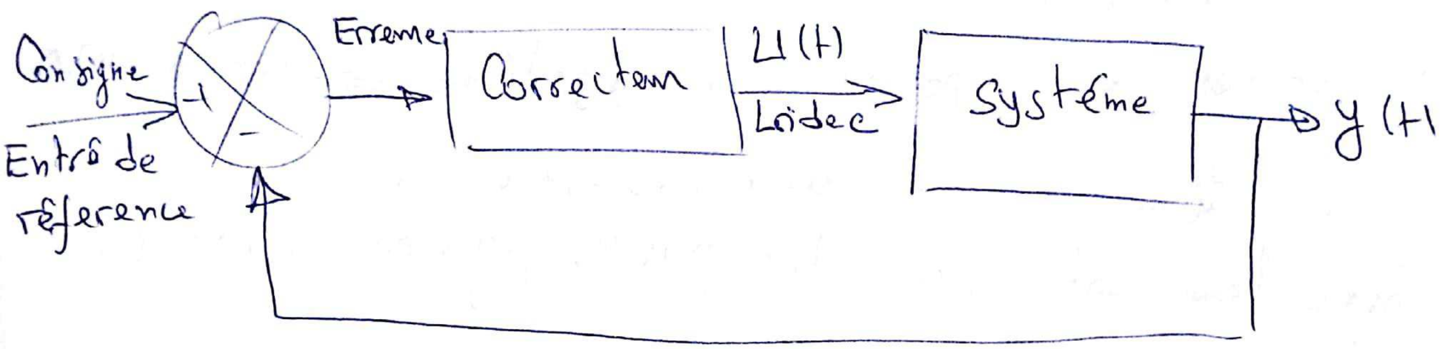
Chapitre 2: Calcule des contrôleurs dans le domaine fréquentiel

chapo2 : Calcule des Controleurs dans le domaine fréquentiel

Introduction

Un régulateur automatique compart la valeur actuel de la Sortie duprocedé avec la valeur désiré qui détermine la dériation (erreur) est produit un signal de commande (loi de commande) ou (action de commande) qui reduira l'erreur à 0.



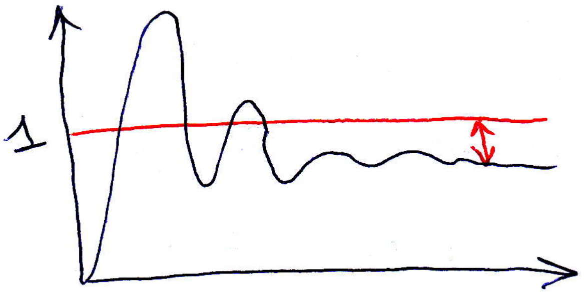
généralement les caractéristiques du système piloté peut avoir les problèmes suivant :

- système mal amorti
- système lent
- système peu précis
- système présentant une tendance à la dérive
- cas Extrême : système instable

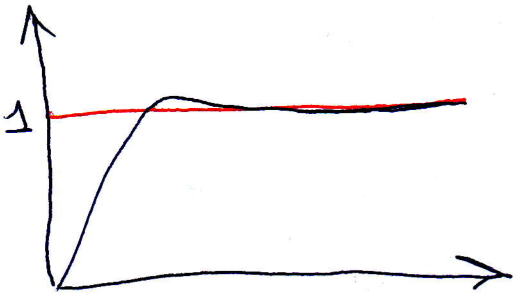
objectif du correction :

- Amener le système à suivre un comportement fixe par un cahier de charges
- comment faire ? utiliser un dispositif complementaire ; le correcteur en Boucle fermé.

Systéme ā Commander



Comportement désiré

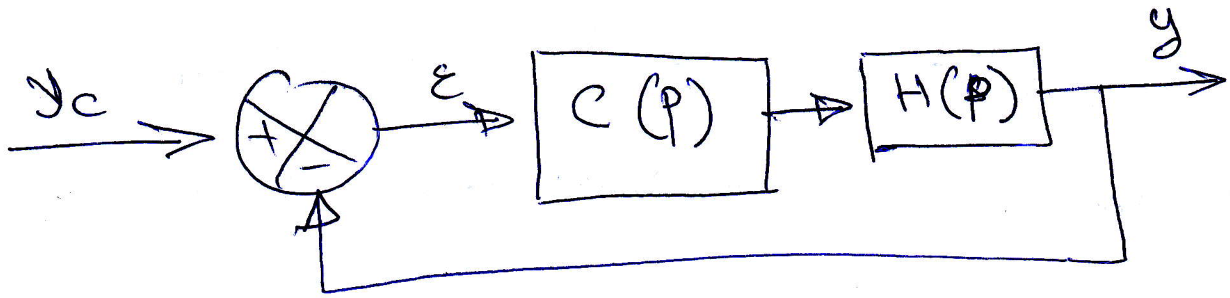


- Réponse oscillatoire
- Réponse mal amortie
- Ecart avec l'entrée en régime établi

- Reponse oscillatoire
- Réponse bien amortie
- Erreur nulle

Pour corriger le comportement du systéme ⇒ Correcteurs

Le shéma bloc d'asservissement en présence du Correcteur est representer par la figure suivante :



$$H_{BONC}(p) = H(p)$$

$$H_{BOC}(p) = C(p) \cdot H(p)$$

$$H_{B.F}(p) = \frac{H_{BOC}(p)}{1 + H_{BOC}(p)}$$

Exigences de l'asservissement (1)

- Cahier de charges

  Les exigences sont exprimées sous la forme d'un cahier de charges. La synthèse du correcteur doit permettre de satisfaire au mieux ces exigences.

- Elements du cahier de charges

  1. Stabilité
     - On analyse la stabilité par les critères de Routh et de Nyquist
  2. Marges de stabilité
     - Si marges de stabilité faibles $\Rightarrow$ système proche de l'instabilité en BF, réponse oscillatoire mal amortie, fort dépassement
     - On règlera les marges de stabilité aux valeurs satisfaisantes suivantes : $m_\varphi \geq 45°$, $m_g \geq 10dB$

Exigences de l'asservissement (2)

- Eléments du cahier de charges

3. Forme de la réponse indicielle en BF
   - Apériodique (H_{BF} doit avoir des pôles réels)
   - Oscillatoire (H_{BF} doit avoir des pôles complexes conjugués)
4. Précision en régime permanent

   Pour avoir une bonne précision, deux solutions :
   - augmenter le gain en basses fréquences du système *non bouclé*
   - introduire des intégrateurs (si nécessaire)

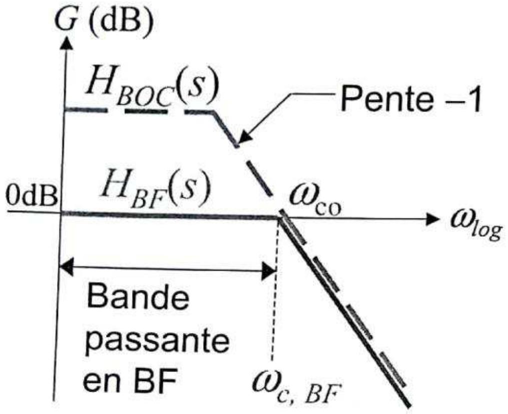
   Mais, risque de rendre le système instable en BF!!
5. Rapidité

   Pour augmenter la rapidité du système en BF, il faut élargir sa bande passante en BF.

   Augmenter la BP en BF ⇔ augmenter la pulsation de coupure à 0dB ω_{co} de $H_{BOC}(s) = C(s)H(s)G(s)$

Exigences de l'asservissement (3)

Système du 1er ordre en BF



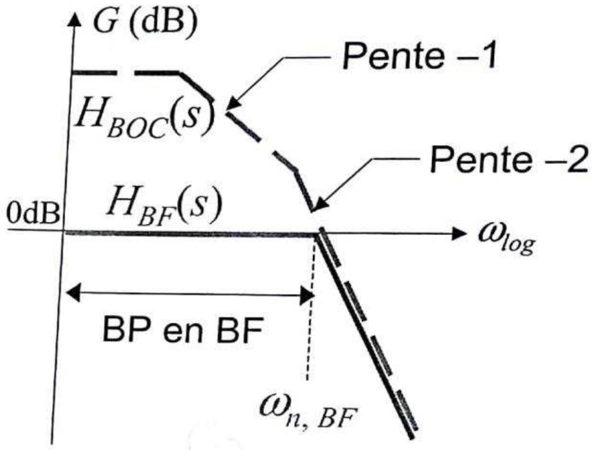
$$\boxed{\omega_{c,BF} \approx \omega_{c0}}$$

Relation temps de montée-BP $\left(t_m = 2,2 / \omega_{c,BF} \right)$

$$t_m f_{c,BF} \approx 0.35$$

$$f_{c,BF} = \frac{\omega_{c,BF}}{2\pi}, \quad \omega_{c,BF} = \frac{1}{T_{BF}}$$

Système du 2e ordre en BF



$$\omega_{n,BF} = \omega_{n,0}\sqrt{1+K_0} \approx \omega_{c0}$$

Pour $0.2 < \xi_{BF} < 0.8$ $\quad t_m = \dfrac{1}{\omega_{n,BF}\sqrt{1-\xi^2}}$

On a $1,8 < \omega_{n,BF} t_m < 4,16$ $(\pi - \arccos(\xi))$

Correcteurs série usuels

Il y a des correcteurs qui modifient le gain du système en BO (précision), d'autres qui agissent sur la marge de phase (stabilité, rapidité).

- Correcteurs qui modifient le gain
  - Correcteur proportionnel (P)
  - Correcteur intégral (I)
  - Correcteurs proportionnel-intégral (PI), à retard de phase
- Correcteurs qui modifient la marge de phase
  - Correcteur proportionnel dérivé (PD)
  - Correcteur à avance de phase
- Correcteur réalisant les deux actions
  - Correcteur proportionnel-intégral-dérivateur (PID)

Correcteur proportionnel P (1)

Correcteur P

Le correcteur est un gain K_c : $\boxed{C(s) = K_c}$

Commande du système : $u(t) = K_c\ \varepsilon(t)$

Effets du correcteur

- Modification du gain du système en BO
- Si $K_c > 1$ (amplification)
  - amélioration de la précision du système en BF
- Si $K_c < 1$ (atténuation)
  - diminution de la précision du système en BF

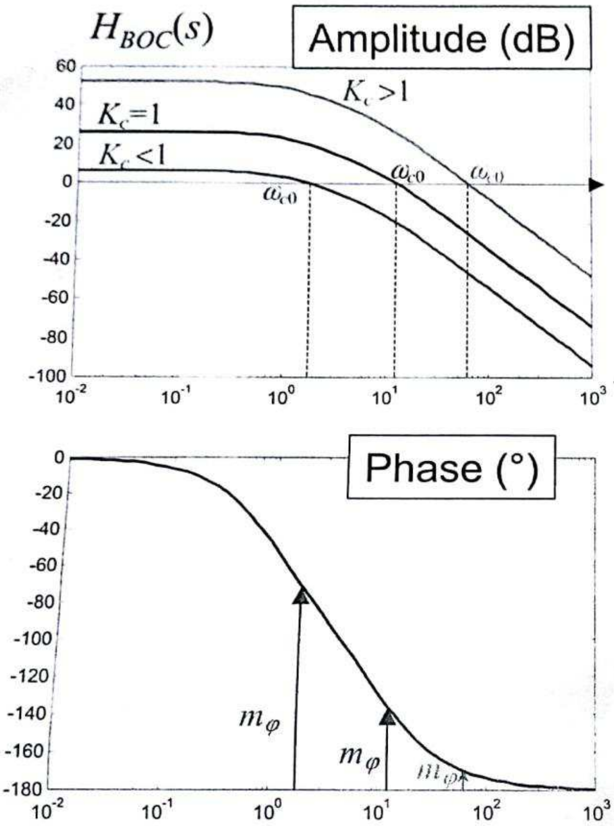
Le correcteur P ne permet pas de régler indépendamment la rapidité, la précision et les marges de stabilité

En effet ··· $\Rightarrow$

(55)

Correcteur proportionnel P (2)

❑ Effets du correcteur



Automatique

- Si $K_c > 1$
  - translation du diagramme de gain de Bode vers le haut
  - augmentation de ω_{co} $\Rightarrow$ augmentation de la rapidité
  - diminution de la marge de phase (dégradation de la stabilité en BF)
- Si $K_c < 1$
  - translation du diagramme de gain de Bode vers le bas
  - diminution de ω_{co} $\Rightarrow$ diminution de la rapidité
  - Augmentation de la marge de phase (amélioration stabilité)

(56)

Correcteur intégral I (1)

- FT du correcteur

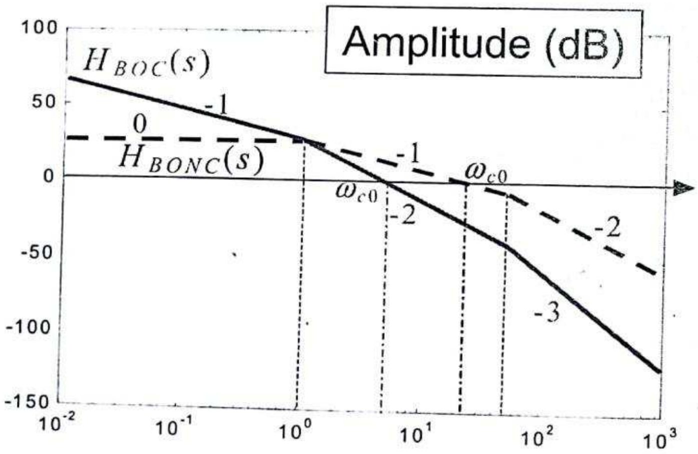
$$\boxed{C(s)=\frac{1}{T_i s}}$$

T_i : constante d'intégration

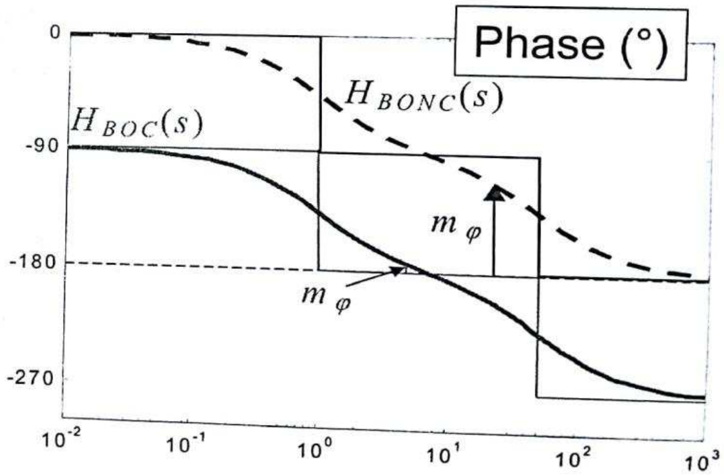
Commande du système

$$u(t)=\frac{1}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)d\tau$$

- Effets en fréquentiel du correcteur



Augmentation des pentes de +20dB/décade



Translation du diagramme de phase de 90° vers le bas

(57)

Correcteur intégral I (2)

- Effets du correcteur
  - Introduction d'un intégrateur ⇒ amélioration précision
    - annulation de l'erreur statique, diminution de l'erreur de vitesse (si le système non corrigé est de classe 0)
    - rejet asymptotique des perturbations constantes
  - Diminution de la pulsation de coupure à 0dB ω_{co}
    - diminution de la rapidité du système en BF
    - l'effet intégrateur provoque un ralentissement du système
  - Réduction de la marge de phase ⇒ dégradation de la stabilité voire instabilité

Le correcteur I n'améliore que la précision ; les autres performances sont dégradées

Correcteur PI :

PI : Combinaison des Correcteurs P et I

$$C(P) = K_c + \frac{K_c}{T_i P} = K_c \frac{1 + T_i P}{T_i P}$$

Plus T_i est grande, plus l'action intégrale est faible.

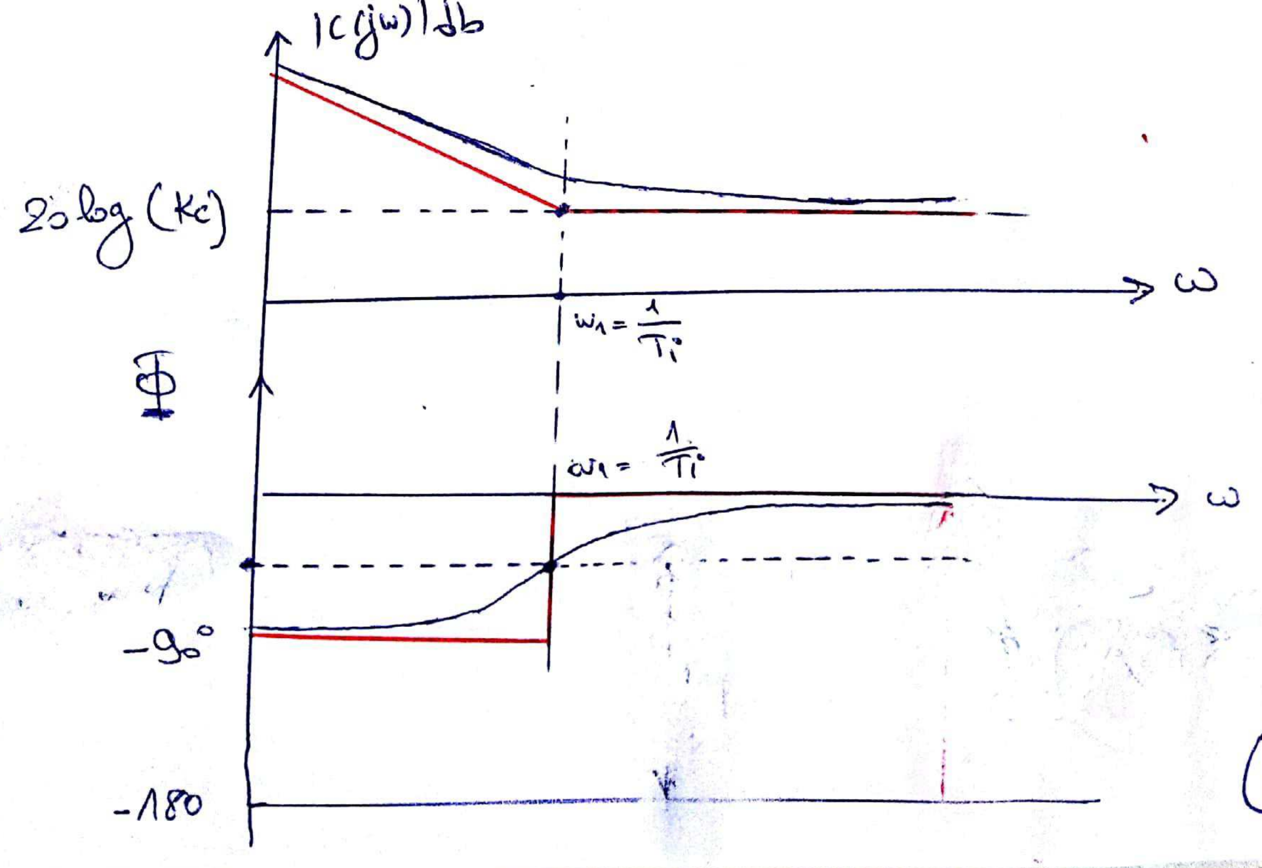
Commande du système :

$$U(t) = K_c\, \varepsilon(t) + \frac{K_c}{T_i} \int_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau$$

Le diagramme de Bode du régulateur

$$C(j\omega) = K_c \frac{1 + T_i j\omega}{T_i j\omega}$$

Possant $\frac{1}{\omega_1} = T_i$



Effet du Correcteur PI =

- Introduction d'un integrateur

- gain en basses frequence $\left(\omega \ll \frac{1}{T_i}\right)$ $\frac{\text{infinie}}{\text{grand}}$ ⇒ erreur statique nulle (systéme de classe 0)

- le gain du systéme corrigé ne sera pas modifié en haute fréquence si $\frac{1}{T_i} \ll \omega_{co}$ ⇒ rapidité non modifié

généralement on prend $\left(\frac{1}{T_i} \leq \frac{\omega_{co}}{10}\right)$

- La phase du systéme corrigé n'est modifiée qu'en basses fréquence (au contraire de I)

- La marge de phase n'est pas modifiée si $\omega_{co} \gg \frac{1}{T_i}$

→ Correcteur à retard de phase (PI) :

Le correcteur à retard de phase est une forme approchée du correcteur PI. il réalise une action intégrale (augmentation du gain en basse fréquence) sans introduire d'intégrateur

$$\boxed{C(p) = K_c \frac{1+Tp}{1+bTp}} \quad \text{avec } b>1$$

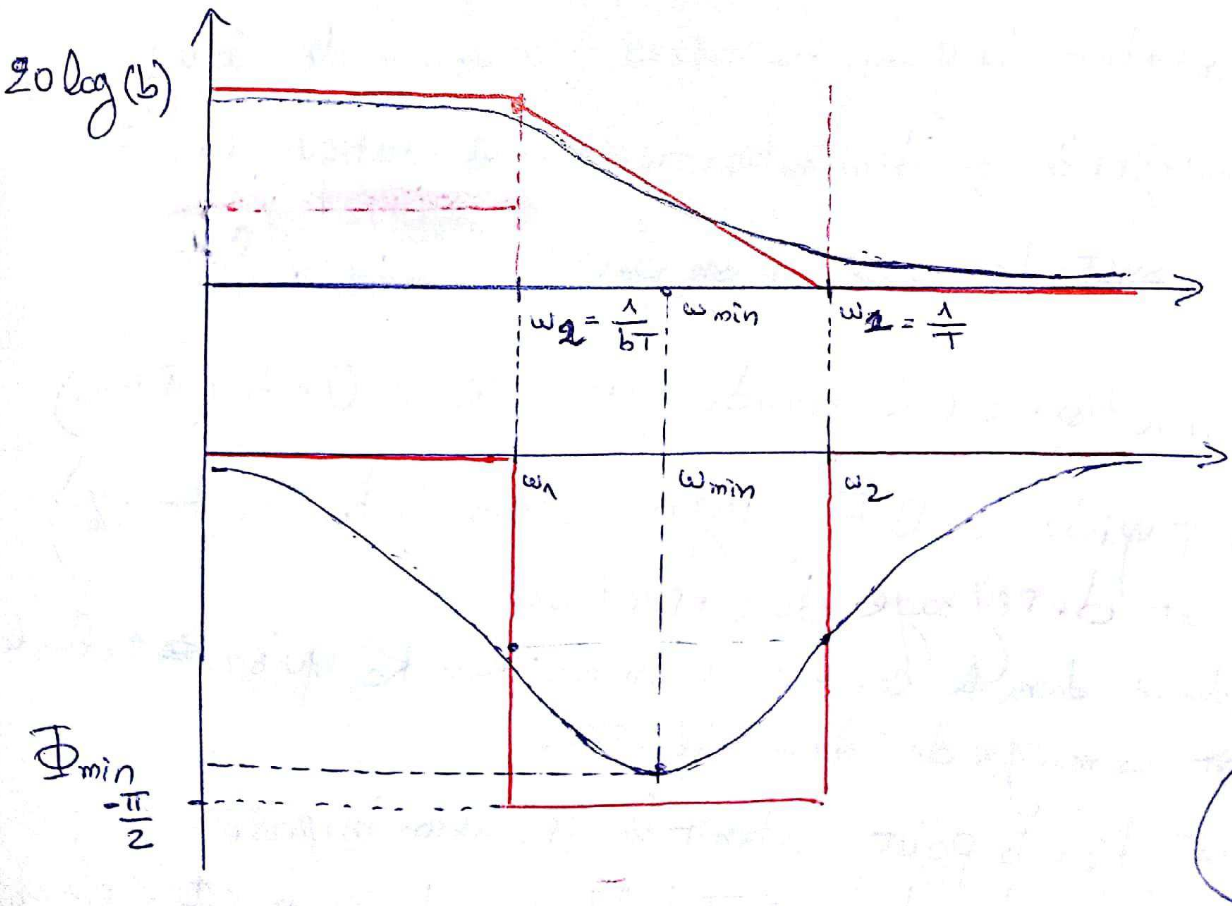
En pratique on choisit $\boxed{K_c = b}$

Le diagramme de bode du régulateur

$$C(j\omega) = K_c \frac{1+Tj\omega}{1+bTj\omega} = b\,\frac{1+Tj\omega}{1+bTj\omega}$$

possant $\frac{1}{\omega_1} = T$ et $\frac{1}{\omega_2} = bT \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{T}, \quad \omega_2 = \frac{1}{bT}$

avec $b>1 \Rightarrow \boxed{\omega_2 < \omega_1}$ $C(j\omega) = b\,\frac{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}{1+j\frac{\omega}{\omega_2}}$



le retard de phase Φ_{min} est min $\Rightarrow \omega_{min} = ?$

$$\frac{d\, Arg\, c(j\omega)}{d\omega} = 0$$

62

$$\frac{d}{d\omega}\left(Arctg\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) - Arctg\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)\right) = 0$$

$$\boxed{\omega_{min} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{T\sqrt{b}}}$$

$$\Phi_{min} = Arg\, c(j\omega_{min}) = Arctg\left(\frac{\omega_{min}}{\omega_1}\right) - Arctg\left(\frac{\omega_{min}}{\omega_2}\right)$$

$$\boxed{\Phi_{min} = \arcsin\left(\frac{1-b}{1+b}\right) rad}$$

⇒ Effet du controleur ;

- Augmentation du gain en bases fréquence de $20\log(b)$

⇒ effet integrale ⇒ diminution de l'erreur statique en B.F (syst de classe 0 en B.O)

- Diminution de la bande passante a 0 db (à ω_{co})

⇒ moin rapide en B.F (augmentation de t_m ou $t_{r,5\%}$)

⇒ Element de réglage du Correcteur :

→ Introduire dans le correcteur un nouveau K_c' qu'on calcule pour avoir la marge de phase désiré.

→ Calculer $K_c = b$ pour obtenir la précision imposé

⇒ Choisir la constante de temps T telle que $\frac{1}{T} \ll \omega_0$ $\left(\frac{1}{T} \leq 0{,}1\,\omega_{co}\right)$ pour ne pas modifier la marge de phase et les performance dynamique.

Correcteur proportionnel Dérivé "PD"

PD : Combinaison des Correcteur P et D

$C(P) = K_c(1 + T_d P)$: T_d Constante de dérivation

Plus T_d est grande, plus l'action dérivée est importante.

Commande du système

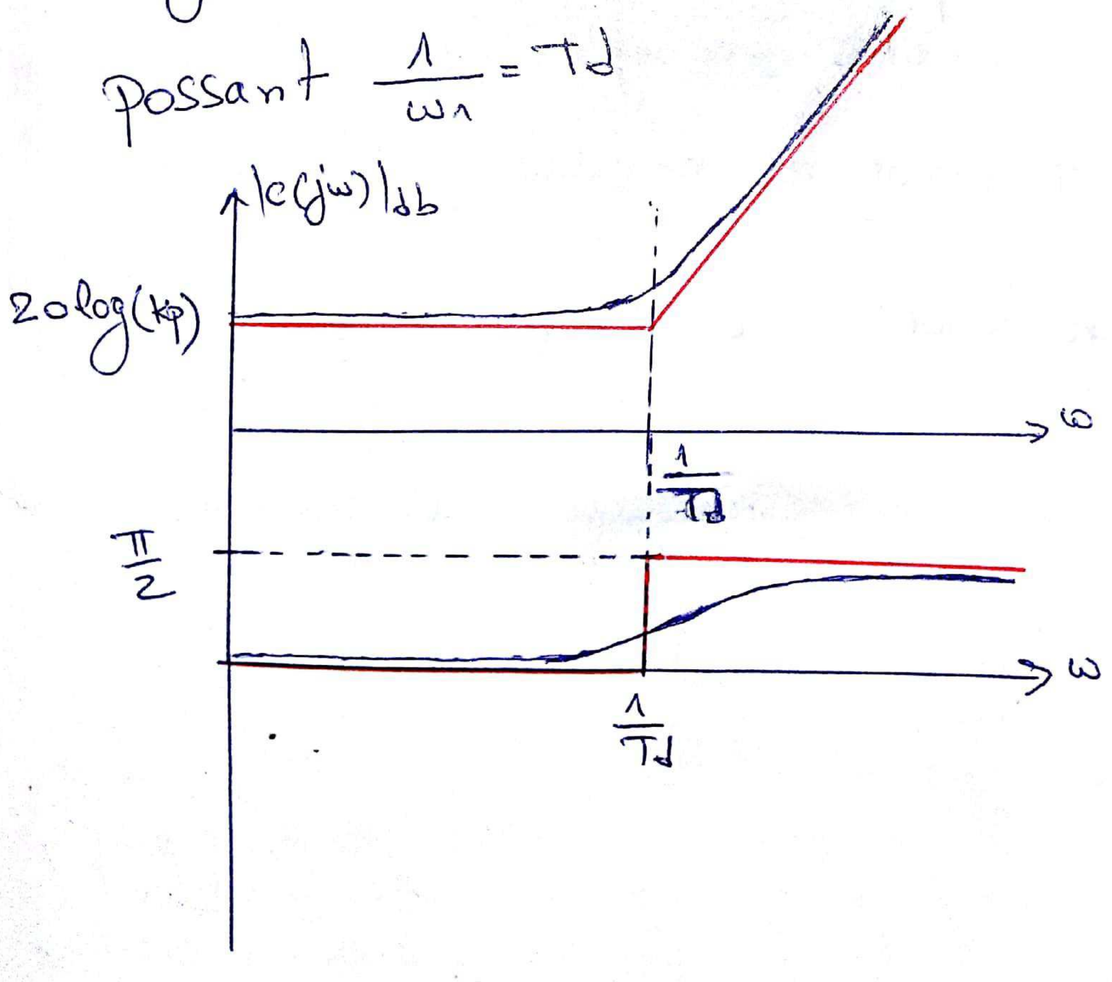
$$U(t) = K_c\,\varepsilon(t) + K_c T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

La commande est proportionnelle à l'erreur et à la variation de l'erreur (dérivée)

Le diagramme de Bode du régulateur.

$$C(j\omega) = K_c(1 + T_d j\omega)$$

possant $\frac{1}{\omega_1} = T_d$



Effet du controleur "PD"

- avance de phase maximal de $90°$ pour $\omega \gg \frac{10}{T_d}$
  $\Rightarrow$ amelioration de la stabilité (marge de phase)

- Augmentation de la pulsation $\omega_{co} \Rightarrow$ amélioration de la rapidité $[(t_{r5\%}, t_m) \swarrow]$

- Amplification en haute fréquence pour $(\omega > \frac{1}{T_d})$
  $\Rightarrow$ élargissement de bande passante du systéme en B.F $\Rightarrow$ Sensibilité aux bruits

- Diminution de l'erreure permanente.

Réglage:

- Régler K_c pour avoir ω_{co} imposé
- Régler T_d pour avoir m_φ imposé
- vérifier aposteriori ω_{co} et m_φ.

Correcteur par avance de phase : (PD)

Le correcteur à avance de phase est une forme approchée du correcteur PD. Sa fonction de transfert est donnée par

$$\boxed{C(p) = K_c \frac{1 + aTp}{1 + Tp}} \quad \text{avec } a > 1$$

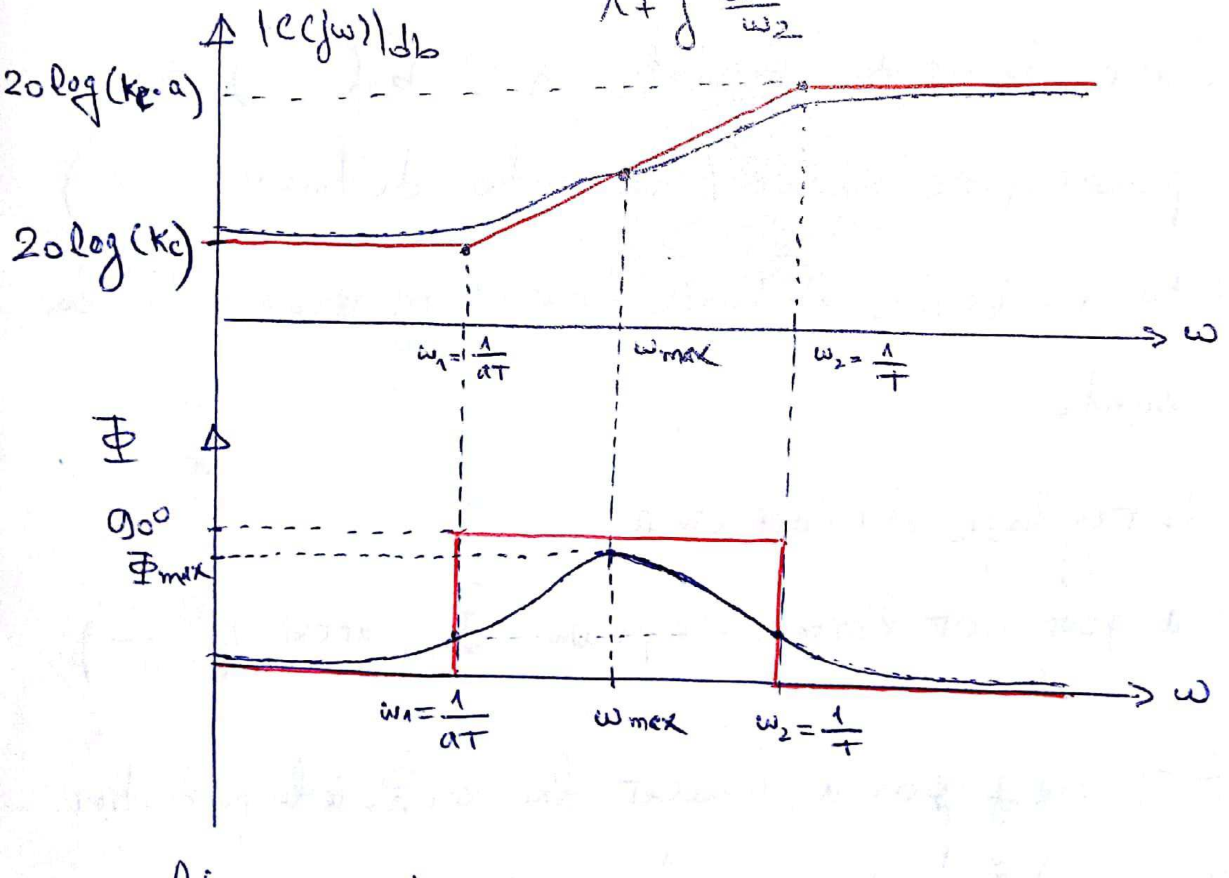
Le diagramme de bode du régulateur est présenté par

$$C(j\omega) = K_c \frac{1 + aTj\omega}{1 + Tj\omega}$$

posant $aT = \frac{1}{\omega_1}$ et $T = \frac{1}{\omega_2}$ $\Rightarrow$ $\omega_1 = \frac{1}{aT}$, $\omega_2 = \frac{1}{T}$

avec $a > 1 \Rightarrow \boxed{\omega_1 < \omega_2}$ et $\boxed{\frac{\omega_2}{\omega_1} = a}$

donc $C(j\omega) = K_c \frac{1 + j\frac{\omega}{\omega_1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_2}}$



l'avance de phase Φ_{max} est max $\Rightarrow$ ω_{max} ?

$$\frac{d \operatorname{Arg} C(j\omega)}{d\omega} = 0$$

$$\frac{d}{d\omega}\left(\mathrm{Arctg}\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)-\mathrm{Arctg}\,\frac{\omega}{\omega_2}\right)=0$$

66

$$\boxed{\omega_{max}=\sqrt{\omega_1\omega_2}=\frac{1}{T\sqrt{a}}}$$

$$\Phi_m=\mathrm{Arg}\,C(j\omega_{max})=\mathrm{Arctg}\,\frac{\omega_{max}}{\omega_1}-\mathrm{Arctg}\,\frac{\omega_{max}}{\omega_2}$$

$$\boxed{\Phi_{max}=\arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)}$$

(*) La Correction s'obtient en determinant a, T et K_c selon les spécification desirées.

Effet du correcteur ;

- Augumentation de la marge de stabilité ⇒ effet dérivateur
- Augumentation de bande passante a 0db (ω_{co}) ⇒ système plus rapide en B.F (diminution de t_m ou $t_{r,5\%}$)
- Sensibilité aux bruits à Cause de l'élargissement de la bande Passante.

Element de réglage du correcteur ;

1. Calculer a pour avoir l'avance de phase $\Phi_{max}=\arcsin\left(\frac{a-1}{a+1}\right)$ desiré.
2. Calculer T de façon a placer la cloche à la pulsation ω_{co} désirée c à d $\omega_{max}=\frac{1}{T\sqrt{a}}=\omega_{co}$
3. le gain K_c permet de placer l'axe 0 db à la pulsation ω_{co} desirée, or ω_{co} verifie la relation $|\underbrace{G(j\omega_{co})}_{\text{BOC (controleur)}}|=1\Rightarrow|C(j\omega_{co})\,H(j\omega_{co})|=1$

Correcteur PID

PID : Combinaison des correcteurs P, I et D

$$C(p) = K_c\left(1+\frac{1}{T_i p}+T_d p\right) = K_c\,\frac{T_i T_d p^2 + T_i p + 1}{T_i p}$$

T_i : Constante d'intégration

T_d : Constante de dérivation

Commande du système

$$u(t) = K_c\,\varepsilon(t) + \frac{K_c}{T_i}\int_0^t \varepsilon(\tau)\,d\tau + K_c T_d \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$$

Factorisation de C(P) :

Si $\underline{T_i > 4T_d}$ $\quad C(p) = K_c\,\dfrac{(1+T_1 s)(1+T_2 s)}{T_i s}$

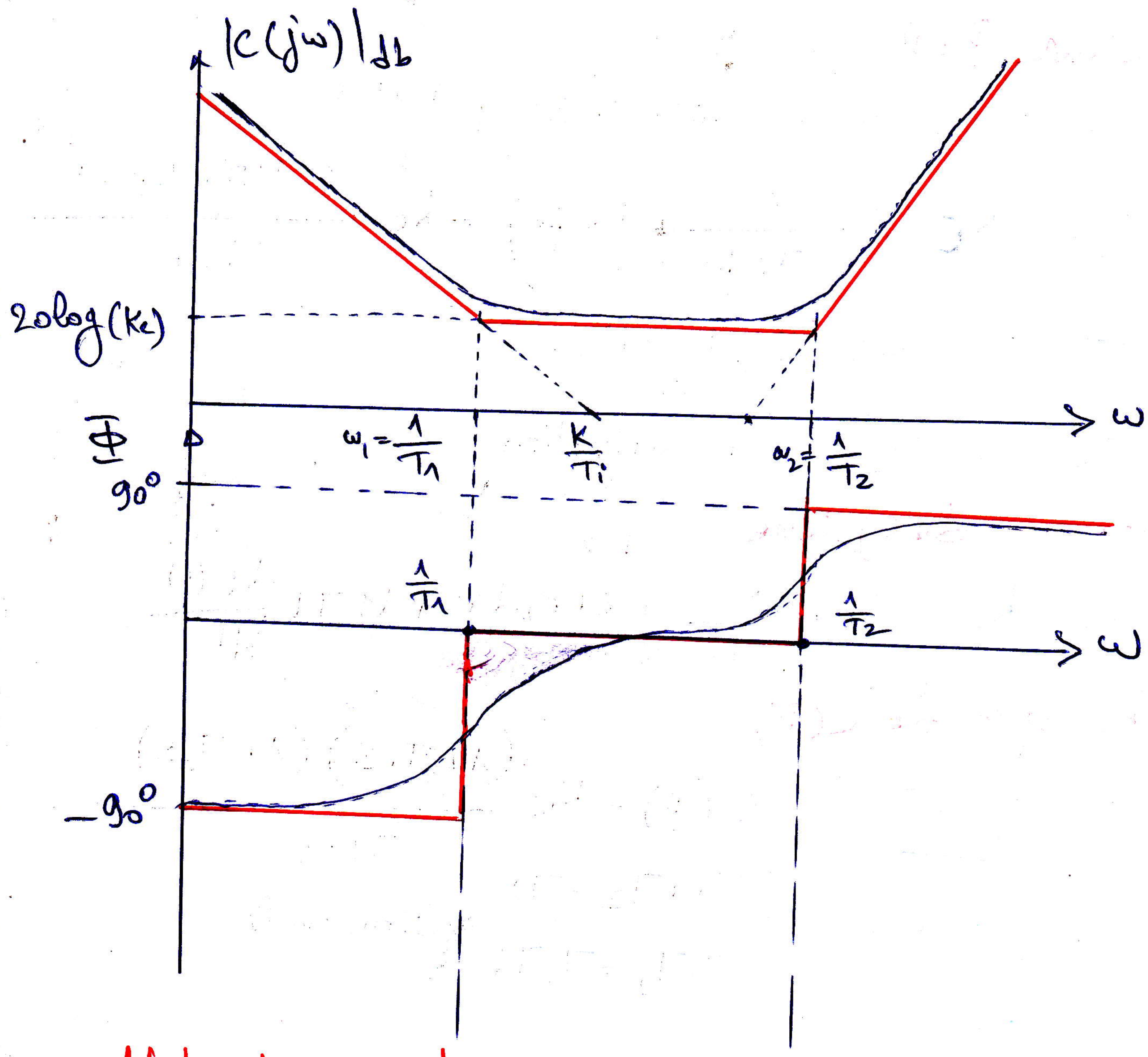
avec $\begin{cases} T_1 + T_2 = T_i \\ T_1 T_2 = T_i T_d \end{cases}$ $\Rightarrow$ zéros réels

Si $\underline{T_i < 4T_d}$ $\quad C(p) = K_c\,\dfrac{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}{T_i p}$

$\Rightarrow$ zéros complexe conjugués

Une des configurations couramment rencontrées utilise un PID

avec $\underline{T_i > 4T_d}$ $\Rightarrow \begin{cases} T_1 = \dfrac{T_i}{2}\left[1+\sqrt{1-\dfrac{4T_d}{T_i}}\right] \\ T_2 = \dfrac{T_i}{2}\left[1-\sqrt{1-\dfrac{4T_d}{T_i}}\right] \end{cases}$



Effets du correcteur PID

- avance de phase en haute fréquence
- Amplification en haute fréquence → Effet PD en haute fréquence
- gain infini en base fréquence
- Retard de phase en bases fréquences → Effet PI en base fréquence

~~Fréquence moyenne~~