Chapitre 3: Représentation d'état des systèmes

Chapitre 0 : calcule Matriciel

Def : Une matrice est définie par :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix} = (a_{ij})\ n \times m$$

n : lignes   m : colones

Vecteur : c'est 1 matrice de 1 seul ligne et plusieurs colones ou l'inverse

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ Vecteur colone}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \text{ vecteur ligne}$$

Matrice Carée : $n = m$

" diagonal : si tous les éléments $a_{ij} = 0$ sauf pour $i = j$ ⇒ La matrice est diagonal

Matrice identité est donne par

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(1, 1, \ldots 1)$$

Matrice singulière : $|A| = 0$

transposé d'une matrice :

si $A : n \times m$ alors sa transposée $A^T = m \times n$

si $A = (a_{ij})$ $\quad (A^T)^T = A$

$A^T = (a_{ji})$

Matrice symétrique

$A^T = A$

Matrice anti symétrique :

si $A^T = -A$ ou $A = -A^T$

Algèbre matriciel :

Addition : si $A = (a_{ij})$

$B = (b_{ij})$

$A + B = (a_{ij} + b_{ij})$

$A - B = (a_{ij} - b_{ij})$

- Multiplication par un scalaire :

$$KA = \begin{bmatrix} Ka_{11} & Ka_{12} & \cdots & Ka_{1m} \\ Ka_{21} & Ka_{22} & \cdots & Ka_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ka_{n1} & Ka_{n2} & & Ka_{nm} \end{bmatrix}$$

- Multiplication de 2 Matrice

$A : n \times m \qquad B : m \times p$

$A \times B : n \times p$

$$A \times B = C(c_{ij}) = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} = \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, p \end{cases}$$

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$C(A+B) = CA + CB$$

$$AB \neq BA$$

<u>Puissance d'une matrice :</u>

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ fois}}$$

Si A est une matrice diagonale

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nm})$$

$$A^k = \text{diag}(a_{11}^k, a_{22}^k, \dots, a_{nm}^k)$$

<u>Rang d'une matrice :</u>

<u>Exemple :</u>

(1) $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\det(A) = 0 \Rightarrow \text{Rang}(A) < 4.$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \det(A') \neq 0 \Rightarrow \text{Rang}(A') = 3$$

Inversion d'une matrice :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Cof(A)\right]^{T}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 1^{+} & 2^{-} & 0^{+} \\ 3^{-} & -1^{+} & -2^{-} \\ 1^{+} & 0^{-} & -3^{+} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = (3+0+4) - (0+0-12) = 17$$

$$\det(A) = 17$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} (-1)^2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} & (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$Cof(A) = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 6 & -3 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \quad Cof^{T}(A) = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -4 \\ 7 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{17} & \frac{6}{17} & \frac{-4}{17} \\ \frac{7}{17} & \frac{-3}{17} & \frac{2}{17} \\ \frac{1}{17} & \frac{2}{17} & \frac{-7}{17} \end{bmatrix}$$

Differentiation d'une matrice

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{d\,a_{ij}(t)}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{d a_{11}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d a_{1m}(t)}{dt} \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{d a_{n1}(t)}{dt} & \cdots & \frac{d a_{nm}(t)}{dt} \end{bmatrix}$$

$$\int A(t)\,dt = \int a_{ij}(t)\,dt = \begin{bmatrix} \int a_{11}(t)\,dt & \cdots & \int a_{1m}(t)\,dt \\ \vdots & \ddots & \\ \int a_{n1}(t)\,dt & \cdots & \int a_{nm}(t)\,dt \end{bmatrix}$$

Si $A(t)$ et $B(t)$ deux matrices $\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(A(t).B(t)\right) = \frac{dA(t)}{dt}.B(t) + \frac{dB(t)}{dt}A$

Dérivé de l'inverse

$$\frac{dA^{-1}}{dt} = -A^{-1}\,\frac{dA}{dt}.A^{-1}$$

Dérivation d'une fonction Scalaire / à un Vecteur :

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow R$$

$$f(x) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Pour une fonction scalaire $V(x)$, nous avons $t \in \mathbb{R}^+$

* $\frac{dV(x)}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt}$

* $\frac{\partial}{\partial x} Ax = A^T$

* $\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = Ax + A^T x$ (si A est sym $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} x^T A x = 2Ax$)

pour $A : n \times m$ $\quad x : n \times 1$ $\quad y : m \times 1$

* $\frac{\partial}{\partial x} x^T A y = Ay$

* $\frac{\partial}{\partial y} x^T A y = A^T x$

Valeurs propres d'une matrice carrée :

Soit l'equation algébrique suivante :

$$y = Ax$$

La question est : exist-il un scalaire λ multiplier par x pour obtenir y

$$\lambda x = Ax \Rightarrow \lambda x - Ax = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0} \quad \text{———} \quad (*)$$

L'equation (*) est appelé équation caractéristique du système $y = Ax$ pour une matrice $A : n \times m$ nous avons n valeur de λ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ ---- λ_n) Les racines de l'eq caractéristique sont appelés valeurs propres de A.

Rq:

une matrice A peut avoir des valeurs propres complexe

Rq:

si les valeurs propres de A sont $\lambda_i : i = 1, 2, \ldots, n$ alors les Valeurs propre de A^{-1} sont λ_i^{-1}

Vecteurs propre d'une matrice carrée: $A : n \times m$

Pour chaque valeur propre λ_i ont peut écrire $(\lambda_i I - A) x_i = 0$

donc trouver tout vecteur non nul x_i tq: $A x_i = \lambda_i x_i$

ces vecteur sont appelés: vecteur propres associés aux valeurs propres λ_i de A

Pour calculer les valeurs propres nous proposons la formule suivante

$$x_i = Col\left[adj(\lambda_i I - A)\right]$$
$$= Col\left[Cof^T(\lambda_i I - A)\right]$$

Matrice similaires:

Si $A : n \times m$ et $B : n \times m$ alors ont dit que A et B sont similaire s'il existe une matrice P non singulière

tq: $P^{-1} A P = B$

Diagonalisation des matrice

si A: nxm possède n valeurs propre distinctes ; donc il exist n vecteurs propre linéairement indépendant. Dans ce Cas la matrice A peut être diagonalisé par la transformation de similarité Définissant la matrice P: nxm tel que

$$P = [P_1 \mid P_2 \mid \cdots \mid P_n] = [X_1 \mid X_2 \mid \cdots X_n]$$

ou $P_i = X_i$ sont les vecteurs propres de A, la matrice P doit être non singulière ($\exists P^{-1}$)

$$A X_1 = \lambda_1 X_1$$

$$A X_2 = \lambda_2 X_2$$

$$\vdots$$

$$A X_n = \lambda_n X_n$$

Combinons ce equation dans 1 seul equation matricielle

$$A [X_1 \mid X_2 \mid \cdots X_n] = [X_1 \mid X_2 \mid \cdots X_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} A P = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n)$$

Donc, la matrice A est transformée en une matrice diagonale par la transformation de similarité : cette operation s'apelle Diagonalisation d'une matrice.

Exemple 01 : Soit la fonction scalaire suivante ;

$$V(x) = V(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_3$$

1 - Calculer $\dfrac{\partial V(x)}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 V(x)}{\partial^2 x}$

2 - Vérifier l'expression

1/ $\dfrac{d}{dt} V(x) = \left(\dfrac{\partial V}{\partial x}\right)^T \dfrac{dx}{dt}$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ 8x_2 + 2x_1 \\ -4x_1 + 10x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial^2 x} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \to \frac{\partial}{\partial x_1} \Rightarrow \text{de chaque élément de vecteur} \\ \to \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \to \frac{\partial}{\partial x_3} \end{array}$$

2/ $\dfrac{d}{dt} V(x) = 4x_1\dot{x}_1 + 2\dot{x}_1x_2 + 2x_1\dot{x}_2 + 8x_2\dot{x}_2 + 10x_3\dot{x}_3 - 4\dot{x}_1x_3 - 4x_1\dot{x}_3$

$$\frac{d}{dt} V(x) = \dot{x}_1(4x_1 + 2x_2 - 4x_3) + \dot{x}_2(2x_1 + 8x_2) + \dot{x}_3(10x_3 - 4x_1)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 4x_1 + 2x_2 - 4x_3 & 2x_1 + 8x_2 & 10x_3 - 4x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} = \dot{x}_1(4x_1 + 2x_2 - 4x_3) + \dot{x}_2(2x_1 + 8x_2) + \dot{x}_3(10x_3 - 4x_1) = \frac{d}{dt} V(x)$$

Exemple 02 :

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

et le vecteur $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Verifier les formules suivantes :

* $\dfrac{\partial}{\partial x} Ax = A^T$

* $\dfrac{\partial}{\partial x} X^T A = AX + A^T X$

Soit la matrice $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Verifier $\dfrac{\partial}{\partial x} BX = B^T$

Solution :

1/
$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial Ax}{\partial x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A^T$$

2/

$$Ax + A^T x = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ -x_1 + x_2 + 4x_3 \\ 3x_1 + 0 + 2x_3 \end{bmatrix}$$

$$Ax + A^T x = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

$$x^T A x = x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_3 x_1 + 2x_1 x_2 + x_2^2 + 3x_1 x_3 + 4x_2 x_3 + 2x_3^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 + 6x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}$$

donc : $\frac{\partial}{\partial x} x^T A x = Ax + A^T x$

③ $$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

nbr de fonction

$$\frac{\partial}{\partial x} Bx = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = B^T$$

Exemple 03:

soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ et soient les vecteurs

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Verifier $\frac{\partial}{\partial x} x^T A y = A y$

$$\frac{\partial}{\partial y} x^T A y = A^T y$$

<u>Exemple 04:</u>

Soit la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

- Calculer les valeurs propres de A
- " " Vecteurs propres de A
- Determiner la matrice de similarité P.

<u>Solution:</u>

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 6 & 11 & \lambda+6 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

$$= (\lambda+1)(\lambda^2+5\lambda+6) \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = -1}, \boxed{\lambda_2 = -2} \text{ et } \boxed{\lambda_3 = -3}$$

Les vecteurs Propres :

$$A x_1 = \lambda_1 x_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b = -a \\ c = -b \\ -6a - 11b - 6c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -6a - 11(-a) - 5a = 0$$

$$b = 0 \quad c = 0 \quad a = 0$$

Le système possède une ∞ de solution on doit choisir une solution parmis toute les solutions possibles

Un autre choix $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases}$ $\quad x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A x_2 = -2 x_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ c \\ -6a - 11b - 6c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} b = -2a \\ c = -2b \\ -6a - 11b - 6c = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -2 \\ c &= 4 \end{aligned} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$A X_3 = -3 X_3$

$$\begin{bmatrix} b \\ c \\ -6a-11b-6c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3a \\ -3b \\ -3c \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} b &= -3a \\ c &= -3b \\ -6a-11b-6c &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -3 \\ c &= 9 \end{aligned} \qquad X_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$P = [X_1 \mid X_2 \mid X_3]$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{diag} = P^{-1} A P$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ -3 & -4 & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_{diag} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Chapitre 01: Representation d'état

<u>Definition</u>: ont appēle etat d'un systēme l'information minimale qui ont plus la connaissance d'entrē u définie d'un façon unique de la sortie y

<u>Exemple 01</u>:

$$\dot{x} = ax + bu$$

$$x(t) = x_0\, e^{at} + b \int_0^t \bar{e}^{\tau t}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = f(x_0, u)$$

à $t=0$ la connaissance de x_0 et $u(t)$ à $t \geqslant 0$ définie d'1 façon unique $x(t)$

Alors ont dit que x_0 est variable d'etat lorsque cette dērniere prend plusieurs valeurs

<u>Exemple 02</u>:

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_2 y = b\,u(t)$$

$$u(t) \rightarrow \boxed{\text{syst}} \rightarrow y(t)$$

a $t=0$ la connaissance de y_0, $\dot{y}_0$ et $u(t)$

definie d'une façon unique $y(t)$

nous avons alors deux variable d'etat y_0, $\dot{y}_0$ qui varie au cours du temps donc les variables d'etat seront definie par $y(t)$ et $\dot{y}(t)$

<u>pour conclure</u>:

syst 1er ordre: 1 variable d'etat $y(t)$

système 2ème ordre : 2 variable d'état $y(t), \dot{y}(t)$

" 3ème " : 3 variable d'état $y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t)$

⋮

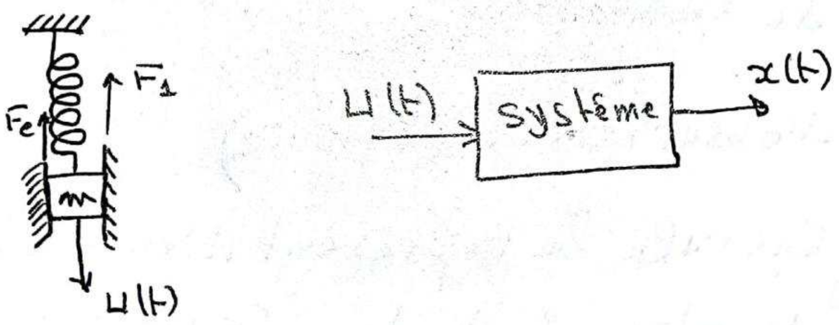
Système n ordre : n variable d'état $y(t), \dot{y}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)$

Un système régit par une éq diff d'ordre n a exactement n variable d'état

n : est appelé dimension du système

<u>Exemples des systèmes :</u>

① - système mécanique :



$$\sum F_i = m\ddot{x}$$

$$u(t) - F_e - F_1 = m\ddot{x}$$

$$u(t) - f\dot{x} - Kx = m\ddot{x} \quad \text{avec} \begin{cases} f : \text{coef de frottement} \\ K : \text{Const du Ressort} \end{cases}$$

$m\ddot{x} + f\dot{x} + Kx = u(t)$ Equation dif du 2ème ordre

Choix des variables d'état $\rightarrow$ 2 variable d'état $x(t), \dot{x}(t)$

$$x_1 = x(t) \qquad \dot{x}_1 = \dot{x}(t)$$
$$x_2 = \dot{x}(t) \qquad \dot{x}_2 = \ddot{x}(t) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m}x_1 - \frac{f}{m}x_2 + \frac{1}{m}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = CX$$

A: Matrice d'evaluation ou (dynamique)

B: Matrice de Commande

C: Matrice d'observation (Mesure)

D'1 façon générale la représentation d'etat d'un syst d'ordre n est donnés par

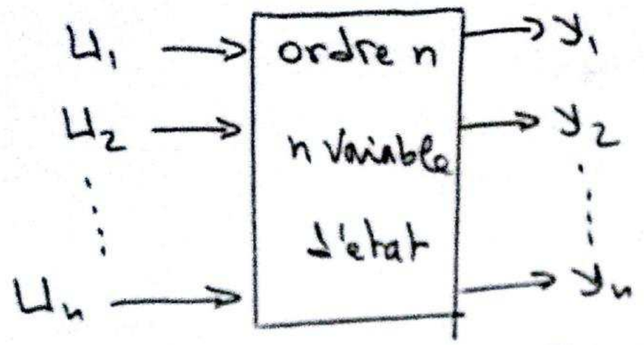
$$\begin{cases} \dot{x} = AX + Bu \\ y = CX + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Matrice de} \\ \text{transfert direct}}}{D}u \end{cases}$$

<u>Cas monovariable</u>:

$X : n \times 1$ $\quad$ $u : 1 \times 1$ $\quad$ $B : n \times 1$ $\quad$ $y = 1 \times 1$

$C = 1 \times n$ $\quad$ $D = 1 \times 1$ $\quad$ $A : n \times m$

Cas multivariable



$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

On a r entré et m sortie

$X : n\times 1$ $\quad y : m\times 1$ $\quad u : r\times 1$

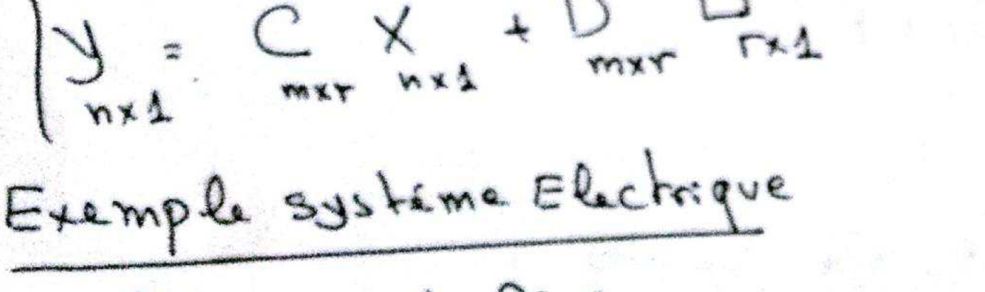
$A : n\times n$ $\quad B : n\times r$ $\quad C : m\times r$

$D : m\times r$

$$\begin{cases} \dot{X}_{n\times 1} = A_{n\times n} \, X_{n\times 1} + B_{n\times r} \, u_{r\times 1} \\ y_{n\times 1} = C_{m\times r} \, X_{n\times 1} + D_{m\times r} \, u_{r\times 1} \end{cases}$$

Exemple système Electrique

① - Circuit RLC



d'aprés la lois de maille :

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + y \quad --- \quad (*)$$

$$y = \frac{1}{c}\int i(t)\,dt$$

$$\dot{y} = \frac{1}{c} i(t)$$

$$i(t) = \dot{y}C$$

$$\frac{di(t)}{dt} = \ddot{y}C$$

On Rampla ce dans (*)

$$U = R\dot{y}C + LC\ddot{y} + y$$

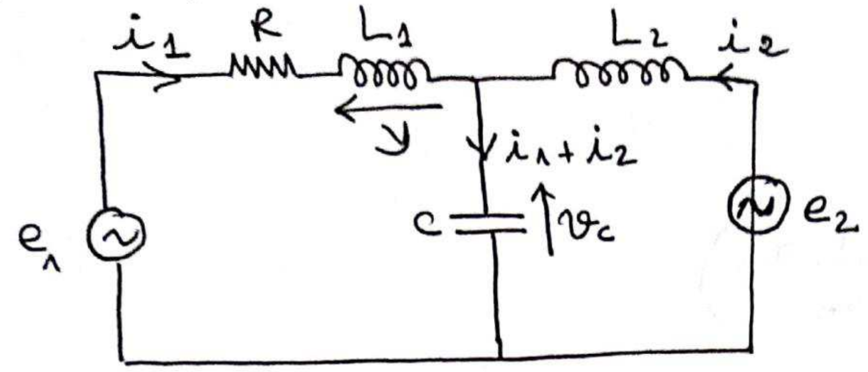
$$\boxed{\ddot{y} + \frac{R}{L}\dot{y} + \frac{1}{LC}y = \frac{1}{LC}u(t)}$$

$$\begin{matrix} x_1 = y(t) \\ x_2 = \dot{y}(t) \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y}(t) \\ \dot{x}_2 = \ddot{y}(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{-1}{LC}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{LC}u(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

② Exemple ② système electrique :



- Les entrés de ce système e_1 et e_2
- La sortie y ~~xxx~~ est la tension au borne de L_1

en choisissant les variables d'etat suivants i_1, i_2 et v_c

Donner une Représentation d'etat de ce système

Possant $i_1 = x_1$, $i_2 = x_2$ et $v_c = x_3$

$$\begin{cases} e_1 = R i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + v_c \\ e_2 = v_c + L_2 \dfrac{di_2}{dt} \\ v_c = \dfrac{1}{c} \int (i_1 + i_2)\, dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_1 = R x_1 + L_1 \dot{x}_1 + x_3 \\ e_2 = x_3 + L_2 \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{c}(x_1 + x_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \dfrac{e_1}{L_1} - \dfrac{R}{L_1} x_1 - \dfrac{1}{L} x_3 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{e_2}{L_2} - \dfrac{x_3}{L_2} \\ \dot{x}_3 = \dfrac{1}{c} x_1 + \dfrac{1}{c} x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L_1} & 0 & \dfrac{-1}{L_1} \\ 0 & 0 & \dfrac{-1}{L_2} \\ \dfrac{1}{c} & \dfrac{1}{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{L_2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$y = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

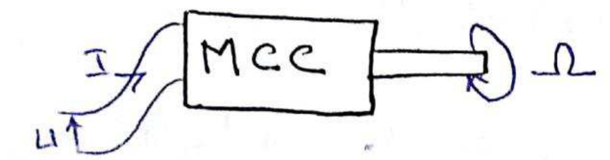
$$y = L_1 \dot{x}_1$$

$$y = L_1 \left(\frac{e_1}{L_1} - \frac{R}{L_1} x_1 - \frac{1}{L_1} x_3 \right)$$

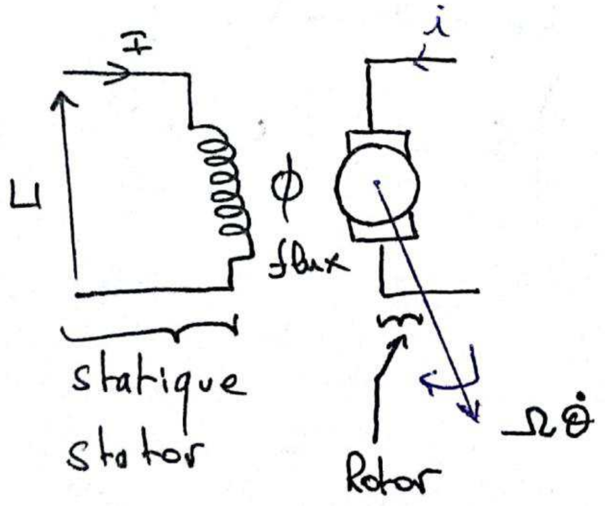
$$y = e_1 - R x_1 - x_3$$

$$y = \begin{bmatrix} -R & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

Example 03 : La représentation d'état d'un MCC.



$$\begin{cases} \dot{x} = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases}$$



$$C_m = K_m \Phi \, i$$ couple mécanique

$$e = K_m \Phi \Omega$$

I : Courant Inducteur

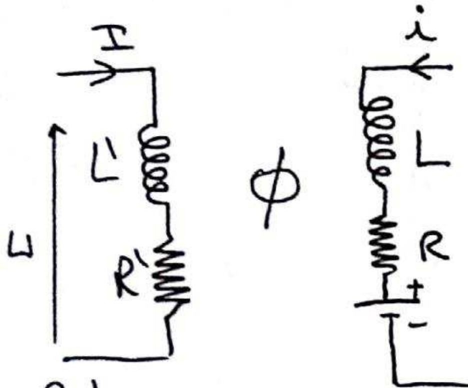
U : tension d'entrée

Ω : Vitesse

i : Courant Induit

ϕ : flux champ

Le Rotor sera modélisé par



Rotor Induit

stator Inducteur

C_m : couple mécanique

$$C_m = K_m \phi \Omega$$

Eq electrique

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + \underbrace{K_m \phi}_{} \Omega$$

$$U = Ri + L\frac{di}{dt} + K\Omega$$

on prend i, Ω comme variable d'etat

$$\boxed{\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} - \frac{K}{L}\Omega + \frac{1}{L}U}$$

Eq mécanique

$$\sum M = J\dot{\Omega}$$

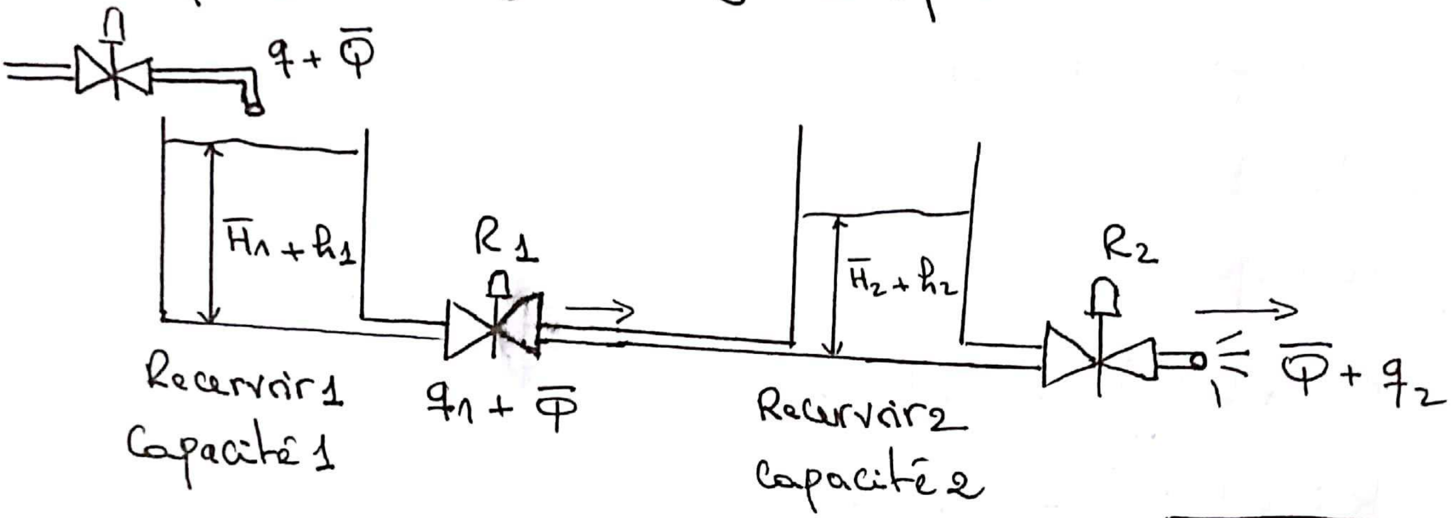
$$J\dot{\Omega} = C_m - f\Omega$$

$$\boxed{\frac{d\Omega}{dt} = \frac{K}{J}i - \frac{f}{J}\Omega}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{di}{dt} \\ \frac{d\Omega}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{K}{L} \\ \frac{K}{J} & -\frac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i \\ \Omega \end{bmatrix}$$

<u>Exemple 04:</u> Systéme Hydraulique



$$q_1 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} \qquad C_1 \frac{dh_1}{dt} = q - q_1 \qquad q(t) \rightarrow \boxed{\text{syst}} \rightarrow q_2(t)$$

$$q_2 = \frac{h_2}{R_2} \qquad C_2 \frac{dh_2}{dt} = q_1 - q_2$$

$$\ddot{q}_2 + \alpha_1 \dot{q}_2 + \alpha_2 q_2 = \beta q$$

→ Identifier α_i et β_i:

$$h_1 = q_1 R_1 + h_2 \Rightarrow h_1 = q_1 R_1 + q_2 R_2$$

$$h_2 = q_2 R_2 \Rightarrow \frac{dh_2}{dt} = R_2 \frac{dq_2}{dt}$$

$$C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} = q_1 - q_2$$

$$q_1 = C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} + q_2$$

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[q_1 R_1 + q_2 R_2\right] = q - C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} - q_2$$

$$C_1 \frac{d}{dt}\left[R_1\left(C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} + q_2\right) + q_2 R_2\right] = q - C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} - q_2$$

$$C_1 C_2 R_1 R_2 \frac{d^2 q_2}{dt} + \left(C_1 R_1 + C_1 R_2\right)\frac{dq_2}{dt} + C_2 R_2 \frac{dq_2}{dt} + q_2 = q$$

$$C_1 C_2 R_1 R_2 \frac{d^2 q_2}{dt} + \left[C_1\left(R_1 + R_2\right) + C_2 R_2\right]\frac{dq_2}{dt} + q_2 = q$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt} + \left[\frac{C_1\left(R_1 + R_2\right) + C_2 R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2}\right]\frac{dq_2}{dt} + \left[\frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2}\right] q_2 = \frac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} q$$

$$\begin{cases} x_1 = q_2(t) \\ x_2 = \dot{q}_2(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{q}_2(t) = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{q}_2(t) = \dfrac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} q(t) - \left[\dfrac{C_1(R_1+R_2) + C_2 R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2}\right] \overset{x_2}{\dot{q}_2(t)} - \dfrac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \overset{x_1}{q_2(t)} \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\left[\dfrac{C_1(R_1+R_2)+C_2R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2}\right] \end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{-1}{C_1 C_2 R_1 R_2} & -\left[\dfrac{C_1(R_1+R_2) + C_2 R_2}{C_1 C_2 R_1 R_2}\right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{C_1 C_2 R_1 R_2} \end{bmatrix} q(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$$

→ Refaire le m̂ travail on prenant $x_1 = h_1$ $x_2 = h_2$

→ la sortie du systéme est h_1

→ l'entré du systéme $q(t)$

<u>Representation d'etat d'un syst d'ordre n :</u>

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\dot{y} + a_n y = u$$

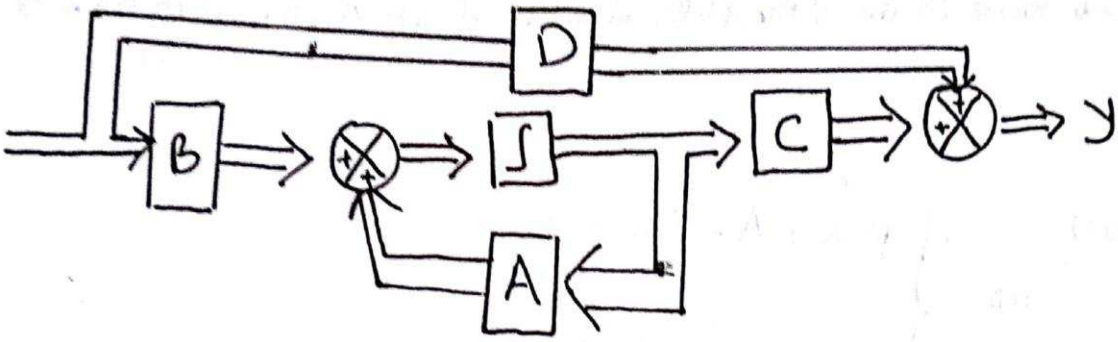
$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} \\ x_3 = \ddot{y} \\ \vdots \\ x_n = y^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = -a_n x_1 - a_{n-1} x_2 - \cdots a_1 x_n + u \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & a_1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} u$$

Diagramme de simulation d'une représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

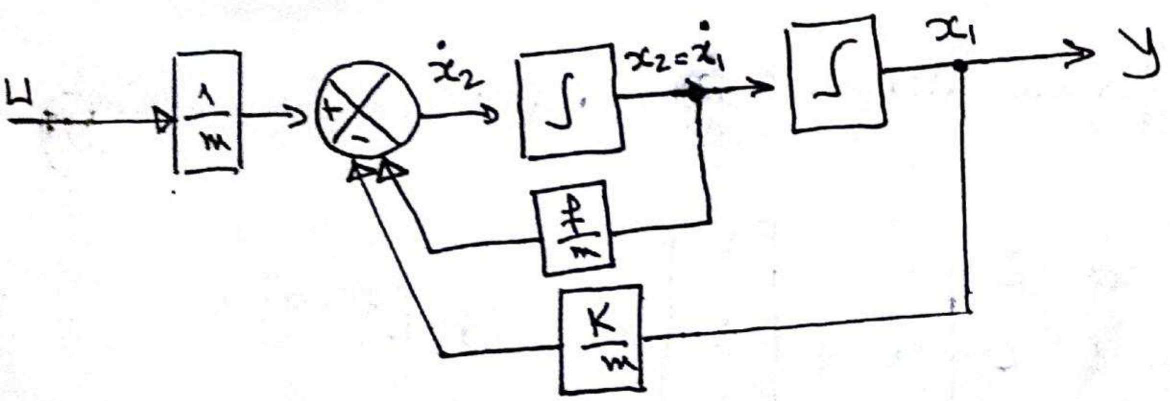


Exemple :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & -\frac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/m \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{K}{m} x_1 - \frac{f}{m} x_2 + \frac{u}{m} \end{cases}$$



Diagonalisation d'1 Representation d'etat

$P = [V_1 \vdots V_2 \vdots \cdots\cdots V_n]$ vecteur propres de la matrice A

$X = P\hat{X} \rightarrow$ nouvelle variable d'etat dont $\hat{A}$ est diagonale

$\dot{X} = P\dot{\hat{X}}$

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ y = CX + DU \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\dot{\hat{X}} = AP\hat{X} + BU \\ y = CP\hat{X} + DU \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \underbrace{P^{-1}AP}_{\hat{A}}\hat{X} + \underbrace{P^{-1}B}_{\hat{B}}U \\ y = \underbrace{CP}_{\hat{C}}\hat{X} + DU \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{X} + \hat{B}U \\ y = \hat{C}\hat{X} + DU \end{cases}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ & & \ddots \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

__Exemple :__

trouver la forme diagonal de la representation d'etat Suivante

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} U \qquad y = [1\ 0\ 0]\, x$$

Vecteur propre $V^1 = (1\ 0\ -1)^T$ $V^2 = (0\ 1\ 0)^T$ $V^3 = (1\ 0\ 1)^T$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\hat{C} = [1\ 0\ 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 1]$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = [1 \quad 0 \quad 1] \hat{X} \end{cases}$$

Représentation d'etat dans le cas ou il y'a des derivés de la commande :

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = b_1 \dot{u} + b_0 u \quad \cdots (*)$$

méthode de la variable auxilliaire $Z(S)$

$$\mathcal{L}^{-1}(*) \Rightarrow S^2 y(s) + a_1 S y(s) + a_0 y(s) = b_1 S u(s) + b_0 u(s)$$

$$y(s)\left[S^2 + a_1 S + a_0\right] = u(s)\left[b_1 S + b_0\right]$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_1 S + b_0}{S^2 + a_1 S + a_0} \quad \text{possant } Z(s) = \frac{u(s)}{S^2 + a_1 S + a_0}$$

$$u(s) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{S^2 + a_1 S + a_0}} \xrightarrow{Z(s)} \boxed{b_1 S + b_0} \longrightarrow y(s)$$

$$\begin{cases} Z(s) = \dfrac{U(s)}{s^2 + a_1 s + a_0} \\ \\ y(s) = Z(s)\left(b_1 s + b_0\right) \end{cases}$$

$$\Big\downarrow \mathcal{L}^{-1}$$

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) + a_1 \dot{z}(t) + a_0 z(t) = u(t) \\ \\ y(t) = b_1 \dot{z}(t) + b_0 z(t) \end{cases}$$

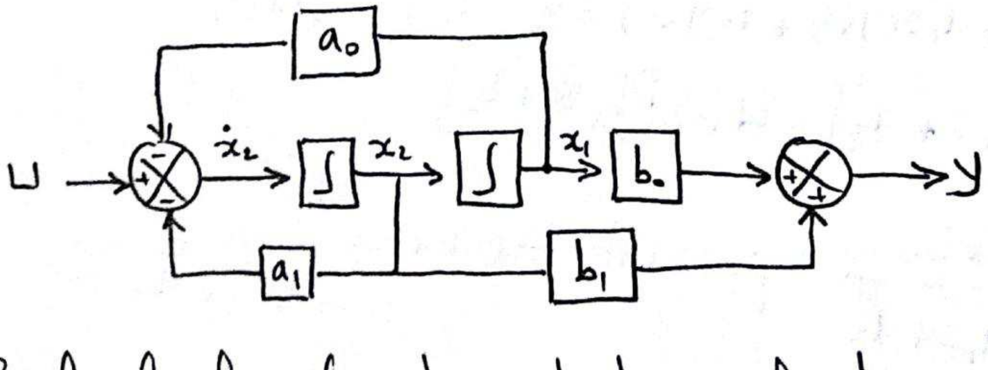
$$\begin{cases} x_1 = z(t) \\ \\ x_2 = \dot{z}(t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \\ \dot{x}_2 = -a_0 x_1 - a_1 x_2 + u(t) \end{cases}$$

$$y(t) = b_0 x_1 + b_1 x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Diagramme de simulation



Calcule la fonction de transfert:

Relation entre $G(s)$ et $\begin{cases} \dot{x} = A x(t) + B u(t) \\ y = C x(t) + D u(t) \end{cases}$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$sX(s) - AX(s) = BU(s)$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1} BU(s) + DU(s)$$

$$Y(s) = U(s)\left[C(sI - A)^{-1} B + D\right]$$

$$\boxed{\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D}$$

les pôles $\Rightarrow$ Annule le Din

$\Rightarrow |sI - A| = 0$ Eq Caracteristique

Valeurs propres de A = pôles du système.

<u>Exemple</u>:

Soit la representation d'etat suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

- trouver les pôles du système.
- trouver par 2 méthode differentes la F.T $G(s)$.

Les pôles

$$SI-A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{+} & -1^{+} \\ 2^{-} & s+3^{+} \end{bmatrix}$$

$$|SI-A| = s(s+3) + 2$$
$$= s^2 + 3s + 2 \rightarrow \text{Eq Caraterisique}$$

$$s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$\boxed{s_1 = -1} \quad \boxed{s_2 = -2}$$

1ᵉ Methode :

$$(SI-A)^{-1} = \frac{1}{s^2+3s+2} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ +1 & +s \end{bmatrix}^T$$

$$G(s) = C(SI-A)^{-1}B$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s+3}{s^2+3s+2} & \frac{+1}{s^2+3s+2} \\ \frac{-2}{s^2+3s+2} & \frac{+s}{s^2+3s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}}$$

2ᵉ Methode

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + u \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = y \\ x_2 = \dot{y} = \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 = \ddot{y} = -2y - 3\dot{y} + u \end{cases}$$

$$\ddot{y} + 2y + 3\dot{y} = u \Rightarrow Y(s)[s^2+3s+2] = U(s) \Rightarrow \boxed{G(s) = \frac{1}{s^2+3s+2}}$$

Forme Canonique diagonale :

$$\ddot{y} + 3\dot{y} + 2y = u$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

$$= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(s) = \frac{u(s)}{s+1} - \frac{u(s)}{s+2}$$

possant :

$$\begin{cases} x_1(s) = \dfrac{u(s)}{s+1} \\ x_2(s) = \dfrac{u(s)}{s+2} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \end{cases}$$

$$y = x_1 - x_2$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

On remarque que A est diagonale.

$$G(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)}$$

$$y(s) = u C_0 + \frac{C_1 u}{s-p_1} + \frac{C_2 u}{s-p_2} + \dots + \frac{C_n u}{s-p_n}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{U}{s-p_1} \\ x_2 = \dfrac{U}{s-p_2} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{U}{s-p_n} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + U \\ \dot{x}_2 = p_2 x_2 + U \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + U \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + C_0 U$$

forme Canonique de Jordan:

Si $G(s)$ Présente des pôles multiples la forme canonique diagonale précedente doit être modifiée à la forme Canonique de Jordan, on suppose $p_1 = p_2 = p_3$

$$G(s) = \frac{b_0 s^n + b_n s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + b_n}{(s-p_1)^3 (s-p_4) \cdots (s-p_n)}$$

$$\frac{y(s)}{U(s)} = C_0 + \frac{C_1}{(s-p_1)^3} + \frac{C_2}{(s-p_1)^2} + \frac{C_3}{(s-p_1)} + \cdots + \frac{C_n}{s-p_n}$$

$$y(s) = C_0 U(s) + C_1 \frac{U(s)}{(s-p_1)^3} + C_2 \frac{U(s)}{(s-p_1)^2} + \cdots + C_3 \frac{U(s)}{s-p_1} + C_4 \frac{U(s)}{s-p_4}$$

$$+ \cdots + c_n \frac{U(s)}{s-p_n}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{U(s)}{(s-p_1)^3} \\[2ex] x_2 = \dfrac{U(s)}{(s-p_1)^2} \\[2ex] x_3 = \dfrac{U(s)}{s-p_1} \\[2ex] x_4 = \dfrac{U(s)}{s-p_4} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{U(s)}{s-p_n} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{x_2}{s-p_1} \\[2ex] x_2 = \dfrac{x_3}{s-p_1} \\[2ex] x_3 = \dfrac{U}{s-p_1} \\[2ex] x_4 = \dfrac{U}{s-p_4} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{U}{s-p_n} \end{array}\right.$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left\{\begin{array}{l} \dot{x}_1 = p_1 x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = p_1 x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 = p_1 x_3 + U \\ \dot{x}_4 = p_4 x_4 + U \\ \vdots \\ \dot{x}_n = p_n x_n + U \end{array}\right.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \overset{\Theta_1}{\underset{\Theta_2}{\left[\begin{array}{ccc|cccc} p_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & p_4 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & p_5 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & p_n \end{array}\right]}} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} U$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \theta_1 & 0 \\ 0 & \theta_2 \end{bmatrix} x + BU$$

θ_1 et θ_2 : bloque de Jordan

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{bmatrix} x + C_0 U$$

$P_1 = P_2 \qquad P_3 \; P_4 \; P_5$

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & P_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_5 \end{array}\right]$$

$P_1 = P_2 = P_3 \qquad P_4 = P_5 \qquad P_6 , P_7$

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cccc} P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & P_4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_7 \end{array}\right]$$

P_1, P_2, P_3

$$A = \begin{bmatrix} P_1 & 0 & 0 \\ 0 & P_2 & 0 \\ 0 & 0 & P_3 \end{bmatrix}$$

Noton qu'une matrice diagonal est un cas particulier de la forme Canonique de Jordan, Cette forme à la propriété que les élements de la diagonal principale de la matrice sont des valeurs propres de A que les autres élements sont des 0 et 1

Exemple 1 :

Soit la fonction de transfert suivante :

$$G(S) = \frac{S+3}{S^2+3S+2} = \frac{Y(S)}{U(S)}$$

trouver les formes Canoniques

- Contrôlable - observable - Diagonale

1- La forme Contrôlable

$$\begin{cases} Z(S) = \dfrac{U(S)}{S^2+3S+2} \quad \text{----}(1) \\ \\ Y(S) = Z(S)(S+3) \quad \text{——}(2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow U(s) = Z(s)\left[s^2+3s+2\right]$

$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$

$U = \ddot{z} + 3\dot{z} + 2z$

$\ddot{z} = U - 3\dot{z} - 2z$

on pose $\begin{cases} z = x_1 \\ \dot{z} = x_2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = U - 3x_2 - 2x_1 \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow Y(s) = sZ(s) + 3Z(s)$

$y(s) = \dot{z} + 3z \Rightarrow y = x_2 + 3x_1$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

forme observable $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

<u>forme diagonale</u>:

$$G(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

$$y(s) = 2\,\frac{U(s)}{s+1} - 1\,\frac{U(s)}{s+2}$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{U(s)}{s+1} \\ x_2 = \dfrac{U(s)}{s+2} \end{cases} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2U \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + U \end{cases}$$

$$y(s) = 2x_1 - x_2$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} U$$

Exemple 2

Soit le systéme $\dddot{y} + 6\ddot{y} + 11\dot{y} + 6y = 6U$

trouver la représentation d'etat Controlable et Diagonal.

1- La forme Controlable

$$\begin{cases} y = x_1 \\ \dot{y} = x_2 \\ \ddot{y} = x_3 \\ \dddot{y} = 6U - 6\ddot{y} - 11\dot{y} - 6y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = 6U - 6x_3 - 11x_2 - 6x_1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

La representation d'etat diagonale:

$$(S^3 + 6S^2 + 11S + 6)\, Y(S) = 6U(S)$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{6}{S^3 + 6S^2 + 11S + 6} = \frac{6}{(S+1)(S+2)(S+3)}$$

$$\frac{Y(S)}{U(S)} = \frac{3}{S+3} - \frac{6}{S+2} + \frac{3}{S+1}$$

$$Y(S) = \frac{3U(S)}{S+3} - \frac{6U(S)}{S+2} + \frac{3U(S)}{S+1}$$

$$Y(S) = 3x_1 - 6x_2 + 3x_3$$

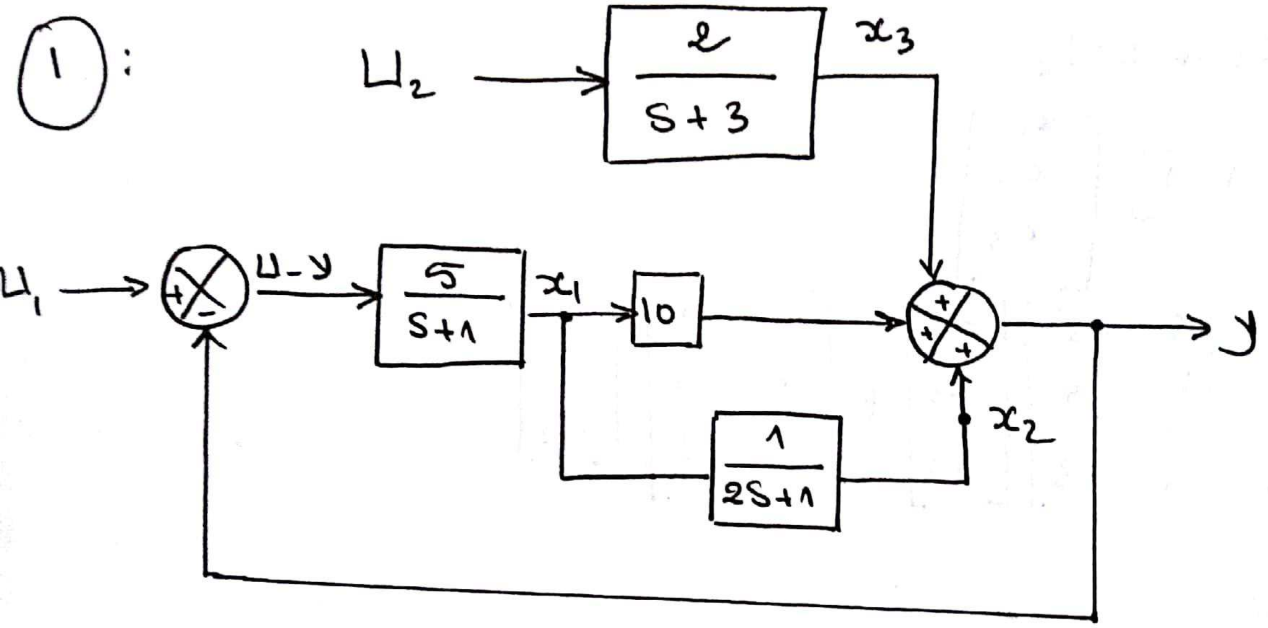
$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{U(S)}{S+3} \\ x_2 = \dfrac{U(S)}{S+2} \\ x_3 = \dfrac{U(S)}{S+1} \end{array} \right. \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -3x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -2x_2 + u \\ \dot{x}_3 = -x_3 + u \end{array} \right.$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

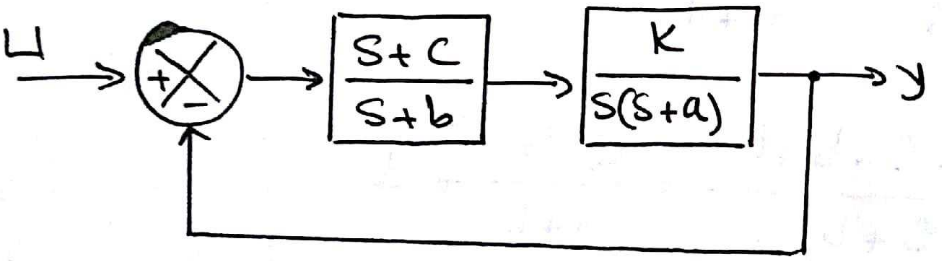
Exemple 3

trouver la Representation d'etat de shema suivants:

(1) :



(2) :



(1) : $\begin{cases} \dfrac{x_3}{U_2} = \dfrac{2}{S+3} \\ \dfrac{x_2}{x_1} = \dfrac{1}{2S+1} \\ \dfrac{x_1}{U_1-y} = \dfrac{5}{S+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 S + 3x_3 = 2U_2 \\ 2S x_2 + x_2 = x_1 \\ x_1 S + x_1 = 5U_1 - 5y \end{cases}$

$y = x_3 + 10x_1 + x_2$

$\begin{cases} \dot{x}_3 = 2U_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_2}{2} \\ \dot{x}_1 = -x_1 + 5U_1 - 5(x_3 + 10x_1 + x_2) \end{cases}$

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 = -51x_1 - 5x_2 - 5x_3 + 5u_1 \\
\dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1 \\
\dot{x}_3 = -3x_3 + 2u_2
\end{cases}
$$

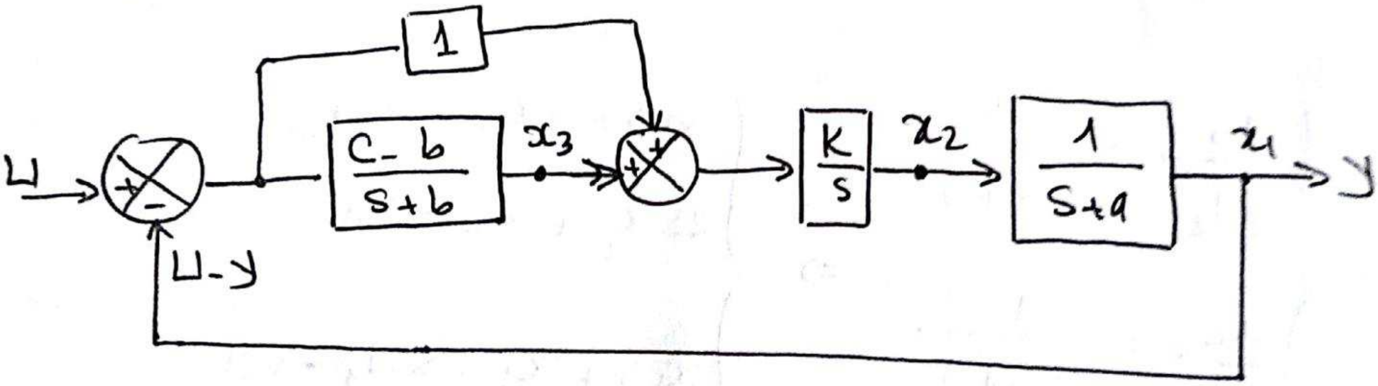
$$
y = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -51 & -5 & -5 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}
$$

2 :

$$
\frac{K}{S(S+a)} = \frac{K}{S} - \frac{1}{S+a}
$$

$$
\frac{S+C}{S+b} = \frac{S+C-b+b}{S+b} = \frac{C-b}{S+b} + 1
$$



$$
\begin{cases}
x_1 = y \\
x_1 = \dfrac{x_2}{S+a} \\
x_3 = (u-y)\left(\dfrac{C-b}{S+b}\right) \\
x_2 = \dfrac{K}{S}\left(x_3 + u - x_1\right)
\end{cases}
\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}
\begin{cases}
x_1 = y \\
\dot{x}_1 = -ax_1 + x_2 \\
\dot{x}_2 = Kx_3 + Ku - x_1K \\
\dot{x}_3 = x_3 b + x_1(b-c) + u(c-b)
\end{cases}
$$

$$
y = x_1
$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-a & 1 & 0\\ -K & 0 & K\\ (b-c) & 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ K\\ (c-b)\end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

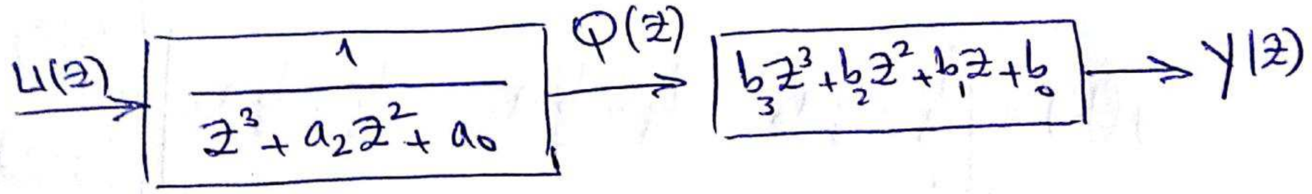
Représentation d'état des systs discrets :

<u>Exemple</u> : Soit le syst discret suivant :

$$y(k+3) + a_2 y(k+2) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) = b_3 u(k+3) + b_2 u(k+2) + b_1 u(k+1) + b_0 u(k)$$

Variable auxiliaire

$$\left[z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0\right] Y(z) = \left[b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0\right] U(z)$$



$$\begin{cases} Q(z) = \dfrac{U(z)}{z^3 + a_2 z^2 + a_0} \\ \\ Y(z) = \left(b_3 z^3 + b_2 z^2 + b_1 z + b_0\right) Q(z) \end{cases}$$

$$Z^{-1}\begin{cases} q(k+3) + a_2 q(k+2) + a_1 q(k+1) + a_0 q(k) = u(k) \\ \\ y(k) = b_3 q(k+3) + b_2 q(k+2) + b_1 q(k+1) + b_0 q \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1(k) = q(k) \\ x_2(k) = q(k+1) \\ x_3(k) = q(k+2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = x_3(k) \\ x_3(k+1) = q(k+3) \end{cases}$$

$$x_3(k+1) = a_0 x_1(k) - a_1 x_2(k) - a_2 x_3(k) + u(k)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}}_{A = G} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B = H} u(k)$$

$$y(k) = b_0 x_1(k) + b_1 x_2(k) + b_2 x_3(k) + b_3 \Big[-a_0 x_1(k) - a_2 x_2(k) - a_2 x_3(k)$$

$$+ u(k) \Big]$$

$$y(k) = \left[b_0 - b_3 a_0\right] x_1(k) + \left[b_1 - b_3 a_1\right] x_2(k) + \left[b_2 - b_3 a_2\right] x_3(k) + b_3 u(k)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} b_0 - b_3 a_0 & b_1 - b_3 a_1 & b_2 - b_3 a_2 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} b_3 \end{bmatrix}}_{D} u(k)$$

$$y(k) = C\,x(k) + D\,u(k)$$

$$\begin{cases} x(k+1) = G\,x(k) + H\,u(k) \\ y(k) = C\,x(k) + D\,u(k) \end{cases}$$

Fonction de transfert discrète :

$$\boxed{\frac{y(z)}{u(z)} = C\,(zI - G)^{-1} H + D}$$

Représentation d'état des systèmes non linéaires

Un système non linéaire est représenté dans l'espace d'état par

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)\,u \\ y = h(x) \end{cases}$$

avec $f = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$, $g = [g_1, g_2, \dots, g_n]^T$ sont des champs de fonction non linéaires. y : représente la sortie du système

Linéarisation autour d'1 pt de fonctionement:

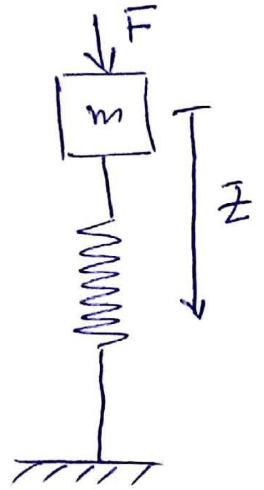
La linéarisation autour d'1 pt de fonctionement x_0 est donnée par:

On a $\dot{x} = Ax + Bu$, $y = Cx$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0} \qquad A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$B = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial u}\right|_{x=x_0} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(x,u)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n(x,u)}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad C = \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial h}{\partial x_n}\right]$$

Exemple, ressort à comportement non linéaire



Eq différentielle

$$m\ddot{z} = F + K_1 z + K_2 z^3$$

modèl d'etat:

- Entrée: $u(t) = F$
- Sortie: $y(t) = z(t)$
- Etat du systéme: $x_1 = z \quad x_2 = \dot{z}$

modèl d'etat non lineaire

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{z} = \frac{K_1}{m} x_1 + \frac{K_2}{m} x_1^3 + \frac{u}{m}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{K_1}{m} x_1 + \frac{K_2}{m} x_1^3 \end{pmatrix}}^{f} + \overbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{pmatrix}}^{g} u$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u$$

$$y(x) = x_1$$

$$A = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x = x_0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_1 + 3K_2 x_1^2}{m} & 0 \end{bmatrix}_{x = x_0}$$

$$B = \left.\frac{\partial g(x,u)}{\partial x}\right|_{x = x_0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad , \quad C = \left.\frac{\partial h}{\partial x}\right|_{x = x_0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

seule la matrice (A) change selon les pts de fonctionnement $\Rightarrow$. si $x_0 = (0,0,0) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{K_1}{m} & 0 \end{bmatrix}$

. si $x_0 = \left(\sqrt{\frac{K_1}{K_2}}, 0, 0\right) \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{4K_1}{m} & 0 \end{bmatrix}$