Université M^{ed} Boudiaf M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

Rappel# 1

APPROXIMATION ET INTERPOLATION POLYNOMIALE

Contenu :

Introduction

Le problème de l'approximation d'une fonction f intervient dans plusieurs situations, comme par exemple :
1) la fonction $f(x)$ est connue, mais difficile à manipuler. L'approximation a pour but de remplacer f par une fonction plus simple qui est plus accessible pour l'intégration, la différentiation, etc.

2) la fonction $f(x)$ n'est pas connue, on ne connait que les valeurs dans certains points x_i. Les quantités données $f(x_i) = y_i$ peuvent être par exemple des mesures expérimentales. Le but de l'approximation est alors de trouver une représentation synthétique (analytique) des données expérimentales.

Contrairement à l'interpolation, l'approximation d'une fonction ne demande pas que la courbe recherchée passe par les points (x_i, y_i), mais plutôt qu'un critère d'approximation soit satisfait, comme par exemple le critère de minimax, le critère des moindres carrés, etc.

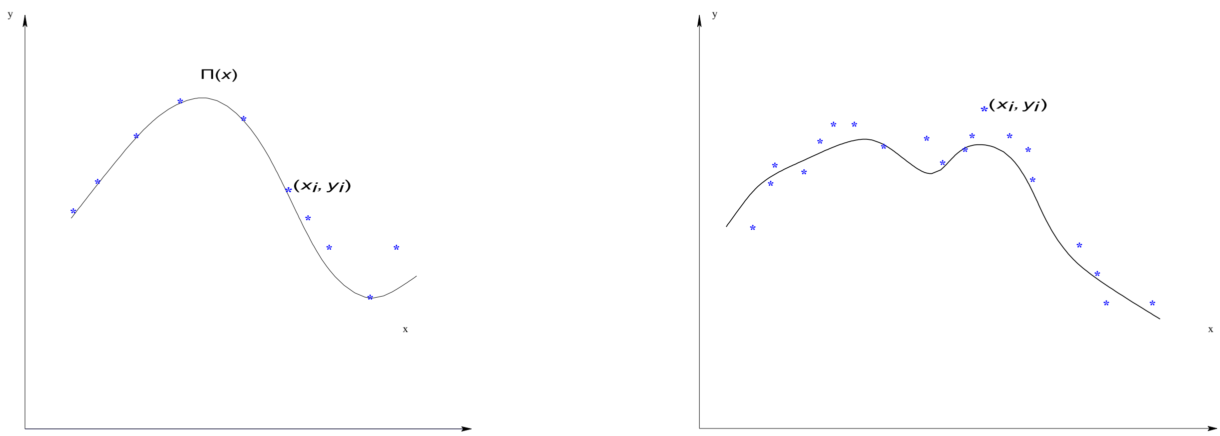


Figure 1 : Interpolation et approximation d'un nuage de points.

Les types d'interpolation:

Les deux types d'interpolation les plus courants sont
- l'interpolation polynomiale
- l'interpolation spline

L'interpolation polynomiale a pour avantage une grande simplicité et une facilité de calcul. Les 3 méthodes classiques (Lagrange, Neville-Aitken et Newton) sont équivalentes (elles calculent le même polynôme) mais diffèrent en coût opératoire: la méthode la moins onéreuse est celle de Newton (méthode des différences divisées).
L'interpolation spline est plus complexe et plus coûteuse; elle présente cependant l'avantage d'une grande souplesse et fournit un interpolant de meilleure qualité pour la plupart des problèmes physiques (particulièrement l'interpolation spline cubique).

Interpolation polynomiale: exemple

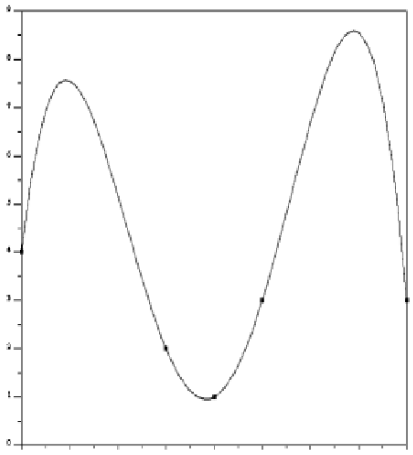
Il existe un polynôme d'interpolation unique, de degré <= 4, tel que

$P(1) = 4,\ P(4) = 2,\ P(5) = 1,\ P(6) = 3,\ P(9) = 3$

$x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 9$

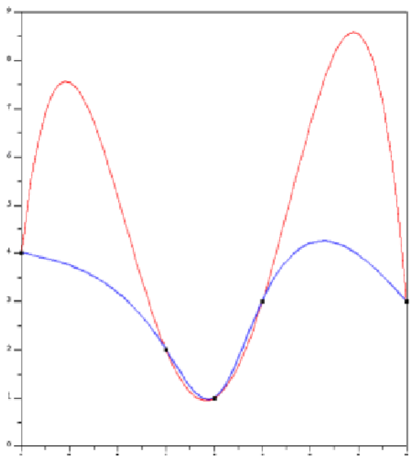
$y_0 = 4,\ y_1 = 2,\ y_2 = 1,\ y_3 = 3,\ y_4 = 3$

Le polynôme présente de fortes oscillations.



Comparaison

Polynôme
Spline



Interpolation polynomiale

Méthode de Lagrange

On considère les abscisses x_i, $i = 0, \ldots n$, et les ordonnées y_i, $i = 0, \ldots n$.
Les points (x_i, y_i) sont les *points d'interpolation*.

Il s'agit d'une méthode d'interpolation polynomiale: construire un polynôme $P(x)$ tel que

$$P(x_i) = y_i,\ i = 0, \ldots n.$$

Théorème
Il existe un polynôme d'interpolation unique de degré inférieur ou égal à n.

Le polynôme d'interpolation est calculé sous la forme d'une combinaison linéaire des *polynômes de Lagrange*:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$$

$$\text{avec } L_i(x) = \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)} \qquad i = 0, \ldots n$$

Exemple

Calculer, pour $x = 8$, la valeur du polynôme d'interpolation $P(x)$ tel que

$P(1) = 4,\ P(4) = 2,\ P(5) = 1,\ P(6) = 3,\ P(9) = 3$

$x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 9$

$y_0 = 4,\ y_1 = 2,\ y_2 = 1,\ y_3 = 3,\ y_4 = 3$

$$L_0(8) = \frac{(8-4)(8-5)(8-6)(8-9)}{(1-4)(1-5)(1-6)(1-9)} = \frac{-24}{480} = -\frac{1}{20}$$

$$L_1(8) = \frac{(8-1)(8-5)(8-6)(8-9)}{(4-1)(4-5)(4-6)(4-9)} = \frac{-42}{-30} = \frac{7}{5}$$

$$L_2(8) = \frac{(8-1)(8-4)(8-6)(8-9)}{(5-1)(5-4)(5-6)(5-9)} = \frac{-56}{16} = -\frac{7}{2}$$

$$L_3(8) = \frac{(8-1)(8-4)(8-5)(8-9)}{(6-1)(6-4)(6-5)(6-9)} = \frac{-84}{-30} = \frac{14}{5}$$

$$L_4(8) = \frac{(8-1)(8-4)(8-5)(8-6)}{(9-1)(9-4)(9-5)(9-6)} = \frac{168}{480} = \frac{7}{20}$$

$$P(8) = 4 \times (-\tfrac{1}{20}) + 2 \times (\tfrac{7}{5}) + 1 \times (-\tfrac{7}{2}) + 3 \times (\tfrac{14}{5}) + 3 \times (\tfrac{7}{20}) = \frac{171}{20} = 8.55$$

Méthode de Newton

On considère les abscisses x_i, $i = 0, \dots n$, et les ordonnées y_i, $i = 0, \dots n$.
Les points (x_i, y_i) sont les *points d'interpolation*.

Il s'agit d'une méthode d'interpolation polynomiale: construire un polynôme $P(x)$ tel que

$$P(x_i) = y_i,\ i = 0, \dots n.$$

Théorème
Il existe un polynôme d'interpolation unique de degré inférieur ou égal à n.

Le polynôme d'interpolation est calculé à l'aide de la *formule de Newton*:

$$P(x) = D_{0,0} + (x - x_0)D_{0,1} + (x - x_0)(x - x_1)D_{0,2} + \dots + (x - x_0)\dots(x - x_{n-1})D_{0,n}$$

où les coefficients $D_{i,j}$ sont les *différences divisées*, que l'on peut calculer à l'aide d'une formule de récurrence.

Calcul des différences divisées

$$D_{i,i} = y_i,\ i = 0, \dots n$$

$$D_{i,j} = \frac{D_{i+1,j} - D_{i,j-1}}{x_j - x_i} \qquad \begin{array}{l} i = 0, \dots n, \\ j = 1, \dots n, \\ j > i \end{array}$$

Calcul du polynôme d'interpolation

$$b_0(x) = D_{0,n}$$
$$b_1(x) = D_{0,n-1} + b_0(x)(x - x_{n-1})$$
$$b_2(x) = D_{0,n-2} + b_1(x)(x - x_{n-2})$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$b_{n-1}(x) = D_{0,1} + b_{n-2}(x)(x - x_1)$$
$$b_n(x) = D_{0,0} + b_{n-1}(x)(x - x_0)$$

$$P(x) = b_n(x)$$

Exemple

Calculer, pour $x = 8$, la valeur du polynôme d'interpolation $P(x)$ tel que

$$P(1) = 4,\ P(4) = 2,\ P(5) = 1,\ P(6) = 3,\ P(9) = 3$$
$$x_0 = 1,\ x_1 = 4,\ x_2 = 5,\ x_3 = 6,\ x_4 = 9$$
$$y_0 = 4,\ y_1 = 2,\ y_2 = 1,\ y_3 = 3,\ y_4 = 3$$

$$D_{0,0} = y_0 = 4$$
$$D_{1,1} = y_1 = 2$$
$$D_{2,2} = y_2 = 1$$
$$D_{3,3} = y_3 = 3$$
$$D_{4,4} = y_4 = 3$$

$$D_{0,1} = \frac{D_{1,1} - D_{0,0}}{x_1 - x_0} = \frac{2-4}{4-1} = -\frac{2}{3}$$
$$D_{1,2} = \frac{D_{2,2} - D_{1,1}}{x_2 - x_1} = \frac{1-2}{5-4} = -1$$
$$D_{2,3} = \frac{D_{3,3} - D_{2,2}}{x_3 - x_2} = \frac{3-1}{6-5} = 2$$
$$D_{3,4} = \frac{D_{4,4} - D_{3,3}}{x_3 - x_2} = \frac{3-3}{9-6} = 0$$

$$D_{0,0}=4 \quad D_{0,1}=-\frac{2}{3} \quad D_{1,1}=2 \quad D_{1,2}=-1 \quad D_{2,2}=1 \quad D_{2,3}=2 \quad D_{3,3}=3 \quad D_{3,4}=0 \quad D_{4,4}=3$$

$$D_{0,2}=\frac{D_{1,2}-D_{0,1}}{x_2-x_0}=\frac{-1-(-\frac{2}{3})}{5-1}=-\frac{1}{12}$$
$$D_{1,3}=\frac{D_{2,3}-D_{1,2}}{x_3-x_1}=\frac{2-(-1)}{6-4}=\frac{3}{2}$$
$$D_{2,4}=\frac{D_{3,4}-D_{2,3}}{x_4-x_2}=\frac{0-2}{9-5}=-\frac{1}{2}$$

$$D_{0,0}=4 \quad D_{0,1}=-\frac{2}{3} \quad D_{1,1}=2 \quad D_{0,2}=-\frac{1}{12} \quad D_{1,2}=-1 \quad D_{2,2}=1 \quad D_{1,3}=\frac{3}{2} \quad D_{2,3}=2 \quad D_{3,3}=3 \quad D_{2,4}=-\frac{1}{2} \quad D_{3,4}=0 \quad D_{4,4}=3$$

$$D_{0,3}=\frac{D_{1,3}-D_{0,2}}{x_3-x_0}=\frac{\frac{3}{2}-(-\frac{1}{12})}{6-1}=\frac{19}{60}$$
$$D_{1,4}=\frac{D_{2,4}-D_{1,3}}{x_4-x_1}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}}{9-4}=-\frac{2}{5}$$

$$D_{0,0}=4 \quad D_{0,1}=-\frac{2}{3} \quad D_{1,1}=2 \quad D_{0,2}=-\frac{1}{12} \quad D_{1,2}=-1 \quad D_{0,3}=\frac{19}{60} \quad D_{2,2}=1 \quad D_{1,3}=\frac{3}{2} \quad D_{2,3}=2 \quad D_{1,4}=-\frac{2}{5} \quad D_{3,3}=3 \quad D_{2,4}=-\frac{1}{2} \quad D_{3,4}=0 \quad D_{4,4}=3$$

$$D_{0,4}=\frac{D_{1,4}-D_{0,3}}{x_4-x_0}=\frac{-\frac{2}{5}-\frac{19}{60}}{9-1}=-\frac{43}{480}$$

$P(1)=4,\ P(4)=2,\ P(5)=1,\ P(6)=3,\ P(9)=3$
$x_0=1,\ x_1=4,\ x_2=5,\ x_3=6,\ x_4=9$
$y_0=4,\ y_1=2,\ y_2=1,\ y_3=3,\ y_4=3$

$$D_{0,0}=4 \quad D_{0,1}=-\frac{2}{3} \quad D_{1,1}=2 \quad D_{0,2}=-\frac{1}{12} \quad D_{1,2}=-1 \quad D_{0,3}=\frac{19}{60} \quad D_{2,2}=1 \quad D_{1,3}=\frac{3}{2} \quad D_{0,4}=-\frac{43}{480} \quad D_{2,3}=2 \quad D_{1,4}=-\frac{2}{5} \quad D_{3,3}=3 \quad D_{2,4}=-\frac{1}{2} \quad D_{3,4}=0 \quad D_{4,4}=3$$

$$b_0(8)=-\frac{43}{480}$$
$$b_1(8)=\frac{19}{60}+(-\frac{43}{480})\times(8-6)=\frac{11}{80}$$
$$b_2(8)=-\frac{1}{12}+(\frac{11}{80})\times(8-5)=\frac{79}{240}$$
$$b_3(8)=-\frac{2}{3}+(\frac{79}{240})\times(8-4)=\frac{13}{20}$$
$$b_4(8)=4+(\frac{13}{20})\times(8-1)=\frac{171}{20}$$

$$P(8)=b_4(8)=\frac{171}{20}=8.55$$