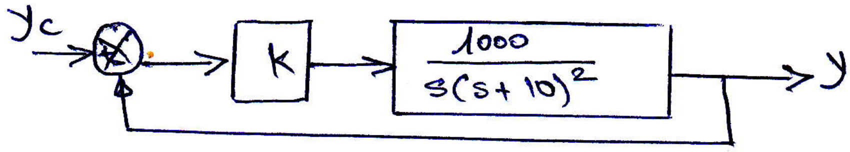
CORRECTION TD7 : Système en boucle fermée - synthèse de correcteurs

Exercice 1

FT du système

$$H(s) = \frac{1000}{s(s+10)^2}$$



Réécriture de la FT

$$H(s) = \frac{10}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

Le système a un gain en vitesse $k_v = 10$.

1. Schéma fonctionnel du système asservi : pas de difficulté particulière.
2. Marge de phase de 45°
   On veut avoir une marge de phase de 45° en jouant sur le gain k du correcteur P.

   FT en BO

   $$H_{BO}(s) = \frac{10k}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2} = \frac{1000\,k}{s(s+10)^2}$$

   Exploitation de l'information sur la marge de phase

   $$\begin{aligned} m_\varphi &= \pi + \varphi_{BO}(\omega_{C0}) \\ m_\varphi &= \pi - \frac{\pi}{2} - 2arctan\left(\frac{\omega_{C0}}{10}\right) \\ m_\varphi &= \frac{\pi}{2} - 2arctan\left(\frac{\omega_{C0}}{10}\right) = \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow 2arctan\left(\frac{\omega_{C0}}{10}\right) &= \frac{\pi}{4} \\ \Rightarrow \omega_{C0} &= 10tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

   AN : $\omega_{C0} = 4.14 rad/s$.

   Détermination de k
   La pulsation ω_{C0} vérifie la relation $|H_{BO}(j\omega_{C0})| = 1$

   $$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{10k}{\omega_{C0}\left(1+\frac{\omega_{C0}^2}{100}\right)} &= 1 \\ \Rightarrow k &= \frac{\omega_{C0}\left(1+\frac{\omega_{C0}^2}{100}\right)}{10} \end{aligned}$$

   AN : $k = 0.48$

3. Erreur statique
   Le système est de classe 1 (un intégrateur) $\Rightarrow \varepsilon_p(\infty) = 0$
   Erreur de traînage ou de vitesse
   Le système est de classe 1 (un intégrateur) $\Rightarrow$ erreur de vitesse finie mais non nulle.

   $$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{K_v} \text{ avec } K_v = \lim_{s\to 0} sH_{BO}(s) = 10k$$

4. Synthèse du correcteur à retard de phase
   FT du correcteur RP

   $$C(s) = b\frac{1+Ts}{1+bTs} \text{ avec } b > 1$$

FT en BO du système avec correcteurs P et RP

$$H_{BOC}(s) = kb\frac{1+Ts}{1+bTs}\frac{10}{s\left(1+\frac{s}{10}\right)^2}$$

Le RP doit ajouter en basses fréquences le gain nécessaire pour avoir la précision désirée.

Nouvelle expression de l'erreur de traînage

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{K_v} \text{ avec } K_v = \lim_{s\to 0} sH_{BOC}(s) = 10kb$$

Calcul de la valeur de b

$$\varepsilon_v(\infty) = \frac{1}{10kb} = \frac{5}{100}$$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{k}$$

AN : $b \approx 4$.

Calcul de T

Pour ne pas modifier la marge de phase précédemment réglée, il faut choisir T tel que :

$$\frac{1}{T} \leq \frac{\omega_{c0}}{10} \Rightarrow T \geq \frac{10}{\omega_{c0}}$$

AN : $T = \frac{10}{\omega_{c0}} \Rightarrow T = 2.4s$.

Exercice 2

FT du système

$$H(s) = \frac{1000}{s(s+10)^2}$$

Réécriture de la FT

$$H(s) = \frac{10}{s(1+\frac{s}{10})^2}$$

Gain en vitesse $k_v = 10$.

→ d'après le diagrame de bode : (BFSC) non Corrigé

$\omega_{c0} = 6{,}8\ rad/s$, $m_\varphi = 21°$

BFSC ⇒ $H_{BF}(s)$. il faut calculer M_φ en B.O

1. Choix d'un correcteur
   Le système est de classe 1 ⇒ erreur statique toujours nulle en l'absence de perturbations ⇒ l'action intégrale I n'est pas nécessaire.
   En BF sans correcteur, on a un dépassement de 60%. Ceci signifie que la marge de phase du système initial est petite. Pour l'augmenter, il faut une action dérivée D, d'où un correcteur à avance de phase AP.

2. Analyse du cahier de charges

$$D_{BF\%} \leq 5\% \Rightarrow \xi_{BF} = 0.7$$

$$\xi_{BF} = 0.7 \Rightarrow \omega_{n,BF}t_{r_5\%} = 3 \Rightarrow \omega_{n,BF} = \frac{3}{t_{r_5\%}}$$

$$\Rightarrow \omega_{n,BF} = 5rad/s$$

Formules d'approximation

Réponse oscillatoire désirée suppose un comportement du 2e ordre dominant pour le système en BF.

$$m_\varphi = 100\xi_{BF} = 70°$$

$$\omega_{c0} = \omega_{n,BF} = 5rad/s$$

3. Marge de phase du système pour la valeur de ω_{c0} précédente

$$\begin{aligned} m_\varphi &= \pi + \varphi(\omega_{C0}) \\ m_\varphi &= \pi - \frac{\pi}{2} - 2arctan\left(\frac{\omega_{C0}}{10}\right) \\ m_\varphi &= \frac{\pi}{2} - 2arctan\left(\frac{\omega_{C0}}{10}\right) \end{aligned}$$

AN : $m_\varphi = 37°$

Remarque : la valeur ci-dessus est la marge de phase qu'aurait le système si sa fréquence de coupure à 0dB est placée en $\omega_{c0} = 5rad/s$. Elle est différente de la marge de phase actuele du système qui est de 21° à la puslsation $\omega_{c0} = 6.8rad/s$(obtenue sous matlab).

4. Synthèse du correcteur

FT du correcteur

$$C(s) = K_c \frac{1 + aTs}{1 + Ts} \text{ avec } a > 1$$

Calcul du paramètre a

Le système apporterait une marge de phase de 37° . Pour avoir la marge de phase de 70°, il faut que le correcteur apporte une phase supplémentaire de $\Delta m_\varphi = 33°$. $= 70 - 37 = 33°$

$$\begin{aligned} \varphi_{c,max} &= \Delta m_\varphi = arcsin\frac{a-1}{a+1} \\ \Rightarrow a &= \frac{1 + sin(\Delta m_\varphi)}{1 - sin(\Delta m_\varphi)} \end{aligned}$$

Calcul du paramètre T

L'avance de phase maximale est appliquée à la pulsation ω_{C0}, soit :

$$\begin{aligned} \omega_{c,max} &= \frac{1}{T\sqrt{a}} = \omega_{C0} \\ \Rightarrow T &= \frac{1}{\omega_{C0}\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Calcul du gain K_c

Le gain K_c permet de placer l'axe OdB à la pulsation ω_{C0}. Or ω_{C0} vérifie la relation

$$|H_{BOC}(j\omega_{C0})| = 1 \Rightarrow |C(j\omega_{C0})H(j\omega_{C0})| = 1$$

Sachant que $|C(j\omega_{C0})| = K_c\sqrt{a}$, on en déduit :

$$\begin{aligned} |H_{BOC}(j\omega_{C0})| = 1 &\Rightarrow K_c\sqrt{a}|H(j\omega_{C0})| = 1 \\ &\Rightarrow K_c\sqrt{a}\frac{10}{\omega_{C0}(1 + \frac{\omega_{C0}^2}{100})} = 1 \\ &\Rightarrow K_c = \frac{\omega_{C0}(1 + \frac{\omega_{C0}^2}{100})}{10\sqrt{a}} \end{aligned}$$

AN : $a = 3.4$, $T = 0.108s$, $K_2 = 0.33$.

5. Asservissement avec perturbations d

– Expression de l'erreur $E(s)$

Sortie asservie

$$Y(s) = \frac{C(s)H(s)}{1 + C(s)H(s)}Y_c(s) + \frac{H(s)}{1 + C(s)H(s)}D(s)$$

On en déduit l'expression de l'erreur

$$\begin{aligned} E(s) &= Y_c(s) - Y(s) \\ E(s) &= \frac{1}{1 + C(s)H(s)}Y_c(s) - \frac{H(s)}{1 + C(s)H(s)}D(s) \end{aligned}$$

- Erreur en régime permanent pour $D(s) = \frac{1}{s}$ et $Y_c(s) = \frac{1}{s}$
  Théorème de la valeur finale

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s\to 0} sE(s)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)H(s)} - \frac{H(s)}{1+C(s)H(s)}$$

Calculons la limite pour chacun des termes
Terme 1

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+C(s)H(s)}$$

$$\varepsilon_1(\infty) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1+K_c\frac{1+aTs}{1+Ts}\frac{10}{s(1+\frac{s}{10})^2}}$$

$$\varepsilon_1(\infty) = 0$$

Terme 2

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{s\to 0} -\frac{H(s)}{1+C(s)H(s)}$$

$$\varepsilon_2(\infty) = \lim_{s\to 0} -\frac{10}{s\,(1+\frac{s}{10})^2}1+K_c\frac{1+aTs}{1+Ts}\frac{10}{s\,(1+\frac{s}{10})^2}$$

$$\varepsilon_2(\infty) = \frac{-1}{K_c}$$

Conclusion : l'erreur statique n'est pas nulle en présence de perturbations. Pour éliminer cette la perturbation constante, on introduit un correcteur PI en plus de l'AP.

- Synthèse du correcteur PI

FT du PI

$$C(s) = K_{c2}\frac{1+T_is}{T_is}$$

Le correcteur PI est réglé de façon à conserver les performances précédentes obtenues avec l'AP. On choisit T_i de façon à avoir

$$\frac{1}{T_i} \leq \frac{\omega_{c0}}{10} \Rightarrow T_i \geq \frac{10}{\omega_{c0}}$$

AN : $T_i = \frac{10}{\omega_{c0}} \Rightarrow T_i = 2\text{s}.$

Calcule du gain K_{c2}

$$|H_{BOC}(j\omega_{co})| = 1 \Rightarrow |C_{AV}(j\omega_{co})\,H(j\omega_{co})\,C_{PI}(j\omega_{co})| = 1$$

On à

$$\Rightarrow |C_{AV}(j\omega_{co})\,H(j\omega_{co})| = 1 \Rightarrow |C_{PI}(j\omega_{co})| = 1$$

$$K_{c2}\cdot\frac{\sqrt{1+(2\omega_{c0})^2}}{2\omega_{co}} = 1 \Rightarrow K_{c2}\frac{\sqrt{101}}{10} = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{K_{c2} \approx 1}$$

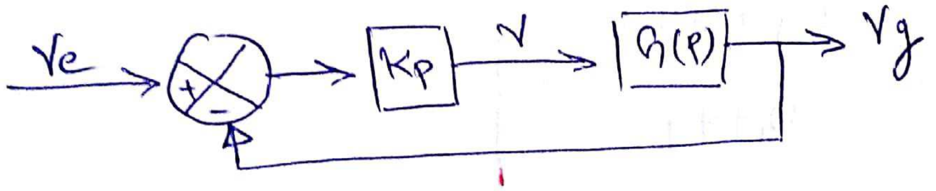
$$C(p) = \frac{1+2p}{2p}$$

Exercice 03 :

1 - La valeur de Kp

On commence par l'ajustement du gain Kp

$$G(j\omega) = \frac{5}{(1+0{,}1j\omega)(1+0{,}5j\omega)}$$



$$\text{Arg}(K_p G(j\omega)) = -\text{Arctg}(0{,}5\omega) - \text{Arctg}(0{,}1\omega)$$

$$m\varphi = 180^\circ + \text{Arg}(K_p G(j\omega_{co}))$$

$$m\varphi = 180^\circ - \text{Arctg}(0{,}5\,\omega_{co}) - \text{Arctg}(0{,}1\,\omega_{co}) = 45^\circ \quad \text{---- (1)}$$

de l'eq (1) :

$$\text{Arctg}(0{,}5\,\omega_{co}) + \text{Arctg}(0{,}1\,\omega_{co}) = 135^\circ$$

$$\text{Arctg}(a) + \text{Arctg}(b) = \text{Arctg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

$$\text{Arctg}\,\frac{0{,}5\,\omega_{co} + 0{,}1\,\omega_{co}}{1 - 0{,}05\,\omega_{co}^2} = 135^\circ$$

$$\frac{0{,}5\,\omega_o + 0{,}1\,\omega_{co}}{1 - 0{,}05\,\omega_{co}^2} = -1 \Rightarrow \boxed{\omega_{co} = 13{,}5 \text{ rad/s}}$$

Rq On a : $|K_p G(j\omega_{co})| = 1 \Rightarrow \dfrac{5K_p}{\sqrt{(1+(0{,}5\,\omega_{co})^2)(1+(0{,}1\,\omega_{co})^2)}} = 1$

atff

$$\Rightarrow \boxed{K_p = 2{,}3}$$

2. On choisit Ti de façon a avoir

$$\frac{1}{T_i} \leqslant \frac{\omega_{co}}{10} \Rightarrow T_i \geqslant \frac{10}{\omega_{co}}$$

$$T_i = \frac{10}{\omega_{co}} = \frac{10}{13{,}5} = 0{,}74$$

6

→ Le régulateur PI est

$$\boxed{C(p) = 2{,}3\ \frac{1 + 0{,}74\,p}{0{,}74\,p}}$$

II :

1 - Détermination de la valeur K

$$\text{On } G(p) = \frac{5K}{(1+0{,}5p)(1+0{,}1p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{E}{1+k_p} \quad \text{avec } k_p = \lim_{p \to 0} G(p) = 5K$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{10}{1+5K} = 0{,}5 \Rightarrow \boxed{K = 3{,}8}$$

2 -

$$\begin{cases} |KG(j\omega_{co})| = 1 \\ m\varphi = 180 + \mathrm{Arg}(G(j\omega_{co})) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{5K}{\sqrt{(1+(0{,}5\,\omega_{co})^2)(1+(0{,}1\,\omega_{co})^2)}} = 1 \quad \text{avec } K = 3{,}8 \quad (1) \\ m\varphi = 180 - \mathrm{Arctg}(0{,}5\,\omega_{co}) - \mathrm{Arctg}(0{,}1\,\omega_{co}) \quad (2) \end{cases}$$

de l'eq (1) ⇒ $\boxed{\omega_{co} = 18{,}5 \text{ rad/s}}$ et de l'eq (2) $\boxed{m\varphi = 35°}$

La deuxième contrainte ($m_\varphi = 45°$) n'est pas vérifié.
il est inutile de chercher à diminuer la valeur de K pour augmenter la m_φ à 45° car cela conduirait à une erreur statique supérieur à 0,5 (Dielemme stabilité - précision). (7)

→ une solution consiste à envisager un régulateur type PD susceptible d'apporter une phase positive.

Soit $C(p) = K(1 + T_d p)$

$$C(p) \cdot G(p) = \frac{5K(1+T_d p)}{(1+0{,}5p)(1+0{,}1p)} \quad \text{avec } K = 3{,}8$$

Pour $K = 3{,}8$ on $m_\varphi = 35°$

il faut ajuster le paramètre T_d de manière a augmenter la marg de phase à 45° $45° - 35° = 10°$

$$\mathrm{Arg}(1 + T_d p) = \mathrm{Arg}(1 + T_d j\omega_{co}) = 10°$$

$$\Rightarrow \mathrm{Arctg}(T_d \omega_{co}) = 10°$$

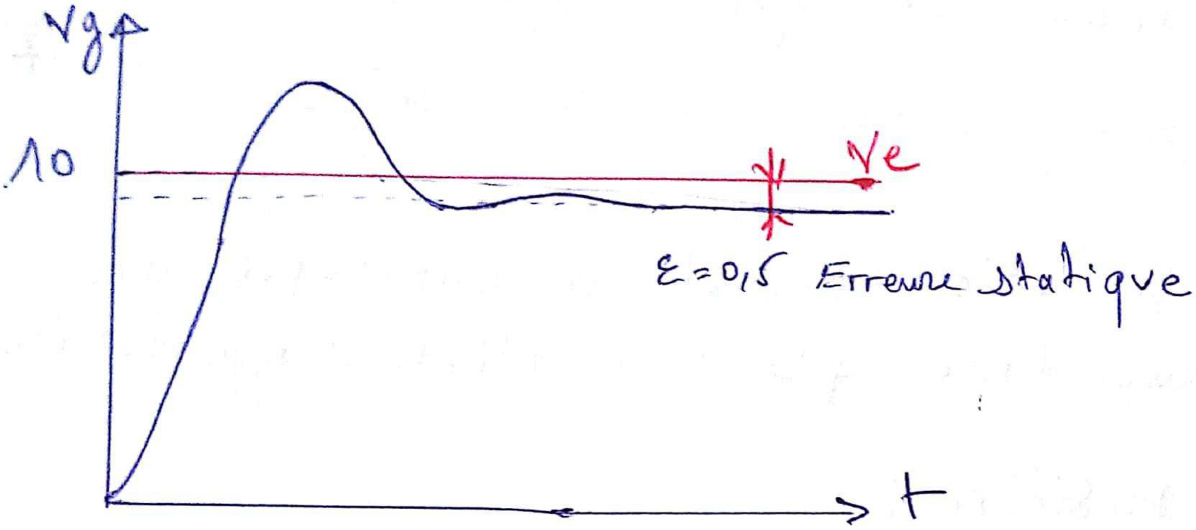
$$\boxed{T_d = 0{,}0097}$$

Rq: ce calcule suppose que la courbe du gain n'est pas affecté au pt ω_{co} par le terme $(1 + 0{,}0097p)$. Car on

$$|1+0{,}0097\,j\omega_0| = \sqrt{1+(0{,}0097\,\omega_{c0})^2} \approx 1$$

La réponse indicielle ; en (B.F)

(8)



Exercice n°4 :

1. Calcule des Paramètres du régulateur "PID" :

$$C(P) = K_c \frac{(1+T_i P)(1+T_d P)}{T_i P}$$

9

traduction du cahier de charge

$D_{BF\%} = 10\% \Rightarrow \xi_{BF} = 0,6$

$\boxed{\xi_{BF} = 0,6} \Rightarrow \omega_{n,BF}\, t_m = 2,77 \Rightarrow t_m = 0,277\,s$

$\boxed{\omega_{n,BF} = 10\,rad/s}$

$\omega_{co} = \omega_{nBF} = 10\,rad/s$

$m\varphi = 100\,\xi_{BF} \Rightarrow m\varphi = 60°$

$$H_{BOC}(P) = C(P)\,H(P) = K_c \frac{K}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2} \cdot \frac{(1+T_i' P)(1+T_d' P)}{T_i' P}$$

Paramètres du régulateur

$\frac{1}{T_i'} \leq \frac{\omega_{co}}{10} \Rightarrow \boxed{T_i' = 1}$

$\Rightarrow$ marge de phase du systeme pour $\omega_{co} = 10\,rad/s$

$Arg(G(j\omega)) = -Arctg\left(\frac{0,692\,\omega}{3-\omega^2}\right)$, $Arg(G(j\omega_{co})) = Arctg\left(\frac{0,692\,\omega_{co}}{3-\omega_{co}^2}\right)$

$Arg(G(j\omega_{co})) = 0,071\,rad = 4°$

Le systéme apporterait une marge de phase 4°. pour avoir la marge de phase 60°, il faut que le correcteur apporte une phase supplementair $\Delta m\varphi = 60° - 4° = 56°$

$$\cancel{\Delta m\varphi = \operatorname{arctg}(\omega_c T_i') - \operatorname{Arctg}(\omega_c T_d') - \frac{\pi}{2} =}$$

$$\operatorname{Arg} C(j\omega) = \operatorname{Arctg}(T_i'\omega) + \operatorname{Arctg}(T_d'\omega) - \frac{\pi}{2}$$ 10

$$\Delta m\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}(T_i\omega_c) + \operatorname{arctg}(T_d'\omega_c)$$

$$56° - 180° + 90° - \operatorname{arctg}(10\,\text{rad}) = \operatorname{arctg}(10T_d')$$

$$56° - 180° + 90° - 84{,}2894 = \operatorname{arctg}(10T_d')$$

$$-118{,}2894° = \operatorname{arctg}(10T_d')$$

$$10T_d' = 1{,}858 \Rightarrow \boxed{T_d' \simeq 0{,}19}$$

$$|C(j\omega_c) \cdot H_{BOC}(j\omega_c)| = 1 \Rightarrow \boxed{K_c = 1}$$