Chapitre 4: Analyse des systèmes dans l'espace d'état

Résolution de l'eq d'etat :

1ère Cas : eq diff scalaire

$\cancel{\dot{x} = ax + ku}$ $\quad \dot{y} + ay = u \qquad x = y$

$$\dot{x} = u - ax = -ax + u$$

Cas homogéne : $u = 0 \quad \dot{x} = ax \; \text{----} \; (1)$

supposer que la solution $x(t)$ est de la forme

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \text{----} + b_n t^n$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2b_2 t^2 + 3b_0 t^2 + \text{----} + k b_k t^{k+1} \; \text{----} \; (2)$$

(2) dans (1) $\Rightarrow$

$$b_1 + 2b_2 t^2 + 3b_0 t^2 + \text{----} + k b_k t^{k+1} = a\left(b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \text{----} + b_k t^k\right)$$

$$x(0) = b_0 = x_0$$

$$\begin{cases} b_1 = a b_0 \rightarrow b_1 = a x_0 \\ 2b_2 = a b_1 \rightarrow b_2 = \frac{1}{2} a^2 x_0 \\ 3b_3 = a b_2 \rightarrow b_3 = \frac{1}{3 \cdot 2} a^3 x_0 \\ \vdots \\ k b_k = a b_{k-1} \quad b_k = \frac{1}{k!} a^k x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + a x_0 t + \frac{1}{2!} a^2 x_0 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 x_0 + \dots + \frac{1}{K!} t^K x_0 a^K$$

$$x(t) = x_0 \left[1 + at + \frac{1}{2!} a^2 t^2 + \frac{1}{3!} a^3 t^3 + \dots + \frac{1}{K!} a^K t^K \right]$$

$$x(t) = x_0 \left[1 + at + \frac{1}{2!} (at)^2 + \frac{1}{3!} (at)^3 + \dots + \frac{1}{K!} (at)^K \right]$$

$$\boxed{x(t) = x_0 e^{at}}$$

a : pôle (valeur propre)

<u>2e Cas</u> : Eq diff d'ordre n

$\dot{X} = AX \quad X : n \times 1 \quad$ ou $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$A : n \times m$

$$x(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_K t^K$$

$$\dot{x}(t) = b_1 + 2 b_2 t + 3 b_3 t^2 + \dots + K b_K t^{K-1} + \dots$$

$$\begin{cases} b_1 = A x_0 \\ b_2 = \frac{1}{2} A^2 x_0 \\ b_3 = \frac{1}{3!} A^3 x_0 \\ \vdots \\ b_K = \frac{1}{K!} A^K x_0 \end{cases}$$

$$x(t) = x_0 + A x_0 t + \frac{1}{2} A^2 x_0 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 x_0 t + \dots + \frac{1}{K!} A^K x_0 t$$

$$x(t) = \left[I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots + \frac{1}{K!} A^K t^K \right] x_0$$

$$x(t) = \left[I + At + \frac{1}{2!} (At)^2 + \frac{1}{3!} (At)^3 + \dots + \frac{1}{K!} (At)^K \right] x_0$$

$$\underset{n \times 1}{x(t)} = \underset{n \times n}{e^{At}} \; \underset{n \times 1}{x_0}$$

$e^{At} = n \times n \rightarrow$ matrice de transition

$$e^{At} = \sum_{K=0}^{\infty} \frac{A^K t^K}{K!}$$

Resolution de l'eq par l'approche de Laplace :

1er Cas :

Scalaire $\dot{x} = ax$

$$Sx - x_0 = ax \Rightarrow X(S) = \frac{x_0}{S-a}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \Rightarrow \boxed{x(t) = X_0 e^{at}}$$

2e Cas

$\dot{x} = Ax \quad X : n \times 1$

$A : n \times m$

$$SX(S) = AX(S)$$

$$(SI - A)\, X(S) = X_0 \Rightarrow X(S) = (SI - A)^{-1} X_0$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(SI - A)^{-1} X_0\right\}$$

$$\boxed{e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}}$$

Matrice de transition $\Phi(t)$:

Cette Matrice sera definie par

$$\Phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(SI - A)^{-1}\right\}$$

$$\dot{x} = Ax$$

$$\boxed{x(t) = \Phi(t) \cdot x_0}$$

Propriété :

1. - $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$

2. - $\Phi(0) = I$

3. - $\Phi^{-1}(t) = \Phi(-t)$

- La matrice de transition contient toutes les informations du système soumis au condition initiales.

4) Cas particulier : si A est diagonale ; $A = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & \\ 0 & \ddots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

5) : $\Phi(t_1 + t_2) = \Phi(t_1) . \Phi(t_2)$

6) : $[\Phi(t)]^n = \Phi(nt)$

7) : $\Phi(t, t_0) = e^{A(t-t_0)}$

8) : $\Phi(t_0, t_0) = I$

Exemple : trouver $\Phi(t)$, $x(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{(SI - A)^{-1}\}$$

$$SI - A = \begin{bmatrix} S & -1 \\ 2 & S+3 \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1} + \dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

$\mathcal{L}^{-1} \downarrow$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$y(0) = x_0 \qquad x_1 = y \qquad x_{10} = x_0$

$\dot{y}(0) = \dot{x}_0 \qquad x_2 = \dot{y} \qquad x_{20} = \dot{x}_0$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \phi \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2e^{-t} - e^{-2t})x_{10} + (e^{-t} - e^{-2t})x_{20} \\ (-2e^{-t} + 2e^{-2t})x_{10} + (-e^{-t} + 2e^{-2t})x_{20} \end{bmatrix}$$

$$y(t) = x_1(t) = (2e^{-t} - e^{-2t})x_{10} + (e^{-t} - e^{-2t})x_{20}$$

① - Resolution de l'eq d'etat non homogéne :

$$\dot{x} = ax + bu \Rightarrow \dot{x} - ax = bu \Rightarrow$$

$$e^{-at}[\dot{x} - ax] = e^{-at}\, b\, u(t) \Rightarrow$$ par Intégration nous obtenons :

$$x(t) = \underbrace{e^{at}x(0)}_{\text{transitoir}} + \underbrace{e^{at}\int_0^t e^{-a\tau}\, b\, u(\tau)\, d\tau}_{\text{permanante}}$$

Le 1er terme représente la réponse du systéme à la C.I

Le 2e terme représente la réponse à l'entrée $u(t)$

② : Cas vectoriels

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$x : n\times 1$

$u : n\times 1$

$A : n\times n$

$B : n\times r$

$$\dot{X} - AX = Bu$$

$$e^{-At}[\dot{X} - AX] = e^{-At}Bu$$

$$= \frac{d}{dt}\left[e^{-At}X\right]$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-At}X\right] = e^{-At}Bu$$

$$\int_0^t \frac{d}{d\tau}\left[e^{-A\tau}X\right] d\tau = \int_0^t e^{-A\tau}Bu\, d\tau$$

$$\left[e^{-A\tau}x(\tau)\right]_0^t = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$e^{-At}x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$e^{-At}x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = e^{At}x(0) + e^{At}\int_0^\tau e^{-A\tau} B u(\tau)\, d\tau$$

$$\boxed{x(t) = \underbrace{e^{-At}x(0)}_{\text{Transitoire}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{P.P}}$$

$$x(t) = \Phi(t)\,x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B u(\tau)\, d\tau$$

Résolution par le Laplacien:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad x(0)$$

$$sx(s) - x(0) = Ax(s) + Bu(s)$$

$$(sI - A)\,x(s) = x(0) + Bu(s)$$

$$x(s) = (sI-A)^{-1}x(0) + (sI-A)^{-1}Bu(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{x(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI-A)^{-1}\right]x(0) + \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}Bu(s)\right\}$$

$$\boxed{x(t) = e^{At}\, x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B u(\tau)\, d\tau}$$

Exemple :

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad u(t) : \text{Echelon unitaire}$$

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} = e^{At}$$

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \int_0^t \begin{bmatrix} 2e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} & e^{-(t-\tau)} - e^{-2(t-\tau)} \\ -2e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} & -e^{-(t-\tau)} + 2e^{-2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau$$

$$x(t) = \Phi(t)\, x(0) + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Pour $x_1(0) = x_2(0) = 0 \Rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2} e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Cas diagonal : $\dot{x} = Ax + Bu$

1ère méthode : si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \cdots \lambda_m$

$$e^{At} = \Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

si A n'est pas diagonal

$$x = P\hat{x} \Rightarrow \dot{\hat{x}} = \underbrace{P^{-1}AP}_{\hat{A}}\,\hat{x}$$

$$\dot{\hat{x}} = \hat{A}\hat{x} \qquad \hat{x}(t) = e^{\hat{A}t}\hat{x}(0)$$

$$\Rightarrow x(t) = P e^{\hat{A}t}\hat{x}(0)$$

$$x(t) = P e^{\hat{A}t} P^{-1} x(0)$$

$$x(t) = e^{At} x(0)$$

$$\boxed{e^{At} = P e^{\hat{A}t} P^{-1}}$$

$$e^{At} = P \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & 0 \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_m t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

Exemple :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = P\, e^{\hat{A}t} P^{-1} \qquad \lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = -2$$

$$e^{\hat{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Calcule la matrice P :

$$A X_1 = \lambda_1 X_1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ -2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A X_2 = \lambda_2 X_2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} b = -2a \\ -2b = -2b \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$P = [X_1 \,\vdots\, X_2] \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$P\, e^{\hat{A}t} P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Exemple : Controlabilité

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$[B \vdots AB]$

$$\det\left[\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\right] = -2 \neq 0$$

$\Rightarrow$ rang $\left[[B \vdots AB]\right] = 2$

$\rightarrow$ syst controlable

Observabilités

$$\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$\det\left[\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \end{bmatrix}\right] \neq 0$ donc le rang $\left[\begin{bmatrix} C \\ \hline CA \end{bmatrix}\right] = 2$

Système observable

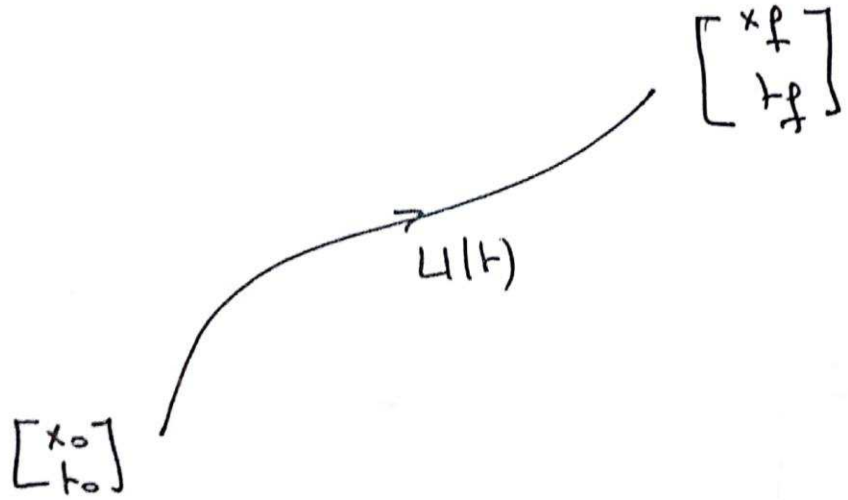
si la matrice A est diagonal on peut conclure directement la commandabilité et l'observabilité à partir des matrices B et C dans ce cas si B contient un element null alors le syst est non commandable.

si C contient un element null alors le syst est non observable.

Commandabilité et observabilité

a- notion de Commandabilité :

Un syst est dit commandable, s'il exist une commande $u(t)$ qui transforme l'etat de système $[x_0, t_0]$ à un état finale $[x_f, t_f]$



Un syst est dit Commandable si s si :

$$\text{rang} \left[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, A^2B \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, A^{n-1}B \right] = n \quad \text{Critère de Kalman}$$

b- notion d'observabilité :

Un syst est dit observable si à partir de la Connaissance de la sortie $y(t)$ et de l'entré $u(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t_f]$, ont peut remonté à l'etat intiale x_0

Un syst dit observable si s si :

$$\text{rang} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n$$

Exemple ~~le sy~~

Soit le systeme lineaire

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}5 \\ 0 \\ 1{,}25 \end{bmatrix} U \\ y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}2 & 0{,}8 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

- Ecrire la forme diagonale
- Deduire la commandabilité et l'observabilité.

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \underbrace{P^{-1} A P}_{\hat{A}} \hat{X} + \underbrace{P^{-1} B}_{\hat{B}} U \\ y = \underbrace{C P}_{\hat{C}} X \end{cases}$$

P : matrice de similarité

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -2/3 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \hat{X} + \begin{bmatrix} 0{,}75 \\ -1/8 \\ 0 \\ 0{,}625 \end{bmatrix} U \longrightarrow \bar{C} \text{ (Non Commandable)} \\ y = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix} \hat{X} \end{cases}$$

$\bar{O}$ (Non observable)

donc le systéme est non commandable, non observable.