



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF M'SILA
FACULTE DE TECHNOLOGIE
DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE

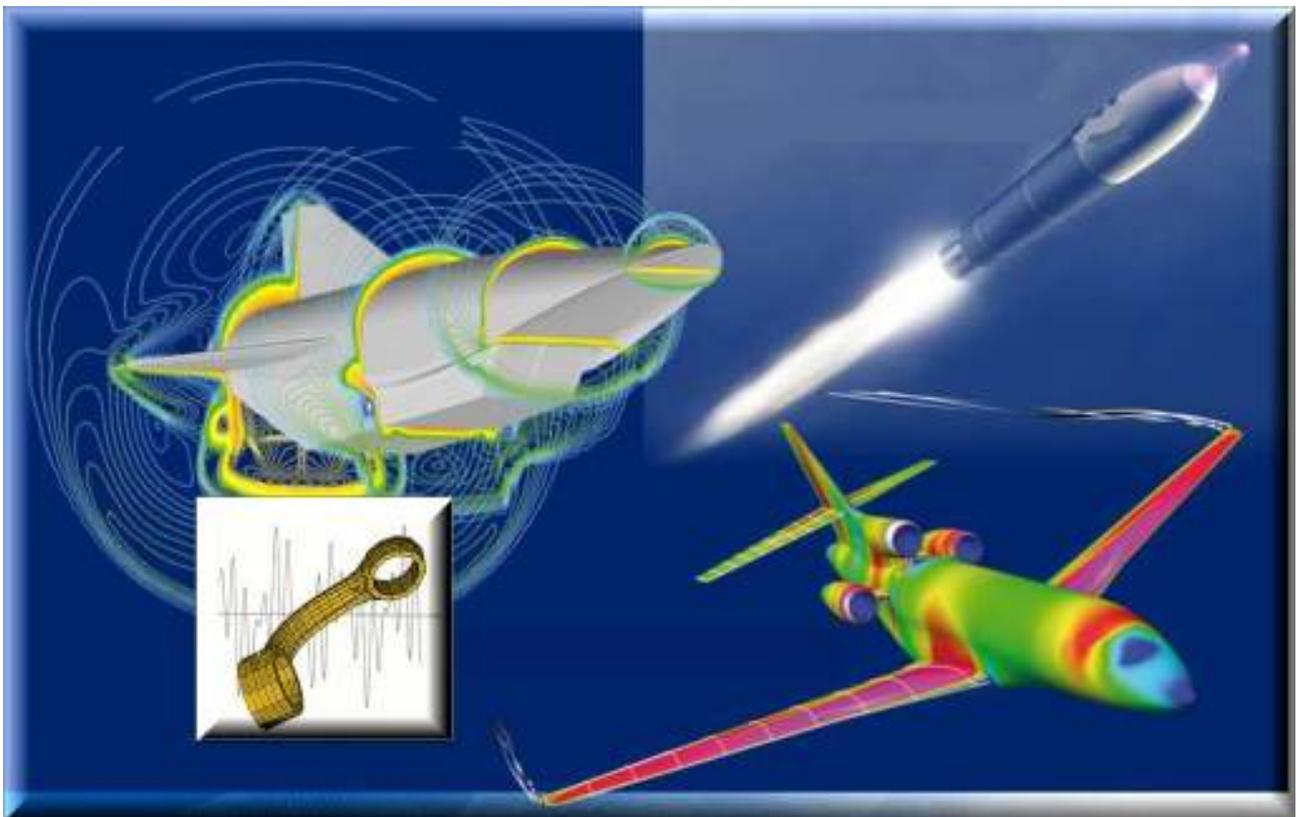
Polycopie du cours

Dynamique Des Structures Avancées

Première Année Master Construction Mécanique

Réaliser par : Dr. Saib Cherif

POLYCOPIE DU COURS
DYNAMIQUE DES STRUCTURES AVANCEES
Première Année Master Construction Mécanique



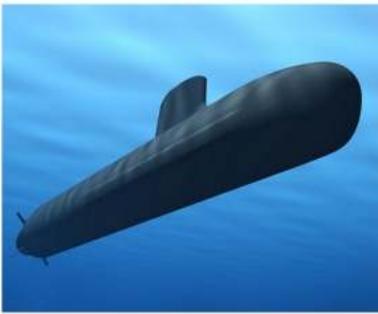
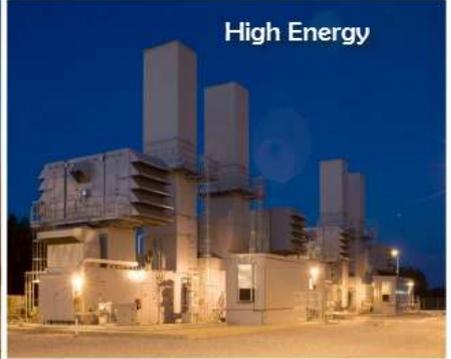
Réalisé par : Dr. Saib Cherif

Année universitaire : 2017/2018.

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



Say:
My Lord!
Increase me
in knowledge



My hope !! Algeria in future days

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

وَنُفِخَ فِي الصُّورِ فَصَعِقَ مَنْ فِي السَّمَاوَاتِ وَمَنْ فِي الْأَرْضِ إِلَّا مَنْ شَاءَ
اللَّهُ ثُمَّ نُفِخَ فِيهِ أُخْرَىٰ فَإِذَا هُمْ قِيَامٌ يَنْظُرُونَ (68) وَأَشْرَقَتِ الْأَرْضُ
بِنُورِ رَبِّهَا وَوُضِعَ الْكِتَابُ وَجِيءَ بِالنَّبِيِّينَ وَالشُّهَدَاءِ وَقُضِيَ بَيْنَهُم بِالْحَقِّ
وَهُمْ لَا يُظْلَمُونَ (69) وَوُفِّيَتْ كُلُّ نَفْسٍ مَّا عَمِلَتْ وَهُوَ أَعْلَمُ بِمَا
يَفْعَلُونَ (70)

صِدْقَةُ اللَّهِ الْعَظِيمَةُ

In the name of Allah, the Entirely Merciful, the Especially Merciful.

(68) And the Horn will be blown, and whoever is in the heavens and whoever is on the earth will fall dead except whom Allah wills. Then it will be blown again, and at once they will be standing, looking on.

(69) And the earth will shine with the light of its Lord, and the record [of deeds] will be placed, and the prophets and the witnesses will be brought, and it will be judged between them in truth, and they will not be wronged.

(70) And every soul will be fully compensated [for] what it did; and He is most knowing of what they do.

True are the words of Allah

▼ آية 70 Aya

▼ سورة الزمر Az-Zumar

DEDICACES

Je dédie ce travail en appel de reconnaissance et de réflexion à:

♣ *Ma très chère femme et mes chers enfants pour leur soutien moral qui m'a permis de terminer ce travail.*

Je le dédie pareillement à :

♣ *Mes chers parents pour leur encouragement,*

♣ *Mes chers frères et sœurs*

♣ *Mes oncles et tantes*

♣ *Toute ma famille et mes proches*

LISTE DES FIGURES :

| | | |
|----------------------|--|----|
| Figure I.1. | Représentation graphique des nombres complexes. | 3 |
| Figure I.2. | Représentation vectorielle de Fresnel. | 4 |
| Figure I.3. | Centre d'inertie. | 6 |
| Figure I.4. | Moment polaire d'une surface | 7 |
| Figure I.5. | Ressorts et amortisseurs en série. | 11 |
| Figure I.6. | Ressorts et amortisseurs en parallèle. | 12 |
| Figure I.7. | Ressorts en cas particulier. | 12 |
| Figure II.1. | Ponts piétons. | 15 |
| Figure II.2. | Planchers avec des gens qui marchent (théâtres, salle de spectacle, ..). | 15 |
| Figure II.3. | Sols pour des activités sportives ou de danse. | 15 |
| Figure II.4. | Étage avec des sièges fixes et des galeries de spectateurs (le surnombre des supporters provoquant une bousculade dans un stade à Dakar-2017, causant l'effondrement d'une partie des tribunes). | 16 |
| Figure II.5. | Plates-formes de plongée. | 16 |
| Figure II.6. | Aéronautique confort acoustique, vibrations aérodynamiques, vibrations propulseurs, ... | 16 |
| Figure II.7. | Hélicoptère en position de tir d'un missile air-sol. | 17 |
| Figure II.8. | Différents types de bateaux transporteurs. | 17 |
| Figure II.9. | Plate forme d'exploitation en mer. | 17 |
| Figure II.10. | Transport ferroviaire et téléphériques. | 18 |
| Figure II.11. | Voiture confortable. | 18 |
| Figure II.12. | Engins de travaux de construction. | 18 |
| Figure II.13. | Quelques équipements connexes aux travaux de construction. | 18 |
| Figure II.14. | Explosion d'un bâtiment. | 19 |
| Figure II.15. | Des chefs-d'œuvre immobiliers. | 19 |
| Figure II.16. | Des mâts pour la transmission radiotéléphonique. | 19 |
| Figure II.17. | Des châteaux d'eau pour l'approvisionnement des villes. | 19 |
| Figure II.18. | Des ponts pour véhicules. | 21 |
| Figure II.19. | Les équipements de mesure de précision doivent être isolés des vibrations et se trouvent des plates formes stables (la rigidité). | 21 |
| Figure II.20. | Presse hydraulique / de forgeage / de production / à grande vitesse. | 21 |
| Figure II.21. | La machine automatique scie le métal à relier de lame. | 21 |
| Figure II.22. | Centres d'usinage et robots assembleurs. | 21 |
| Figure II.23. | Stabilité des éoliennes, installation de l'éclairage avec énergie solaire. | 21 |
| Figure II.24. | Les centrales électriques, les turbines à cycle combiné, les groupes électrogènes, | 21 |
| Figure II.25. | Robot détecteur/ démanteler les bombes. | 22 |
| Figure II.26. | Robot chirurgical autonome. | 22 |
| Figure II.27. | Robot pour le traitement des déchets nucléaires. | 22 |
| Figure II.28. | Modèle électrodynamique du haut parleur et le microphone conversion électrique-mécanique et mécanique-électrique. | 22 |
| Figure II.29. | Modélisation d'un bateau cargo. | 23 |
| Figure II.30. | Modélisation d'une plate forme offshore ou château d'eau. | 23 |
| Figure II.31. | Modélisation d'une grue. | 23 |
| Figure II.32. | Modélisation d'un véhicule. | 24 |
| Figure II.33. | Modélisation d'un être humain. | 24 |
| Figure II.34. | Modélisation d'une gratte ciel. | 24 |
| Figure II.35. | Modélisation des machines à outils. | 25 |
| Figure II.36. | Le pont de TAKOMA avant et après la ruine. | 26 |

| | | |
|-----------------------|--|----|
| Figure II.37. | Charge périodique et apériodique. | 26 |
| Figure II.38. | L'apparition de force d'inertie sous l'effet d'une charge dynamique. | 26 |
| Figure II.39. | Chargement harmonique simple. | 27 |
| Figure II.40. | Chargement périodique complexe anharmonique. | 27 |
| Figure II.41. | Chargement apériodique impulsif (avion de chasse supersonique passe au dessus d'un bâtiment). | 28 |
| Figure II.42. | Chargement apériodique quelconque. | 28 |
| Figure II.43. | Chargement aléatoire. | 28 |
| Figure II.44. | Schéma du modèle dynamique élémentaire. | 29 |
| Figure II.45. | Disque en torsion. | 31 |
| Figure II.46. | Réponse d'une structure dynamique libre non amorti. | 32 |
| Figure II.47. | Table en vibrations horizontales. | 36 |
| Figure II.48. | Mesure du moment d'inertie d'un turboréacteur. | 36 |
| Figure II.49. | Poutre avec deux extrémités fixes. | 37 |
| Figure II.50. | Grue soulevant une charge. | 37 |
| Figure II.51. | Mécanisme avec des arbres de différents matériaux et formes. | 38 |
| Figure II.52. | La colonne élastique et son modèle dynamique. | 39 |
| Figure II.53. | Réponse d'une structure dynamique libre d'un système à amortissement sous-critique. | 40 |
| Figure II.54. | Réponse d'une structure dynamique libre d'un système à amortissement sous-critique. | 40 |
| Figure II.55. | Influence de l'amortissement sur la réponse d'une structure libre à amortissement sous-critique. | 41 |
| Figure II.56. | Variation de la pulsation propre et amortie en fonction de ζ . | 42 |
| Figure II.57. | Bâtiment métallique à un seul étage et son réponse sous test de vibration. | 43 |
| Figure II.58. | Réponse d'une structure dynamique libre à amortissement critique. | 44 |
| Figure II.59. | Les différentes réponses des structures dynamiques avec différents amortissement. | 45 |
| Figure III.1. | Exemples de la vie au quotidien: (a) Citernes d'eau sur les immeubles, (b) Machine tournante avec alternateur sur fondation, (c) Modèle dynamique élémentaire sous excitation harmonique. | 47 |
| Figure III.2. | Réponse d'une structure dynamique amortie sous excitation harmonique. | 47 |
| Figure III.3. | Facteur d'amplification dynamique. | 48 |
| Figure III.4. | La phase de la réponse stationnaire. | 48 |
| Figure III.5. | Trois régions de la réponse d'une structure à 1 ddl, (a) l'amplitude, (b) la phase. | 49 |
| Figure III.6. | Evolution de l'amplitude de la réponse d'une structure dynamique en résonance. | 50 |
| Figure III.7. | Structure dynamique forcée. | 51 |
| Figure III.8. | La représentation de la transmissibilité. | 52 |
| Figure III.9. | Transmissibilité en fonction de β et pour différentes valeurs d'amortissement ζ . a) représentation linéaire (gauche), b) représentation en dB (droite). | 52 |
| Figure III.10. | Abaques d'atténuation vibratoire donnant les relations entre la fréquence d'excitation f et la fréquence propre f_0 . a) pour des atténuations $A=1-TR$, b) pour des affaiblissements $Att=20\log_{10} [1/TR]$ (en dB). | 53 |
| Figure III.11. | Le facteur d'amplification sans amortissement. | 54 |
| Figure III.12. | La transmissibilité sans amortissement. | 54 |
| Figure III.13. | Types de machines tournantes. | 55 |
| Figure III.14. | Excitation par un balourd d'une machine tournante. | 55 |
| Figure III.15. | Réponse d'une structure à une excitation par une masse tournante (un balourd). | 56 |
| Figure III.16. | Tourbillonnement d'un rotor. | 57 |

| | | |
|-----------------------|--|----|
| Figure III.17. | Rotor déformé : (a) système de coordonnées, (b) position du rotor et du centre de gravité. | 57 |
| Figure III.18. | Efforts appliqués à un rotor-disque. | 58 |
| Figure III.19. | Relation entre la phase de l'arbre tournant pour $\beta \leq 1$. | 59 |
| Figure III.20. | Fondation en mouvement verticale harmonique. | 60 |
| Figure III.21. | Les mécanismes à cames. | 61 |
| Figure III.22. | Fondation en accélération verticale harmonique. | 61 |
| Figure III.23. | Principe d'accéléromètre et leurs types pour la mesure des vibrations. | 62 |
| Figure III.24. | Gyropode, hoverboard et monowheel. | 62 |
| Figure III.25. | Accéléromètre en Silicium. | 63 |
| Figure IV.1. | La fonction delta de Dirac (impulsion unité). | 64 |
| Figure IV.2. | Les trois types de chargements- excitations-impulsives. | 65 |
| Figure IV.3. | Structure dynamique non amortie excitée par impulsion semi-sinusoïdale. | 65 |
| Figure IV.4. | Rapports-réponses due à l'impulsion semi-sinusoïdale. | 67 |
| Figure IV.5. | Impulsion rectangle. | 68 |
| Figure IV.6. | Excitation triangulaire. | 70 |
| Figure IV.7. | Spectre des réponses-déplacement pour les trois types excitations. | 71 |
| Figure IV.8. | Bâtiment (1ddl) soumis à l'excitation d'explosion. | 72 |
| Figure IV.9. | Bâtiment (1ddl) soumis à l'excitation d'explosion. | 73 |
| Figure IV.10. | Représentation des moments au niveau des poteaux. | 74 |
| Figure IV.11. | Presse d'estampage. | 75 |
| Figure IV.12. | La force excitatrice et la réponse d'une structure dynamique à 1 ddl. $M= 10$ [kg], $\omega_0 = 20$ [rd/s], $\zeta = 0.05$. | 75 |
| Figure IV.13. | Élément d'inertie du système heurté par un marteau d'impact. | 76 |
| Figure IV.14. | Réponses en déplacement à une impulsion unique et deux impulsions séparées d'une seconde. | 76 |
| Figure IV.15. | Suspension d'un véhicule lors d'un changement brusque du chemin. | 78 |
| Figure IV.16. | La réponse déplacement du véhicule lors de changement échelon dans la chaussée. | 79 |
| Figure IV.17. | Atterrissage d'un avion. | 79 |
| Figure IV.18. | Mécanisme soupape et arbre à cames. | 80 |
| Figure IV.19. | Déplacement absolu et déplacement relatif de la masse d'une structure à 1 ddl, soumis à un déplacement de la base excitation semi-sinusoïdale avec $\xi = 0,1$. | 81 |
| Figure IV.20. | Engins de démolition à boule. | 82 |
| Figure IV.21. | Sport du rocketball ou du billard. | 82 |
| Figure IV.22. | Machine à coudre avec pédale. | 83 |
| Figure IV.23. | Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel. | 84 |
| Figure IV.24. | Structures dynamiques généralisées. | 85 |
| Figure IV.25. | Bar rigide sur pivot. | 86 |
| Figure IV.26. | La flèche de la barre en forme L. | 86 |
| Figure IV.27. | Les forces et les moments agissants sur la barre en forme L. | 87 |
| Figure IV.28. | Poutre en porte à faux uniforme. | 88 |
| Figure IV.29. | La réponse $u(x,t)$ de la charge traversant le pont. | 89 |
| Figure V.1. | Poutre portante de trois masses identiques équidistantes. | 93 |
| Figure V.2. | Structure dynamique à trois degrés de liberté. | 94 |
| Figure V.3. | Arbre portant des masses. | 95 |
| Figure V.4. | Arbre avec trois masses. | 95 |
| Figure V.5. | Poutre sous une charge statique. | 96 |
| Figure V.6. | Structure de trois disque en vibrations de torsion. | 97 |

| | | |
|---------------------|---|-----|
| Figure V.7. | Le couple résultant en fonction de la pulsation. | 98 |
| Figure V.8. | Structure en vibrations libres de torsion. | 98 |
| Figure V.9. | Les premiers deux modes flexibles. | 99 |
| Figure V.10. | Système dynamique libre masses-ressorts. | 99 |
| Figure V.11. | Structure dynamique de masses-ressorts. | 100 |
| Figure V.12. | La courbe de $F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i$ en fonction de la pulsation ω . | 101 |
| Figure V.13. | Structure dynamique libre à 2 ddl constituée des masses-ressorts-amortisseurs. | 102 |
| Figure V.14. | Poutre supportant deux masses. | 103 |
| Figure V.15. | Flexibilité d'une poutre supportant deux masses. | 104 |
| Figure V.16. | La structure discrétisée d'un bâtiment de deux étages. | 107 |
| Figure V.17. | La structure déformée selon le premier mode. | 108 |
| Figure V.18. | La structure déformée selon le deuxième mode. | 108 |
| Figure V.19. | Les réponses de la structure pour des conditions initiales données. | 109 |
| Figure V.20. | Système à deux volants entraînés par un rotor et diagrammes de corps libres montrant les moments d'inertie illustrés par des lignes brisées. | 110 |
| Figure V.21. | Schéma de moteur-marin connecté à l'hélice. | 110 |
| Figure V.22. | Modélisation du moteur marin d'un bateau lié à l'hélice. | 111 |
| Figure V.23. | Arbre portant deux volants sur trois appuis. | 112 |
| Figure V.24. | Absorbeur dynamique ajouté à une structure. | 113 |
| Figure V.25. | Représentation des amplitudes et des phases d'une structure forcée avec absorbeur. | 114 |
| Figure V.26. | Une structure dynamique en vibrations libres avec amortissement. | 114 |
| Figure V.27. | Les déplacements des masses de la structure dynamique avec amortissement. | 117 |
| Figure V.28. | Structure dynamique avec absorbeur et amortissement. | 117 |
| Figure V.29. | Représentation de X_1 en fonction de $\bar{\omega}$, courbe 1 : structure sans amortissement et coube 2 avec amortissement. | 118 |
| Figure V.30. | Absorbeur dynamique avec amortissement en torsion. | 118 |
| Figure V.31. | Représentation de $ A_1 =f(\bar{\omega})$. | 119 |
| Figure V.32. | Représentation de $ A_1 =f(\bar{\omega})$ en présence de l'absorbeur. | 119 |
| Figure V.33. | Représentation de $ A_1 =f(\bar{\omega})$ en présence de l'absorbeur et de l'amortissement. | 121 |
| Figure V.34. | Superposition des trois cas étudiés. | 121 |
| Figure V.35. | Structure de deux masses et trois ressorts. | 121 |
| Figure V.36. | Véhicule transportant une caisse. | 122 |
| Figure V.37. | Le modèle dynamique similaire à base excitatrice. | 122 |
| Figure V.38. | Représentation des amplitudes forcées A_1 et A_2 . | 123 |
| Figure V.39. | Structure dynamique forcée et amortie. | 124 |
| Figure V.40. | Représentation de l'amplitude de la réponse forcée $A_1 = f(\bar{\omega})$. | 125 |
| Figure V.41. | Bâtiment de deux étages, sous une charge d'explosion. | 125 |
| Figure V.42. | Les réponses permanentes de la structure dynamique. | 127 |
| Figure V.43. | Modélisation d'un immeuble à deux étages. | 128 |
| Figure V.44. | Trois pendules. | 128 |
| Figure V.45. | Le forgeage manuel et automatique, avec des pièces mécaniques forgées. | 131 |
| Figure V.46. | Le modèle de la structure dynamique sous impact. | 131 |
| Figure V.47. | Représentation des réponses des vibrations forcées de la structure. | 133 |
| Figure V.48. | Structure dynamique à trois degrés de liberté. | 135 |
| Figure VI.1. | Structure dynamique constituée d'une poutre avec une masse concentrée à sa fin, l'approximation discrète fonctionne bien quand m est grand par rapport à la masse de la poutre. | 139 |
| Figure VI.2. | Courbe de $\beta=f(\omega)$, au fur et à mesure que le rapport de la masse concentrée à la | 139 |

| | | |
|------------------------|---|-----|
| | masse de la poutre augmente, l'approximation de la pulsation propre la plus basse en utilisant un modèle discret à n degrés de liberté s'améliore. | |
| Figure VI.3. | Vibrations longitudinales d'une barre. | 139 |
| Figure VI.4. | Poutre encastrée-encastrée. | 140 |
| Figure VI.5. | Mouvement transversal d'une corde: (a) déformation et chargement, (b) diagramme cinétique de l'élément différentiel. | 141 |
| Figure VI.6. | Vibrations transversales d'une corde | 141 |
| Figure VI.7. | Les trois premiers modes d'une chaîne fixée aux deux extrémités. | 142 |
| Figure VI.8. | Vibrations de flexion d'une poutre. | 143 |
| Figure VI.9. | Les modes et les pulsations propres d'une poutre sur deux appuis. | 144 |
| Figure VI.10. | Nanotube de Carbone. | 145 |
| Figure VI.11. | Les cinq modes propres les plus bas. | 146 |
| Figure VI.12. | Vibrations de torsion dans un arbre. | 147 |
| Figure VI.13. | Arbre circulaire soumis à une charge de torsion (x, t) , $\theta(x, t)$ mesure un déplacement angulaire de l'arbre. | 148 |
| Figure VI.14. | Diagramme de corps libre de l'élément différentiel de l'arbre à un instant arbitraire $T(x, t)$ est le couple résistant dans l'arbre. | 148 |
| Figure VI.15. | Arbre circulaire conique. | 149 |
| Figure VI.16. | Arbre en torsion. | 150 |
| Figure VI.17. | La méthode de Rayleigh-Ritz donne des approximations aux deux modes propres correspondants aux deux pulsations propres les plus basses d'un arbre en torsion à extrémités libre-fixe. | 151 |
| Figure VI.18. | Barre attaché à un bloc. | 152 |
| Figure VI.19. | Diagramme cinétique. | 152 |
| Figure VI.20. | Structure lisse avec masse attachée. | 153 |
| Figure VI.21. | Disque en torsion harmonique forcé. | 154 |
| Figure VI.22. | (a) Poutre à extrémités fixe-libre avec une machine tournante à balourd à son extrémité libre, (b) diagramme du corps libre de la machine à instant arbitraire pour décrire les conditions aux limites. | 155 |
| Figure VII.1. | Exemple d'une configuration de contrôle hybride passif-actif. | 158 |
| Figure VIII.1. | Caractéristique d'un élément ressort. | 160 |
| Figure VIII.2. | Système masse-ressort. | 161 |
| Figure VIII.3. | Système sollicité à une charge externe. | 162 |
| Figure VIII.4. | Système à deux ressorts. | 163 |
| Figure VIII.5. | Représentation des forces et des déplacements dans le premier élément ressort. | 163 |
| Figure VIII.6. | Représentation des forces et des déplacements dans le deuxième élément ressort. | 163 |
| Figure VIII.7. | Système masse-ressort à 2 ddl. | 164 |
| Figure VIII.8. | Caractéristique de l'élément ressort spirale. | 166 |
| Figure VIII.9. | Géométrie de l'élément barre. | 167 |
| Figure VIII.10. | Fonctions de forme. | 168 |
| Figure VIII.11. | Discretisation de l'élément barre. | 169 |
| Figure VIII.12. | Barre circulaire pleine. | 170 |
| Figure VIII.13. | Barre avec deux éléments. | 171 |
| Figure VIII.14. | Élément barre avec charge externe répartie. | 173 |
| Figure VIII.15. | Les charges thermiques appliquées aux nœuds. | 173 |
| Figure VIII.16. | Treillis en éléments barres connectés. | 174 |
| Figure VIII.17. | Les déplacements aux nœuds du barre, (\bar{u}, \bar{v}) au systèmes de coordonnées local et (u, v) dans le système de coordonnées global. | 174 |
| Figure VIII.18. | Élément poutre en présence des déplacements et des rotations. | 176 |
| Figure VIII.19. | Conditions de frontières typiques de poutre. | 177 |

| | | |
|------------------------|---|-----|
| Figure VIII.20. | Conditions de frontières avec des ressorts. | 178 |
| Figure VIII.21. | Poutre à une extrémité encastrée et une charge en surplomb. | 178 |
| Figure VIII.22. | Discrétisation de la poutre totale en quatre poutres élémentaires en flexion. | 179 |
| Figure VIII.23. | Représentation des efforts tranchants et les moments fléchissants | 180 |
| Figure VIII.24. | Elément poutre sollicité avec une charge répartie. | 181 |
| Figure VIII.25. | Représentation des forces et des moments équivalents dans le cas d'une charge uniforme constante. | 181 |
| Figure VIII.26. | Poutre à une extrémité encastrée avec une charge répartie et un moment de flexion. | 182 |
| Figure VIII.27. | Discrétisation de la poutre totale en trois poutres élémentaires en flexion. | 182 |
| Figure VIII.28. | Elément poutre orientée en sollicitation axial-flexion. | 184 |
| Figure VIII.29. | Portique fermé à trois barres. | 186 |
| Figure VIII.30. | Structure portique déformée par symétrie. | 188 |
| Figure VIII.31. | Structure portique déformée par antisymétrie. | 189 |

LISTE DES TABLEAUX :

| | | |
|---------------------|--|-----|
| Tableau I.1. | Les transformées de Laplace élémentaires | 3 |
| Tableau I.2. | Les correspondances électromécaniques | 14 |
| Tableau V.1. | Exemple de calcul pour $\omega = 1, 10, 20, \dots, 700, 710$. | 99 |
| Tableau V.2. | Exemple de calcul pour $\omega = 0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 1.79, 2.0$. | 100 |

Notations et symboles utilisés :

| Symbole | Signification |
|---------------------------------------|---|
| σ_t | contrainte totale [N/m ²] |
| σ_s | contrainte statique [N/m ²] |
| σ_d | contrainte dynamique [N/m ²] |
| $x(t)$ | La réponse [m] |
| Fi | Force d'inertie [N] |
| m | Masse [kg] |
| $\ddot{x}(t)$ | Accélération [m/s ²] |
| ω_0 | Pulsation propre ou naturelle |
| K | la rigidité [N/m] |
| T | L'énergie cinétique [J] |
| U | L'énergie potentielle [J] |
| W_{nc} | Travail des forces non conservatrices [J] |
| δW_{nc} | Variation de la quantité de travail des forces non conservatrices |
| c | Coefficient d'amortissement [N.s/m] |
| $u(t)$ ou u | Déplacement linéaire suivant axe x [m] |
| $\dot{u}(t)$ ou \dot{u} | La vitesse linéaire suivant l'axe x [m/s] |
| $\ddot{u}(t)$ ou \ddot{u} | L'accélération linéaire suivant l'axe x [m/s ²] |
| $F(t)$ | Force (chargement) externe variable dans le temps [N] |
| f_0 | Fréquence propre [Hz] ou [s ⁻¹] |
| T_0 | Période propre [s] |
| ζ | Pourcentage d'amortissement critique |
| $\theta(t)$ ou θ | L'angle de rotation [rd] |
| $\dot{\theta}(t)$ ou $\dot{\theta}$ | La vitesse angulaire de rotation [rd/s] |
| $\ddot{\theta}(t)$ ou $\ddot{\theta}$ | L'accélération angulaire [rd/s ²] |
| J | Moment d'inertie [kgm ²] |
| k_t | Rigidité de torsion [Nm/rd] |
| c_t | Coefficient d'amortissement angulaire [Nms/rd] |
| M_t | Moment de torsion [Nm] |
| I_0 | le moment polaire de la section de la poutre [m ⁴] |
| ρ | Masse volumique [kg/m ³] |
| ω_D | Pulsation amortie (Damped) |
| T_D | Pseudo période ou apériode ou période amortie (damped). |
| δ | Décrément logarithmique |
| τ_r | Temps de relaxation [s] |
| Q | Facteur de qualité |
| V | Déplacement suivant l'axe y [m] |
| $\hat{\omega}$ | Pulsation sur amortie [rd/s] |
| $\bar{\omega}$ | Pulsation forcée [rd/s] |
| β | Rapport des pulsations |
| D | Facteur d'amplification dynamique |
| TR | Transmissibilité |
| dB | décibel |
| A | Atténuation (%) |
| IE | Efficacité d'isolation |
| Att | Atténuation en dB |
| u_{max} | L'amplitude de la réponse (déplacement) maximale |
| e | Excentricité [m] parfois [kg.m] |
| F_R | Force de rappel « de rigidité » [N] |
| F_a | Force d'amortissement [N] |
| M | Couple moteur [Nm] |
| l | Décalage du rotor [m] |

| | |
|--------------------|--|
| $y_g(t)$ | Courbe de la base , fonction décrivant le parcours [m] |
| $\dot{y}(t)$ | Excitation d'accélération [m/s ²] |
| \ddot{u}_{rel} | Accélération relative |
| $\delta(t)$ | Fonction de Dirac |
| R_{max} | La réponse maximale |
| $F_{é,max}$ | Force élastique totale maximale [N] |
| T_{max} | L'effort tranchant transmis à la base [N] |
| M_{max} | Le moment tranchant maximale [Nm] |
| $u(t-t_0)$ | Fonction échelon |
| $s(t)$ | Le chemin parcouru |
| $H(t)$ | Fonction pas (step) de Heaviside |
| I | L'impulsion communiquée [kg.m/s] |
| $\psi(x)$ | Fonction de forme |
| $z(t)$ | Coordonnée généralisée |
| \bar{m} | La masse généralisée |
| \bar{c} | L'amortissement généralisé |
| \bar{k} | La rigidité généralisée |
| $\bar{p}(t)$ | La force externe généralisée appliquée à la structure |
| δ_{ij} | Delta de Kronecker |
| $[I]$ | Matrice identité I=1 |
| $[f]$ | Matrice de flexibilité. |
| \mathcal{D} | Matrice dynamique |
| $\vec{X}^{(i)}(t)$ | Vecteur des modes propres |
| F_T | La force transmise au sol [N] |

Table des matières

Avant propos

i

Chapitre I : (pré-requis) Connaissances de base

| | |
|---|----|
| I.1 Intégration par parties | 1 |
| I.2 Série de Fourier- | 1 |
| I.3 Transformées de Laplace | 1 |
| I.4 Notation complexe | 3 |
| I.5 Les fonctions trigonométriques et hyperboliques | 4 |
| I.6 Représentation vectorielle des mouvements harmoniques (Fresnel) | 4 |
| I.7 Calcul matriciel | 5 |
| I.8 Nombre de degrés de liberté | 5 |
| I.9 Système conservatif | 5 |
| I.10 Centre de gravité dans les coordonnées cartésiennes | 5 |
| I.11 Moments quadratiques et polaires d'une surface | 7 |
| I.12 Cas courants de I_{Gz} et I_0 | 7 |
| 1.13 Moments d'inertie | 8 |
| 1.14 Théorème de Huygens-Koënigs généralisé | 9 |
| 1.15 Notions générales | 10 |
| a/ Le point matériel | 10 |
| b/ La mécanique | 10 |
| c/ La dynamique | 10 |
| d/ Une structure | 10 |
| e/ Dynamique des structures | 11 |
| f/ Les phénomènes dynamiques engendrant La rupture des structures | 11 |
| g/ Structures discrètes ou continues | 11 |
| h/ Ressorts et amortisseurs équivalents | 11 |
| i/ Equation de Lagrange | 12 |
| j/ Analogie électrique- mécanique | 13 |

Partie I : Les structures dynamiques discrétisées

Chapitre II : Les structures dynamiques à 1 ddl en vibrations libres

| | |
|---|----|
| II.1. Introduction | 15 |
| II.2. Les problèmes dynamiques dans la vie courante | 15 |
| II.3. Modélisation en dynamique | 23 |
| II.4. Types de chargements externes | 27 |
| II.5. Mise en équation d'un phénomène dynamique | 28 |
| II.5.1. Le modèle dynamique élémentaire, | 29 |
| II.5.2. Loi de comportement de l'oscillateur, | 30 |
| II.5.3. Equations de l'équilibre dynamique, | 30 |
| II.6. Dynamique des structures libres | 31 |

Chapitre III : Les structures dynamiques à 1 ddl en vibrations forcées

| | |
|---|----|
| III.1 Introduction | 46 |
| III.2 Réponse à une excitation harmonique | 46 |
| Etude de la résonance | 50 |
| III.3 La force transmise au sol (isolation vibratoire) | 51 |
| III.4 Excitation par déséquilibre dynamique en rotation (les balourds)- | 55 |
| III.5 Tourbillonnement synchrone des arbres tournants des machines | 57 |
| III.6 Excitation de la base (isolation vibratoire) | 60 |
| III.7 Excitation d'accélération | 61 |
| III.8 Récapitulatif | 63 |

Chapitre IV : Les structures dynamiques à 1 ddl en vibrations forcées par impulsion

| | |
|---|----|
| IV.1 Introduction | 64 |
| IV.2 Les types d'excitations impulsives | 65 |
| IV.3 Excitation semi-sinusoïdale | 65 |
| IV.4 Excitation rectangle | 68 |
| IV.5 Excitation triangle | 70 |
| IV.6 Réponse spectrale-spectre de choc- | 71 |
| IV.7 Les forces transmises au sol | 73 |
| IV.8 Les applications pratiques | 75 |
| 8.1 Réponse à une excitation non-sinusoïdale | 75 |
| 8.2 Réponse d'une structure à une série d'impacts | 76 |
| 8.3 Réponse d'un véhicule à un changement échelon au profil du chemin | 78 |
| 8.4 Réponse à une excitation semi-sinusoïdale de la base | 80 |
| 8.5 Amplitude de l'impulsion communiquée à la balle | 82 |
| IV.9 Réponse à une excitation quelconque | 83 |
| 9.1 Réponse à une excitation périodique | 83 |
| 9.2 Réponse à une excitation non périodique | 84 |
| IV.10 Les structures dynamiques généralisées à 1 ddl | 85 |

Chapitre V : Les structures dynamiques discrètes à n ddl en vibrations libres et forcées

| | |
|---|-----|
| V.1 Introduction | 91 |
| V.2 La démarche à suivre dans l'étude d'une structure dynamique à n ddl | 91 |
| 2.1 Discrétisation de la structure en n ddl | 91 |
| 2.2 La mise en équations différentielles du système discret | 91 |
| 2.3 Méthode directe (méthode modale) | 91 |
| 2.4 Méthodes indirectes (itératives) de recherche des pulsations et modes propres | 92 |
| a/ La formule de Dunkerley | 92 |
| b/ La méthode de Rayleigh | 93 |
| c/ La méthode de Holzer | 97 |
| V.3 Structures dynamiques à 2 ddl | 101 |
| 3.1 Etablissement des équations différentielles du mouvement | 101 |
| 3.2 Types de couplage | 101 |
| 3.3 Vibrations libres non amorties | 105 |
| 3.4 Matrice de flexibilité « de souplesse » | 105 |
| 3.5 Les vibrations de torsion | 110 |
| 3.6 Les vibrations libres amorties | 114 |
| 3.7 Les vibrations forcées non amorties | 121 |
| 3.8 Les vibrations forcées amorties | 124 |
| 3.9 Les vibrations forcées impulsives non amorties | 127 |

| | |
|---|-----|
| V.4 Généralisation aux structures à plusieurs ddl | 127 |
| 4.1 Les vibrations forcées des structures non amorties par l'analyse modale | 129 |
| 4.2 Les vibrations forcées des structures amorties par l'analyse modale | 133 |

Partie II : Les structures dynamiques continues

Chapitre VI : Les structures dynamiques continues en vibrations libres et forcées

| | |
|--|-----|
| VI.1 Introduction | 138 |
| VI.2 Les vibrations libres des structures dynamiques continues | 139 |
| 2.1 Les vibrations longitudinales des barres | 139 |
| 2.2 Les vibrations transversales | 141 |
| 2.2.1 Les vibrations des cordes et des câbles | 141 |
| 2.2.2 Les vibrations des poutres | 143 |
| VI.3 Les vibrations de torsion | 147 |
| VI.4 Méthodes énergétiques pour déterminer les pulsations propres des structures continues | 147 |
| a / La méthode de Rayleigh | 147 |
| b/ La méthode de Rayleigh-Ritz | 149 |
| VI.5 Orthogonalité des modes propres | 151 |
| VI.6. Les vibrations non amorties forcées des structures dynamiques continues | 154 |
| 6.1/ Les vibrations de torsion | 154 |
| 6.2/ Les vibrations transversales des poutres | 155 |
| VI.7 Récapitulatif | 157 |

Chapitre VII : Contrôle des vibrations des structures dynamiques

| | |
|--|-----|
| VII.1 Les techniques de réduction des vibrations des structures dynamiques | 158 |
|--|-----|

Chapitre VIII : Les vibrations des structures dynamiques par la méthode des éléments finis

| | |
|--|-----|
| VIII.1 Introduction | 160 |
| VIII.2 Les Concepts des éléments finis | 160 |
| 2.1 L'élément ressort | 160 |
| a/ Les vibrations libres non amorties | 161 |
| b/ Les vibrations forcées non amorties | 162 |
| 2.2. Assemblage des éléments ressorts dans le système des coordonnées globales | 163 |
| 2.3 L'élément ressort spiral | 166 |
| 2.4 L'élément barre élastique | 167 |
| 2.5 Charges externes variables | 173 |
| 2.6 Charges thermiques | 173 |
| 2.7 L'élément barre orienté | 174 |
| 2.8 L'élément poutre en flexion | 176 |
| 2.9 Poutre avec charge répartie | 181 |
| 2.10 Les vibrations composées (axial-flexion) | 184 |
| VIII.3 Récapitulatif | 190 |

Références bibliographiques

Annexe

Tableau A.1 -

Avant propos

Le polycopié présent, intitulé : Dynamique des structures avancées, est destiné aux étudiants de Master 1 de génie mécanique, option construction mécanique, de l'Université de Med Boudiaf -M'sila .

Le contenu de ce polycopié est compatible avec le canevas de la formation du Master S2, donné au niveau du département de Génie Mécanique de l'Université de M'sila.

Des rappels des connaissances de base, la résolution des équations différentielles et l'analyse vibratoire des corps solides sont des outils indispensables pour mieux maîtriser le contenu du polycopié pédagogique.

La modélisation des phénomènes physique vibratoires actuellement constitue un outil très important des structures dynamiques discrètes ou continues. Les phénomènes physiques des structures dynamiques discrètes sont gouvernés par des équations différentielles par contre les structures dynamiques continues sont gouvernées par des équations différentielles aux dérivées partielles, chacune d'eux nécessitant de savoir les méthodes utilisées pour les résoudre convenablement. Des exemples simples de la vie pratique pour enrichir les connaissances et afin de rapprocher les idées des cours longues ont été sélectionnés.

C'est pourquoi le manuscrit est divisé en chapitres, dont le premier chapitre est consacré à des rappels mathématiques : de l'intégration par parties, les nombres complexes, séries de Fourier, transformées de Laplace, centre de gravité, moments d'inertie à la correspondance électromécanique en passant par les différentes définitions degré de liberté, dynamique des structures,....

Les structures dynamiques discrètes à un seul ddl, avec des vibrations libres sont traitées dans le deuxième chapitre avec d'autant de cas de calcul.

Par contre les structures en vibrations forcées de la forme harmoniques ou en vibrations de leurs bases ont été étudiées d'une façon approfondie au troisième chapitre.

Dans le quatrième chapitre les structures dynamiques discrètes forcées par impulsion, ont fait l'objet d'une étude détaillée.

Les structures dynamiques discrètes à plusieurs ddl en vibrations libres ou forcées et les méthodes de recherche des pulsations et des modes propres ainsi qu'une aperçue sur l'analyse modale ont été bien examinées au cinquième chapitre.

Alors que le sixième chapitre est consacré à l'étude des structures dynamiques continues en vibrations libres et forcées en passant par les méthodes énergétiques de recherche des pulsations propres.

Le septième chapitre est dédié au contrôle des vibrations des structures dynamiques.

La méthode des éléments finis est abordée en détail au dernier chapitre, elle est très employée dans le domaine vibratoire.

On termine par une bibliographie des références utilisées pour l'établissement de ce polycopié de cours.

Les éléments non traités par ce manuscrite, sont :

- Les vibrations des structures non linéaires,
- Les vibrations aléatoires et stochastiques,
- Les vibrations des structures par l'engineering des tremblements de terre,
- Les vibrations amorties des structures dynamiques continues ainsi que poutres de Rayleigh, poutres de Timoshenko et les éléments membrane et plaque,
- Les éléments surfacique (8 N I, 4NLQ, 3NLT), ainsi que les éléments volumiques (8NL, 20 NQ (cube), 4NL, 10 NQ (tétraédrique), plaque (mince et épaisse), coque (mince et épaisse).

Chapitre 1 : Pré-requis :

Connaissances de base

I.1 Intégration par parties

C'est une méthode qui permet dans certains cas de trouver une primitive du produit de deux fonctions. la formule est :

$$\int u dv = uv - \int v du \dots \dots \dots (I.1)$$

I.2 Séries de Fourier

Une fonction de période T peut être développée en séries trigonométriques de Fourier, défini par :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \dots \dots \dots (I.2)$$

Dont les coefficients constants a_n et b_n sont calculés par les formules :

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \cos n\omega t dt \quad \text{et} \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} F(t) \sin n\omega t dt \dots \dots \dots (I.3)$$

Avec : $\omega = \frac{2\pi}{T}$ et $n=0, 1, 2, 3, \dots$

I.3 Transformées de Laplace

Soit une fonction $f(t)$ de la variable réelle t , définie pour $t \geq 0$. On lui fait correspondre la fonction $F(s)$ de la variable complexe s , appelée transformée de Laplace, et définie par :

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(f(t)) \dots \dots \dots (I.4)$$

Pour que cette transformée existe, l'intégrale doit converger. Cette condition est réalisée lorsque $\Re(s) > \infty$ appelée abscisse de convergence, ce qui est vérifiée pour les fonctions usuellement rencontrées en dynamique.

la transformée de Laplace est linéaire : $\mathcal{L}(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \mathcal{L}(f_1) + \lambda_2 \mathcal{L}(f_2) \dots \dots \dots (I.5)$

Transformée de Laplace des dérivées successives de $f(t)$:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0) \quad \mathcal{L}(f''(t)) = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \dots \dots \dots (I.6)$$

Théorème du retard

$$\mathcal{L}(E(t-a)f(t-a)) = e^{-as}F(s) \dots \dots \dots (I.7)$$

$$\mathcal{L}(e^{\lambda t} f(t)) = F(s - \lambda) \dots \dots \dots (I.8)$$

Théorème de composition

Soit $g(t)$ le produit de convolution $f_1(t) * f_2(t)$ ainsi défini

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau \dots \dots \dots (I.9)$$

$$\mathcal{L}(f_1(t) * f_2(t)) = F_1(s).F_2(s) \dots\dots\dots(I.10)$$

Distribution de Dirac :

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ +\infty & \text{pour } t = 0 \\ 0 & \text{pour } t > 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I.11)$$

Propriétés

$$\int_a^b \delta(t) dt = \begin{cases} 1 & \text{si } a < 0 \text{ et } b > 0 \\ 0 & \text{si } ab = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(I.12)$$

$$\int_a^b \delta(t) dt = E(t) \dots\dots\dots(I.13)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(t - a) dt = E(t - a) \dots\dots\dots(I.14)$$

$$\int_0^t f(t - \tau)\delta(\tau) d\tau = f(t) = \int_0^t \delta(t - \tau)f(\tau) d\tau \dots\dots\dots(I.15)$$

$f(t) * \delta(t) = f(t) \rightarrow \delta(t)$ est élément neutre du produit de convolution $\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

Tableau I.1. Les transformées de Laplace élémentaires :

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ | $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ | $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ |
|---|---------------------------------|-------------------------|--|----------------------|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $\cosh \omega t$ | $\frac{s}{s^2 - \omega^2}$ | $t^n e^{at}$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$ |
| t | $\frac{1}{s^2}$ | $\sinh \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$ | $(1+at)e^{at}$ | $\frac{s}{(s-a)^2}$ |
| t^n | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ | $1 - \cos \omega t$ | $\frac{\omega^2}{s(s^2 + \omega^2)}$ | $t \cos \omega t$ | $\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s-a}$ | $\cosh \omega t - 1$ | $\frac{\omega^2}{s(s^2 - \omega^2)^2}$ | $t \sin \omega t$ | $\frac{2\omega s}{(s^2 + \omega^2)^2}$ |
| $\frac{e^{r_1 t} - e^{r_2 t}}{r_1 - r_2}$ | $\frac{1}{(s-r_1)(s-r_2)}$ | $e^{-at} \cos \omega t$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$ | \sqrt{t} | $\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$ |
| $\cos \omega t$ | $\frac{s}{s^2 + \omega^2}$ | $e^{-at} \sin \omega t$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$ | $\frac{1}{\sqrt{t}}$ | $\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ |
| $\sin \omega t$ | $\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ | $t e^{at}$ | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $\delta(t)$ | 1 |

I.4 Notation complexe

Soient a et b deux nombres réelles le nombre complexe est noté par : $z = a + jb = |z| \cos \vartheta + j |z| \sin \vartheta = |z|e^{-i\vartheta}$ (I.16)

Avec :

$a = |z| \cos \vartheta$ partie réelle de z ,

$b = |z| \sin \vartheta$ partie imaginaire de z .

Module de z ; $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Argument (phase) de z : $\vartheta = \arctg (b/a)$

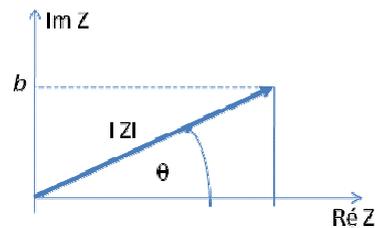


Figure I.1. Représentation graphique des nombres complexes.

Souvent, lorsqu'on grandeur physique varie sinusoidalement : $x(t) = A \cos (\omega t + \varphi)$,

On préfère ; au stade des calculs, l'exprimer sous la forme complexe :

$$x(t) = A e^{j(\omega t + \varphi)} \text{ ou } x(t) = A^* e^{j\omega t} \text{(I.17)}$$

Avec $A^* = A e^{j\varphi}$: amplitude complexe ; φ : déphasage , A : amplitude maximale (réelle) et ω : pulsation.

Une fois le résultat final obtenu, on l'exprime en en retenant que la partie réelle, la partie imaginaire étant omise.

I.5. Les fonctions trigonométriques et hyperboliques

$$\begin{aligned} e^{jy} &= \cos y + j \sin y \\ e^{-jy} &= \cos y - j \sin y \end{aligned} \dots\dots\dots (I.18)$$

On peut avoir aussi :

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{1}{2}(e^{jy} + e^{-jy}) \\ \sin y &= \frac{1}{2j}(e^{jy} - e^{-jy}) \end{aligned} \dots\dots\dots (I.19)$$

Ces relations peuvent être étendues pour n'importe quel nombre complexe $z = x + jy$;

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}) = \cos x \cosh y - j \sin x \sinh y \\ \sin z &= \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}) = \sin x \cosh y + j \cos x \sinh y \\ \sin jy &= \frac{1}{2j}(e^{-y} - e^y) = j \sinh y \\ \cos jy &= \frac{1}{2}(e^{-y} + e^y) = \cosh y \\ \sinh z &= \cos y \sinh x + j \sin y \cosh x \\ \cosh z &= \cos y \cosh x + j \sin y \sinh x \\ \sinh jz &= j \sin z \\ \cosh jz &= \cos z \end{aligned} \dots\dots\dots (I.20)$$

I.6 Représentation vectorielle des mouvements harmoniques (Fresnel)

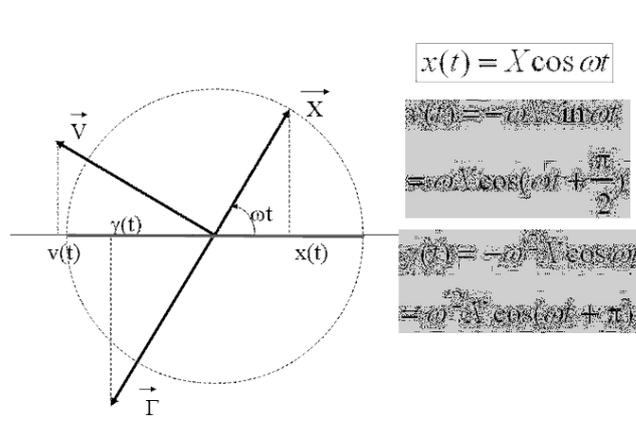


Figure I.2. Représentation vectorielle de Fresnel.

I.7 Calcul matriciel

Soient deux matrices carrées $s \times s$ (les lignes = les colonnes) :

$$A = (a_{ij}) \quad \text{et} \quad B = (b_{ij}) \dots\dots\dots(I.21)$$

a. Multiplication :

L'élément C_{ij} de la matrice C , produit de A par B , $C=A.B$, est égal à la somme la $i^{\text{ème}}$ ligne de A par ceux de la $j^{\text{ème}}$ colonne de B .

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^s a_{ik} \cdot b_{kj} \dots\dots\dots(I.22)$$

b. Matrice transposée :

C'est la matrice A' dont les éléments de la $i^{\text{ème}}$ colonne sont ceux de la $j^{\text{ème}}$ ligne de A , $i = 1, s$.

c. Matrice adjointe :

La matrice $A^a = (A_{ij})$ est appelée matrice adjointe de A si ses éléments A_{ij} sont les cofacteurs des éléments a_{ij} de A^t .

d. Matrice inverse :

Une matrice A^{-1} est dite inverse de la matrice A , Si :

$$A^{-1}.A = A.A^{-1} = I \quad , \quad \text{ou } I \text{ est la matrice unité} \dots\dots\dots(I.23)$$

Pour qu'une matrice soit inversible il faut que son déterminant soit différent de zéro.

Dans ce cas, on a :

$$A^{-1} = \frac{A^a}{\det A} \dots\dots\dots(I.24)$$

I.8 Nombre de degrés de liberté

On appelle nombre de degrés de liberté le nombre m de coordonnées généralisées (ou paramètres indépendants) nécessaires et suffisantes pour déterminer la « position du système ».

Le **nombre de degrés de liberté** utilisé dans l'analyse d'un système mécanique est le **nombre des coordonnées cinématiquement indépendantes nécessaires pour décrire complètement le mouvement des particules dans le système**. Un tel ensemble de coordonnées est appelé ensemble de coordonnées généralisées. Le choix d'un ensemble de coordonnées généralisées n'est pas unique. Les quantités cinématiques telles que les déplacements, les vitesses et les accélérations sont écrits comme des fonctions des coordonnées généralisées et leurs dérivées temporelles.

Si N est le nombre total de particules constituant le système et n le nombre des liaisons géométriques restreignant son mouvement, alors $m=3N-n$.

I.9 Système conservatif

Un système est dit « conservatif » si son énergie « mécanique » totale se conserve (reste constante) :

$$E=T(\text{énergie cinétique}) + U(\text{énergie potentielle}) = \text{constante.}$$

I.10 Centre de gravité d'un corps dans les coordonnées cartésiennes

Le centre de gravité, appelé G , est le point d'application de la résultante des forces de gravité ou de pesanteur. De ce fait, il est clairement dépendant du champ de gravitation auquel le corps est soumis et ne doit pas être confondu avec le centre d'inertie qui est le barycentre des masses. Il est souvent assimilé à ce dernier, mais ce n'est qu'une approximation liée au fait que dans la plupart des cas, le champ de gravitation auquel le corps est soumis peut être considéré comme uniforme dans le corps considéré.

Système discret

$$X_G = \frac{\sum m_i x_i}{m_i}$$

$$Y_G = \frac{\sum m_i y_i}{m_i}$$

$$z_G = \frac{\sum m_i z_i}{m_i}$$

Système continu

$$X_G = \frac{\int x dm}{\int \rho dv}$$

$$Y_G = \frac{\int y dm}{\int \rho dv}$$

$$z_G = \frac{\int z dm}{\int \rho dv}$$

Exemple :

Soit un solide indéformable constitué par la juxtaposition d'un hémisphère plein et homogène de masse m_h et de centre d'inertie G_1 et d'un cône plein et homogène de masse m_c et de centre d'inertie G_2 . Soit G le centre d'inertie du solide complet. Déterminer algébriquement OG ?

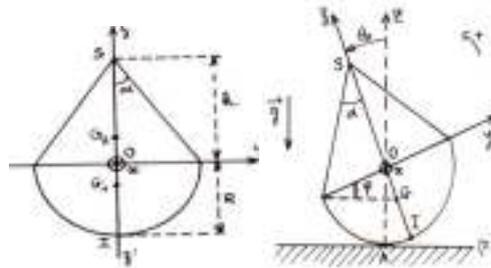


Figure I.3. Centre d'inertie.

- Masse de l'hémisphère : $m_h = \rho \left(\frac{2}{3} \pi R^3 \right)$;(I.25)
- La position du centre d'inertie de l'hémisphère :

$$m_h z'_{G_1} = \int_0^R z' dm = \int_0^R z' \rho \pi r^2 dz' = \int_0^R z' \rho \pi (R^2 - z'^2) dz' \Rightarrow z'_{G_1} = \frac{3R}{8} ,(I.26)$$

- Moment d'inertie de l'hémisphère par rapport à l'axe oz :

$$J_{oz_H} = \int_0^R \frac{1}{2} \rho \pi (R^2 - z'^2)^2 dz' = \frac{2}{5} m_H R^2 ,(I.27)$$

- Masse du cône : $m_c = \rho \int_0^h \pi (h-z)^2 \frac{R^2}{h^2} dz = \rho \frac{\pi}{3} R^2 h$;(I.28)
- La position du centre d'inertie du cône :

$$z_{G_2} m_c = \int_0^h z dm = \rho \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h z (h-z)^2 dz \Rightarrow z_{G_2} = \frac{h}{4} ,(I.29)$$

- Moment d'inertie du cône par rapport à l'axe oz :

$$J_{oz_c} = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{h^4} \int_0^h (h-z)^4 dz = \frac{3}{10} m_c R^2 ;(I.30)$$

- Masse du **solide complet** :

$$M = m_h + m_c = \rho \left(\frac{2}{3} \pi R^3 + \frac{1}{3} \pi R^2 h \right) ; \dots\dots\dots(I.31)$$

- La position du centre d'inertie du solide complet :

$$OG = z_G = \frac{m_c OG_2 + m_h OG_1}{m_c + m_h} = \frac{m_c z_{G_2} - m_h z_{G_1}}{m_c + m_h} = \frac{1}{4} \frac{h^2 - 3R^2}{h + 2R} ; \dots\dots\dots(I.32)$$

- Moment d'inertie du solide complet :

$$J_{oz} = \frac{2}{5} m_h R^2 + \frac{3}{10} m_c R^2 \dots\dots\dots(I.33)$$

I.11 Moments Quadratique et Polaire d'une surface

Le moment quadratique est une grandeur qui caractérise la géométrie d'une section et se définit par rapport à un axe ou un point. Il s'exprime dans le Système international en m⁴. Le moment quadratique est utilisé en résistance des matériaux, il est indispensable pour calculer la résistance et la déformation des poutres sollicitées en torsion et en flexion.

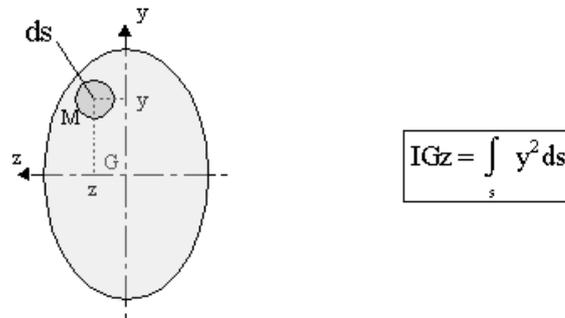
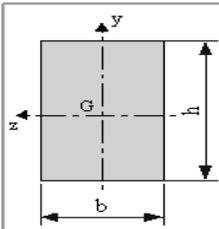
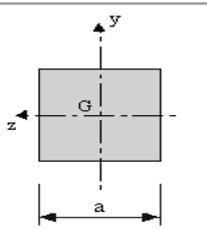
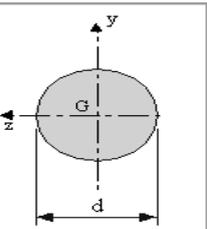
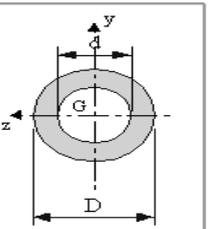


Figure I.4. Moment polaire d'une surface

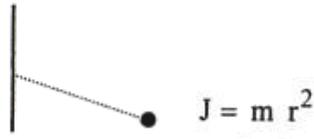
$$I_0 = I_{Gy} + I_{Gz}$$

I.12 Cas courants de I_{Gz} et I₀

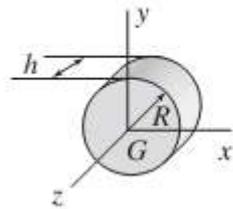
| | | | | |
|---|---|---|--|---|
| |  |  |  |  |
| I_{Gz} (mm ⁴) | $\frac{bh^3}{12}$ | $\frac{a^4}{12}$ | $\frac{\pi d^4}{64}$ | $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ |
| I₀ (mm ⁴) | $\frac{bh^3 + hb^3}{12}$ | $\frac{a^4}{6}$ | $\frac{\pi d^4}{32}$ | $\frac{\pi (D^4 - d^4)}{32}$ |

I.13 Moments d'inertie

D'une masse ponctuelle

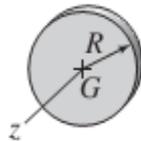


D'un cylindre ou disque plein et homogène par rapport à son axe de symétrie :



$$J_x = J_y = \frac{1}{12} m(3R^2 + h^2)$$

$$J_z = \frac{1}{2} mR^2$$



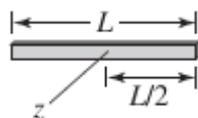
$$J_G = \frac{1}{2} mR^2$$

D'une jante ou cylindre creux par rapport à son axe de symétrie :



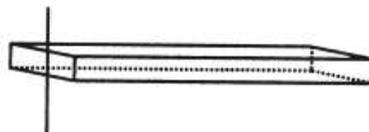
$$J = MR^2$$

D'une barre mince par rapport à un axe perpendiculaire et passant par son centre de gravité :



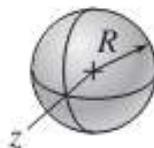
$$J_G = \frac{1}{12} mL^2$$

D'une barre mince par rapport à un axe perpendiculaire et passant par son extrémité :



$$J = \frac{m \ell^2}{3}$$

D'une sphère :



$$J_G = \frac{2}{5} mR^2$$

I.14 Théorème de HUYGENS –Koënigs (généralisé) :

Lorsque la rotation du corps se fait autour d'un axe Δ le moment d'inertie J_{Δ} du corps relativement à cet axe Δ est égal au moment d'inertie J_G du corps, relatif à un axe parallèle à Δ et passant par G augmenté de la quantité Ma^2 ou a est la distance séparant ces deux axes :

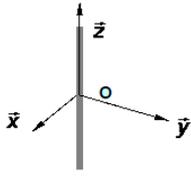
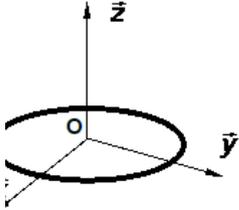
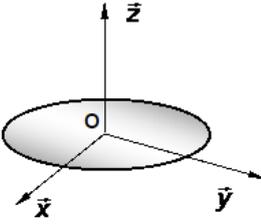
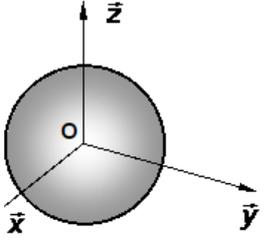
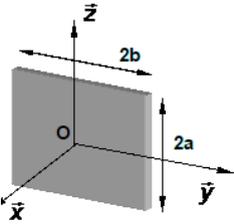
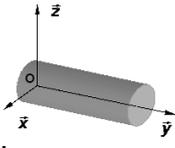
$$J_{\Delta} = J_G + Ma^2 \dots\dots(I.14)$$

Le passage d'une matrice d'inertie définie en G, centre d'inertie de S, à la matrice d'inertie en A s'écrit:

$$I(A,S) = I(G,S) + m \begin{pmatrix} b^2+c^2 & -ab & -ac \\ -ab & a^2+c^2 & -bc \\ -ac & -bc & a^2+b^2 \end{pmatrix}$$

a, b, c étant les coordonnées de G dans le repère lié au solide S.

Matrice d'inertie de quelques solides courants :

| | |
|---|---|
| <p>1. Tige rectiligne, homogène, de diamètre négligeable et de longueur 2L. O milieu de la tige</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$  | <p>2. Anneau de rayon R. O centre de l'anneau</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & mR^2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$  |
| <p>3. Disque de rayon R O centre de disque</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{mR^2}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{2} \end{pmatrix}$  | <p>4. Sphère pleine de rayon R O centre de la sphère</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$  |
| <p>5. Plaque rectangulaire d'épaisseur négligeable O centre de la plaque</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}m(a^2+b^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}ma^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}mb^2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$  | <p>6. Cylindre de rayon R et de longueur H O centre de la base</p> $I(O,S) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{3}mH^2 \end{pmatrix}_{(x,y,z)}$  |

I.15 Notions générales

a/ Le point matériel

Un point matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une grandeur scalaire positive, mesurable, appelée masse (masse volumique).

Cette grandeur caractérise la quantité de matière que "contient" le point matériel. Il s'agit là d'un modèle.

Au sens mathématique, un point a un volume nul et pourtant on lui associe une quantité de matière : dans ce modèle, un point matériel est une singularité de l'espace.

b/ La mécanique

C'est une branche de la physique, dont l'objet est l'étude du mouvement, des déformations ou des états d'équilibre des systèmes physiques ; cette science peut être classée en plusieurs domaines :

- la mécanique rationnelle (dite aussi mécanique classique), qui regroupe elle-même :
 - la mécanique analytique, qui regroupe différentes formulations très mathématisées de la mécanique classique ;
 - la mécanique céleste,
 - la mécanique du point matériel,
 - la mécanique du solide
 - la mécanique statique ou mécanique des systèmes matériels,
 - la mécanique des milieux continus, incluant la mécanique des fluides
 - la dynamique (physique), discipline de la mécanique classique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont appliquées.
- la mécanique quantique,
- la mécanique relativiste ;
- la mécanique, dont l'objet est l'étude et la conception de machines que se soit par la création ou innovation.

c/ La dynamique

Discipline de la mécanique qui étudie les corps en mouvement sous l'influence des forces qui leur sont soumises.

Pour comprendre comment et pourquoi un objet accélère, il faut définir les notions de force et de masse.

d/ Une structure

La structure est un agencement et une organisation d'éléments interdépendants dans un objet ou un système matériel, ou l'objet ou le système ainsi organisé. Les structures matérielles comprennent des objets fabriqués par l'homme tels que des bâtiments et des machines et des objets naturels tels que des organismes biologiques, des minéraux et des produits chimiques. Les structures abstraites comprennent des structures de données en informatique et en forme musicale. Les types de structure incluent une hiérarchie (une cascade de relations un-à-plusieurs), un réseau comportant des liens plusieurs-à-plusieurs ou un treillis comportant des connexions entre des composants voisins dans l'espace.

Une autre définition plus précise :

Ensemble des pièces d'un ensemble supportant les efforts principaux et formant l'ossature sur laquelle sont fixés les autres éléments (carrosserie, fuselage, etc.).

e/ Dynamique des structures

Le mot dynamique implique aussi des vibrations ou des oscillations. On désigne par vibration tout système « structure » faisant des petits mouvements « perturbations » autour d'une position d'équilibre. Cette définition est inspirée de la norme Afnor 90.001 qui annonce que :

La vibration est une variation dans le temps de la valeur d'une grandeur donnée, propre au mouvement, voire de la position d'un système (structure) mécanique, lorsque la grandeur dont il est question est soit plus grande soit plus petite que la valeur moyenne connue valeur de référence.

Un corps vibre lorsqu'il est animé par un mouvement oscillatoire, alors qu'il se trouve en position d'équilibre. La forme la plus simple de mouvement oscillatoire est la forme sinusoïdale caractérisée par une amplitude, une fréquence et une phase.

f/ Les phénomènes dynamiques engendrant la rupture des structures

Les phénomènes « dynamiques » qui peuvent causer l'endommagement « ruine-rupture » des structures sont trois types :

- fatigue : nombre de cycle → naissance des défauts → propagation des fissures → rupture,
- choc : naissance des défauts → propagation des fissures → rupture,
- vibratoire : qui peut causer la rupture directement.

g/ Structures discrètes ou continues

Les structures mécaniques dans l'étude dynamique sont divisées en deux groupes :

Un système (structure) avec un **nombre fini de degrés de liberté** est un **système discret**, tandis qu'un système avec un **nombre infini de degrés de liberté** est appelé **système continu** ou un système à paramètres distribués.

L'étude dynamique des structures est de parvenir à éviter les risques engendrés de rupture par les vibrations en appliquant des méthodes ou on introduit les notions des contraintes et déplacements communiquées à la structure soumise à un chargement dynamique externe.

h/ Ressorts et amortisseurs équivalents :

* En série

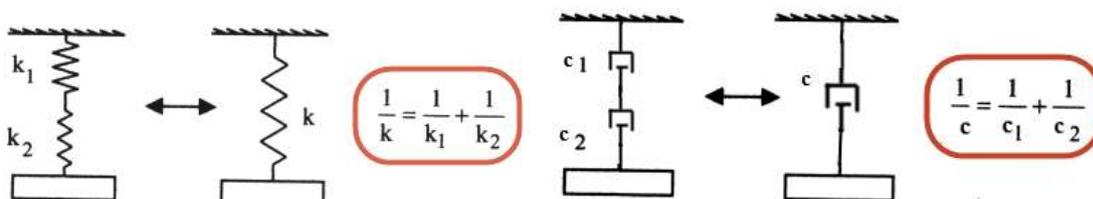


Figure I.5. Ressorts et amortisseurs en série.

*** En parallèle**

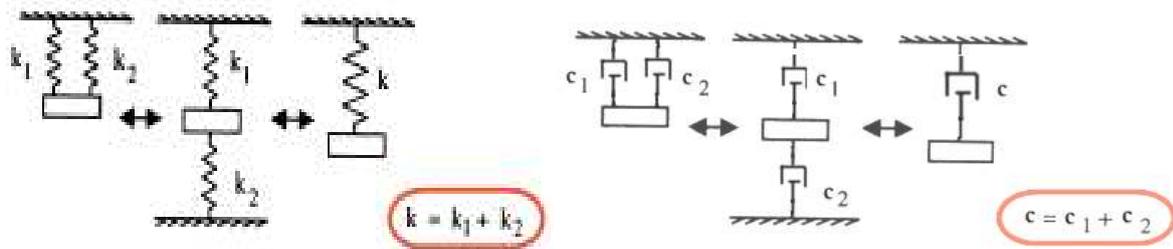


Figure I.6. Ressorts et amortisseurs en parallèle.

*** Cas particulier**

$$K = K_1 (\cos \gamma)^2 + K_2 (\cos \theta)^2$$

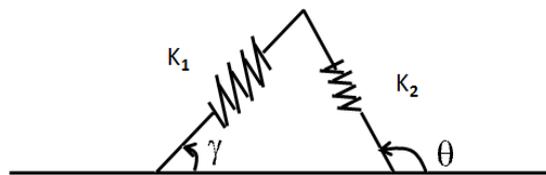


Figure I.7. Ressorts en cas particulier.

i/ Equation de Lagrange :

Le lagrangien est une fonction des coordonnées généralisées du système :

$$L = T - U = L(q_i, \dot{q}_i) ; \dots \dots \dots (I.35)$$

On en déduit les équations de Lagrange qui sont les équations différentielles du mouvement du système :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t) \quad \text{avec } i=1, 2, 3, \dots, m \dots \dots \dots (I.36)$$

[Valable pour les systèmes « holonomes » ou les relations entre les coordonnées peuvent s'écrire sous la forme : $f_k(x_i, y_i, z_i) = 0$. Exemple pendule simple oscillant dans un plan et ne faisant pas intervenir des relations linéaires entre les vitesses, tel le cas des systèmes non holonomes].

$Q_i(t)$ est la « force généralisée » ne dérivant pas d'un potentiel $Q_i(t) \neq -\overline{\text{grad } U}$; tel les forces de poids ou du rappel d'un ressort].

On obtient un système de m équations différentielles du second ordre qui, en générale, ne sont pas linéaires. Les expressions de T, U et L peuvent être ramenées à des formes quadratiques et les équations différentielles qui en découlent sont linéaires, donc plus simples à résoudre.

La solution du système de m équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants s'exprimera à l'aide de m pulsations propres ω_l ($1 \leq l \leq m$) et de 2m constantes d'intégration.

La valeur nulle de la pulsation propre correspond à un mouvement de translation régulière ($\ddot{x} = 0 \rightarrow \dot{x} = cte$).

Fonction dissipation d'énergie :

$-\frac{D}{\partial \dot{q}_i}$ représente la composante de la « force de frottement » dans la direction de la coordonnée généralisée q_i .

$$D = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \alpha_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j$$

L'énergie de dissipation se calcul par : (I.37)

Les α_{ij} étant les coefficients de frottement visqueux, ils peuvent parfois dépendre des coordonnées q_i .

j/ Analogie électrique-mécanique

Les systèmes mécaniques possédant un circuit électrique équivalent ceci permet de faire l'étude mathématique et l'expérience de simulation pour le circuit électrique pour ensuite extrapoler les résultats obtenus au système mécanique.

Une certaine analogie de faire la correspondance entre leurs éléments constitutifs.

L'équivalence entre éléments du système mécanique et composants du circuit électrique s'en déduit aisément.

Cependant, pour que cette méthode puisse aboutir à des résultats fiables, il faut s'assurer que les valeurs numériques de diverses grandeurs physiques (mécaniques et électriques) vérifient les relations sans dimensions suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{m_1}{m_2} &= \frac{L_1}{L_2} & ; & & \frac{k_1}{k_2} &= \frac{C_2}{C_1} \\ \frac{F}{kx} &= \frac{EC}{q} & ; & & \frac{\alpha^2}{km} &= \frac{R^2C}{L} \\ \frac{\omega_{méca}}{\omega_{elect}} &= \sqrt{LC} \sqrt{\frac{k}{m}} & & & & \dots\dots\dots(I.38) \end{aligned}$$

Tableau I.2. Les correspondances électromécaniques :

| <u>Systèmes mécaniques</u> | | <u>Circuits électriques</u> | |
|--|------------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|
| rotation | translation | analogie m / L | analogie m / C |
| angle ϑ | déplacement x | charge q | $u = \int v dt$ |
| vitesse $\dot{\vartheta}$ | \dot{x} | courant $\dot{q} = i$ | tension v |
| moment d'inertie J | masse m | inductance L | capacité C |
| constante de torsion \mathcal{C} | raideur k | $\frac{1}{C}$ | $\frac{1}{L}$ |
| coefficient de frottement | | résistance | admittance |
| β | α | R | $\frac{1}{R}$ |
| énergie cinétique | | | |
| $T = \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}^2$ | $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ | $T = \frac{1}{2} L i^2$ | $T = \frac{1}{2} C v^2$ |
| énergie potentielle | | | |
| $U = \frac{1}{2} \mathcal{C} \vartheta^2$ | $U = \frac{1}{2} k x^2$ | $U = \frac{1}{2} \frac{1}{C} q^2$ | $U = \frac{1}{2} \frac{1}{L} u^2$ |
| fonction de Dissipation | | | |
| $D = \frac{1}{2} \beta \dot{\vartheta}^2$ | $D = \frac{1}{2} \alpha \dot{x}^2$ | $D = \frac{1}{2} R i^2$ | $D = \frac{1}{2} \frac{1}{R} v^2$ |
| Lagrangien $L = T - U$ | | | |
| équations de LAGRANGE | | | |
| $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + Q_i(t)$ | | | |
| "Force généralisée" appliquée | | | |
| moment appliqué $Q(t) = M(t)$ | force appliquée $Q(t) = F(t)$ | tension appliquée $Q(t) = E(t)$ | courant imposé $Q(t) = I(t)$ |
| nombre de degrés de liberté | | nombre de mailles | nombre de nœuds |
| élément de couplage | | élément commun à 2 mailles | élément commun à 2 nœuds |
| impédance | | admittance | |
| $Z = \frac{M(t)}{\dot{\vartheta}(t)}$ | $Z = \frac{F(t)}{\dot{x}(t)}$ | $Z = \frac{E(t)}{i(t)}$ | $Y = \frac{i(t)}{v(t)}$ |

Partie I : Les structures dynamiques discrétisées

Chapitre III :

Les structures dynamiques à 1ddl

Les vibrations libres

II.1. Introduction

Dans le cadre de la dynamique les chargements imposés, les propriétés géométriques et matériaux, peuvent varier dans le temps. De plus, même dans la configuration initiale le milieu peut être caractérisé par des fonctions du temps.

Les paramètres à calculer sont donc également des fonctions du temps, et de nouvelles grandeurs apparaissent pour caractériser le mouvement, c'est-à-dire la variation de configuration dans le temps. Ce sont les paramètres cinématiques tels que les vitesses, les accélérations, les fréquences, ... qui n'existent pas dans le cas de la statique.

II.2. Les problèmes dynamiques dans la vie courante

Les problèmes dynamiques dans les structures se diversifient selon leur action dynamique, comme suit :

a) Les vibrations induites par les personnes



Figure II.1. Ponts piétons.



Figure II.2. Planchers avec des gens qui marchent (théâtres, salle de spectacle, ..).



Figure II.3. Sols pour des activités sportives ou de danse.



Figure II.4. Étage avec des sièges fixes et des galeries de spectateurs (le surnombre des supporteurs provoquant une bousculade dans un stade à Dakar-2017, causant l'effondrement d'une partie des tribunes).



Figure II.5. Plates-formes de plongée.

b) Les vibrations induites par la circulation et l'activité de construction

En effet, dans de nombreux secteurs industriels, il est primordial de déterminer, pour le dimensionnement et la conception, les niveaux d'efforts que les structures peuvent soutenir, mais également les propriétés amortissantes qu'elles peuvent développer.

C'est le cas dans les secteurs du transport :



Figure II.6. Aéronautique confort acoustique, vibrations aérodynamiques, vibrations propulseurs, ...

La possibilité d'une meilleure stabilité de l'hélicoptère pour viser sur une cible mobile par un missile air-sol ;



Figure II.7. Hélicoptère en position de tir d'un missile air-sol.

_ Maritime confort :



Figure II.8. Différents types de bateaux transporteurs.

Et aussi la maîtrise des structures des plates formes dans l'exploitation du pétrole ou du gaz des mers



Figure II.9. Plate forme d'exploitation en mer.

— ferroviaire confort acoustique, chocs de roulement, ... avec des petites vibrations pour le plus rapide des trains



Figure II.10. Transport ferroviaire et téléphériques.

— automobile confort habitacle, fréquences propres boîtes de vitesse, crash (=dynamique rapide), ...



Figure II.11. Voiture confortable.

- Ainsi que pour les engins de travaux et leurs équipements connexes ;

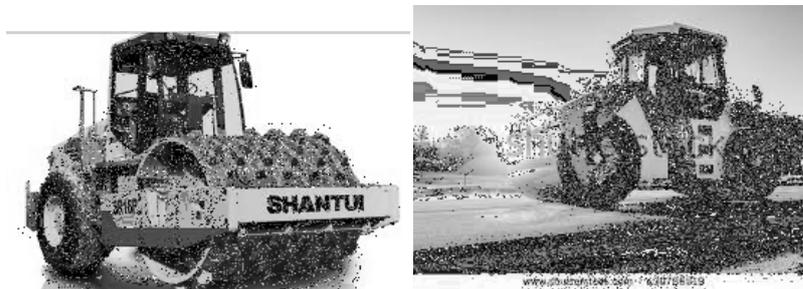


Figure II.12. Engins de travaux de construction.



Figure II.13. Quelques équipements connexes aux travaux de construction.

Chapitre II :

- Dans le secteur du génie civil (séismes, explosions, propagations dynamiques d'ondes, ...).



Figure II.14. Explosion d'un bâtiment.

c) Les vibrations induites par le vent et les tremblements de terre

- Bâtiments



Figure II.15. Des chefs-d'œuvre immobiliers.

- Tours, châteaux d'eau, les cheminées et les mâts :

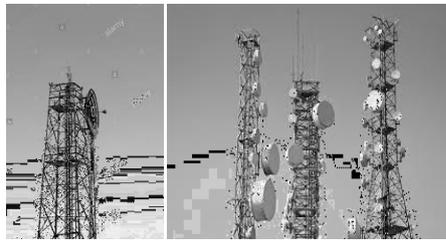


Figure II.16. Des mâts pour la transmission radiotéléphonique.



Figure II.17. Des châteaux d'eau pour l'approvisionnement des villes.



Figure II.18. Des ponts pour véhicules.

- Dans le secteur industriel (la stabilité des équipements de mesure très sensible et de précision, usinage conventionnel, usinage de haute précision, rigidité des machines et des robots industriels.. ;)

d) Les vibrations induites par les machines



Figure II.19. Les équipements de mesure de précision doivent être isolés des vibrations et se trouvent des plates formes stables (la rigidité).

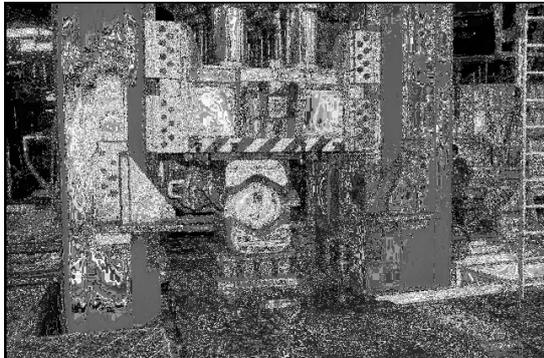


Figure II.20. Presse hydraulique / de forgeage / de production / à grande vitesse.



Figure II.21. La machine automatique scie le métal à relier de lame.

- Usinage de haute précision

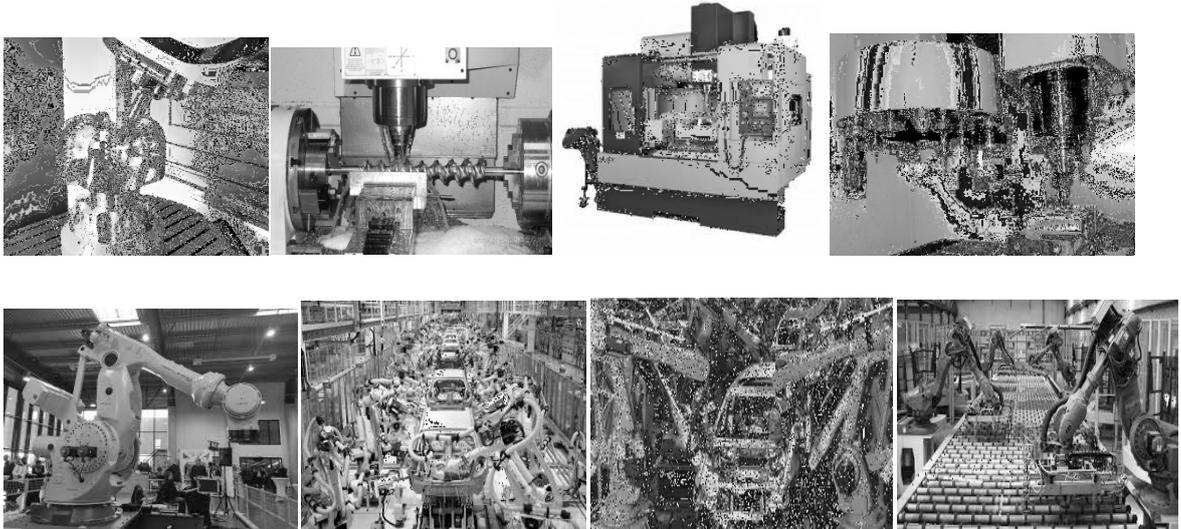


Figure II.22. Centres d'usinage et robots assembleurs.

- Dans le secteur de production des énergies renouvelables



Figure II.23. Stabilité des éoliennes, installation de l'éclairage avec énergie solaire.

- Les hautes énergies électriques;



Figure II.24. Les centrales électriques, les turbines à cycle combiné, les groupes électrogènes,

Chapitre II :

- Et finalement, dans le secteur de la robotique (ou la stabilité est un paramètre primordial) :



Figure II.25. Robot détecteur/ démanteler les bombes.



Figure II.26. Robot chirurgical autonome.



Figure II.27. Robot pour le traitement des déchets nucléaires.

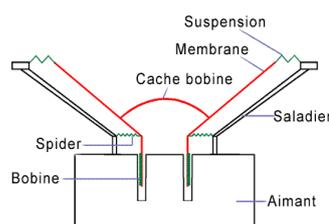


Figure II.28. Modèle électrodynamique du haut parleur et le microphone conversion électrique-mécanique et mécanique-électrique.

II.3. Modélisation en dynamique

La modélisation d'une structure peut permettre des simplifications importantes représentant une approximation suffisante d'un point de vue pratique de la solution exacte du problème réel. Ces simplifications sont illustrées ci-après sur les cas courants en dynamique.

Exemple 1 :

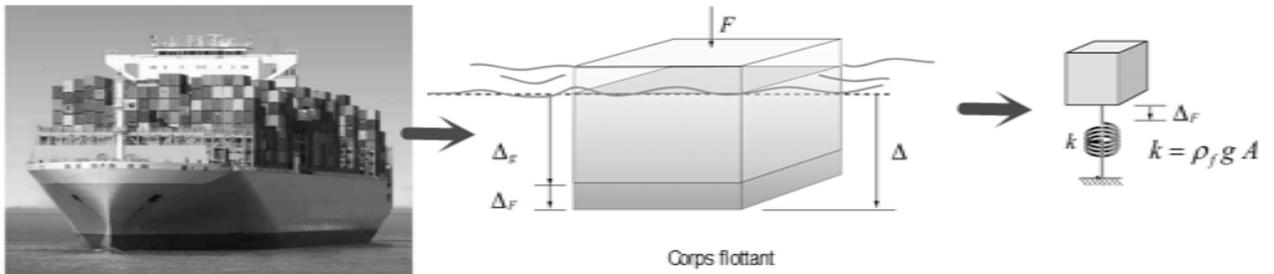


Figure II.29. Modélisation d'un bateau cargo.

Exemple 2 :

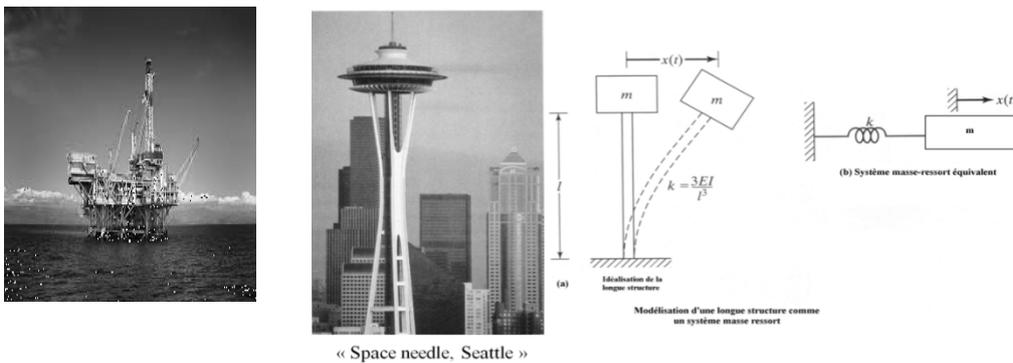


Figure II.30. Modélisation d'une plate forme offshore ou château d'eau.

Exemple 3 :

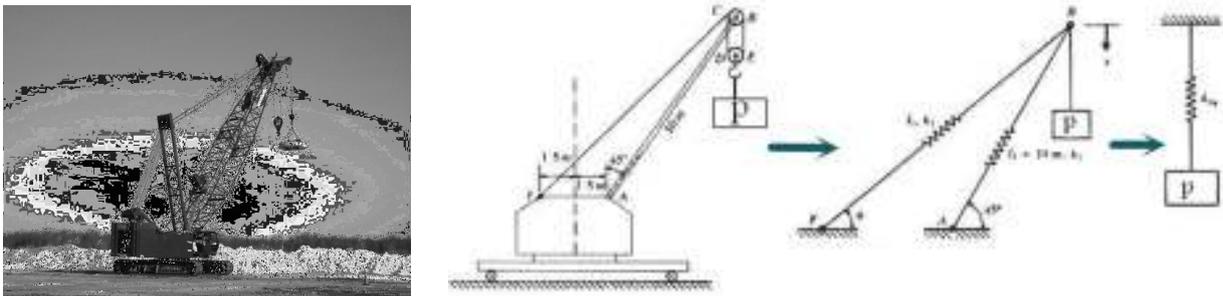


Figure II.31. Modélisation d'une grue.

Chapitre II :
Exemple 4 :

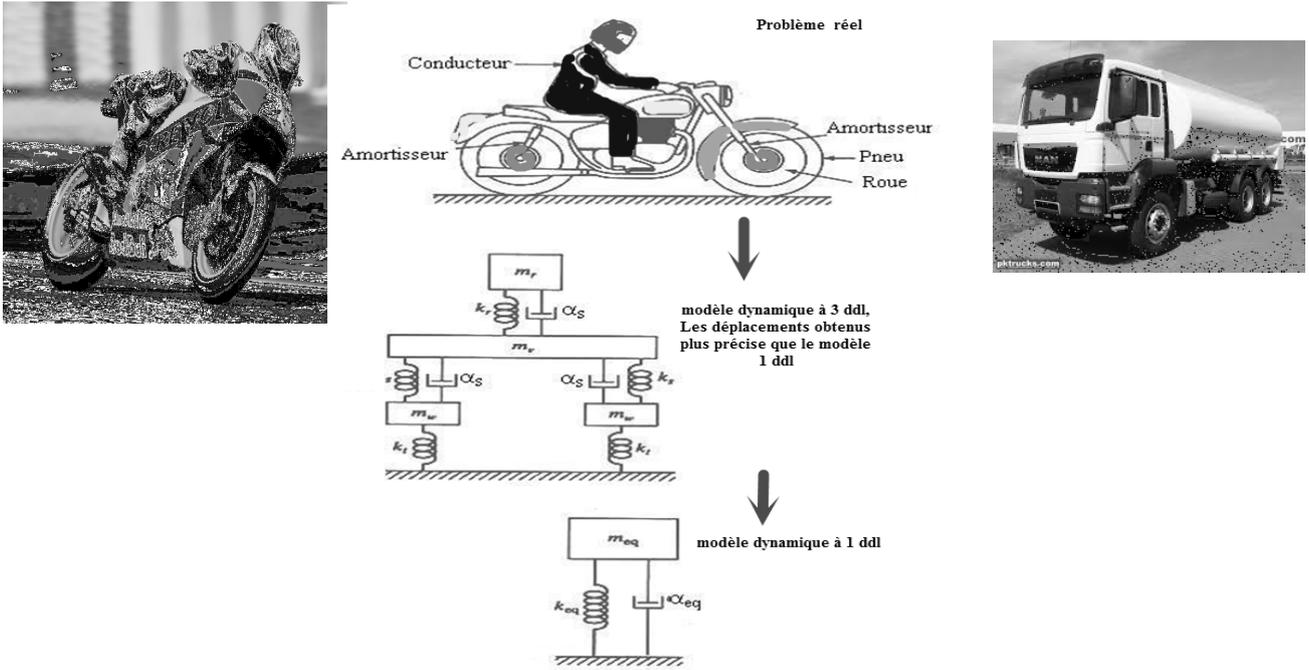


Figure II.32. Modélisation d'un véhicule.

Exemple 5 :

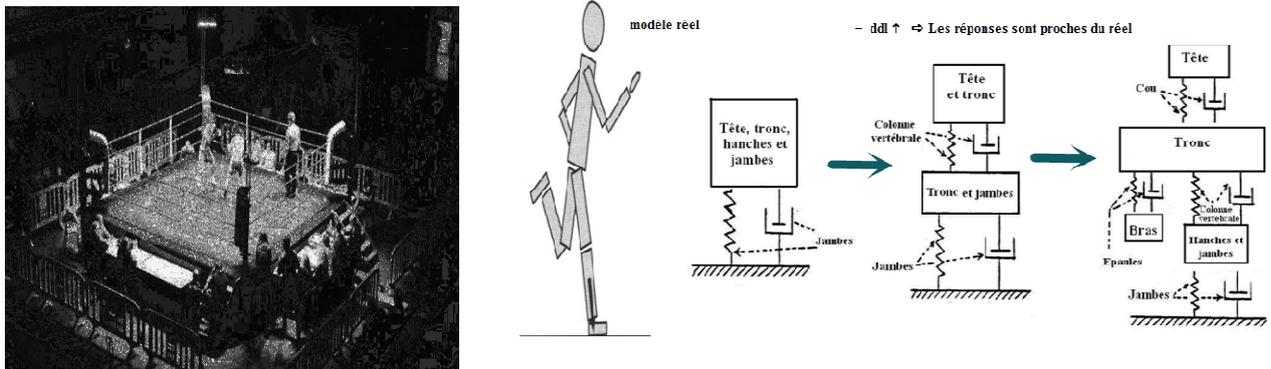


Figure II.33. Modélisation d'un être humain.

Exemple 6 :

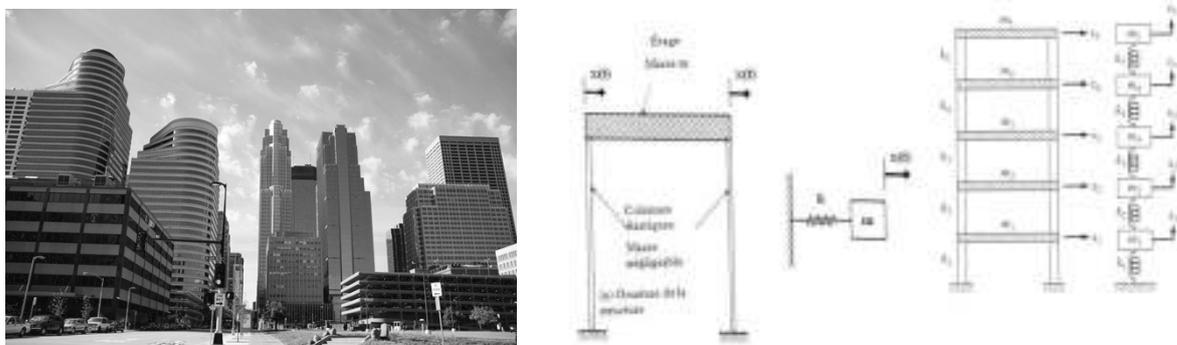


Figure II.34. Modélisation d'une gratte ciel.

Chapitre II :
Exemple 7 :

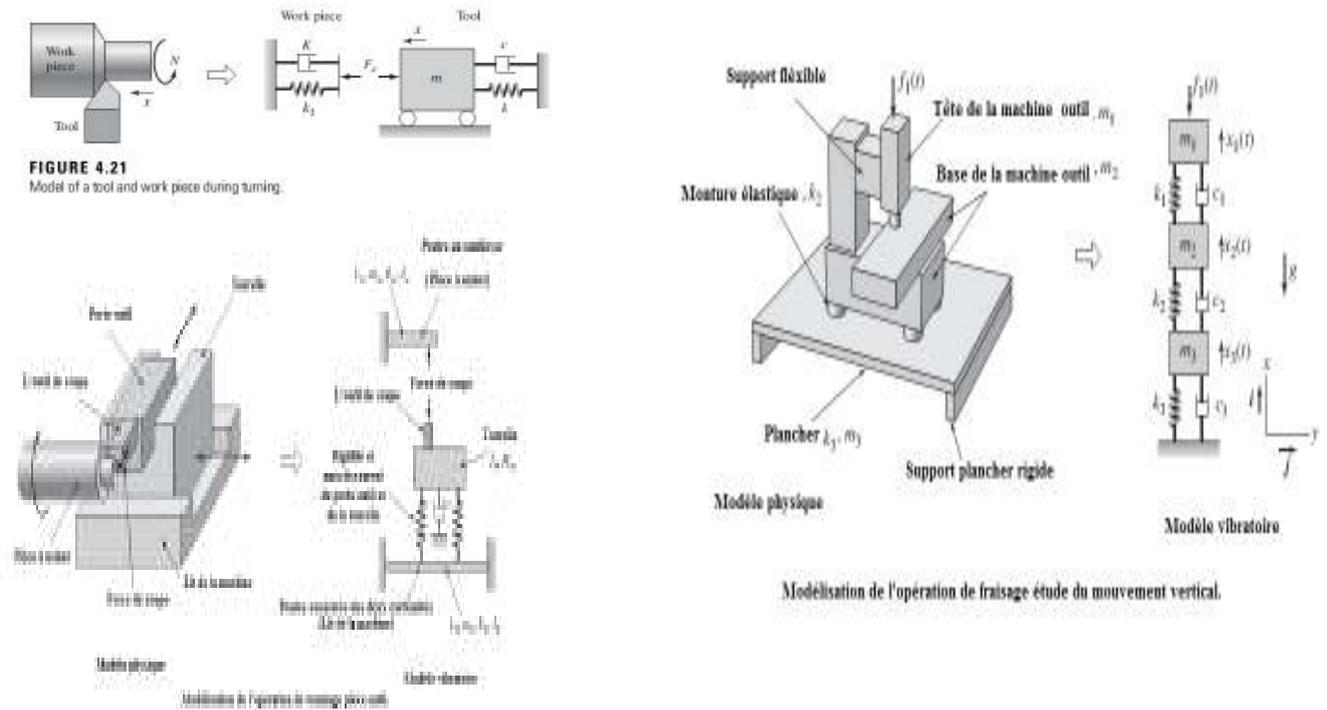


Figure II.35. Modélisation des machines à outils.

1. L'objectif de la dynamique des structures :

L'objectif essentiel est de déterminer ou de vérifier la stabilité de la structure sous l'effet des charges dynamique (les charges varient et sont fonction du temps et de l'espace), ou les forces d'inertie produites jouent un rôle significatif dans la réponse.

On doit déterminer en premier lieu les déplacements dynamiques :

Pour déterminer les déplacements dynamiques on doit résoudre l'équation différentielle du mouvement, qui est une équation différentielle de 2^{ème} ordre dans la plupart des cas réels.

Et par la suite en déduire les contraintes dynamiques et enfin la contrainte totale.

$$\sigma_t = \sigma_s + \sigma_d \quad (II.1)$$

σ_t : contrainte totale ; σ_s : contrainte statique ; σ_d : contrainte dynamique.

En effet, dynamiquement la ruine d'une structure est peut être causée par un dépassement des contraintes dynamiques ou aussi et c'est le cas le plus dangereux par le phénomène de résonance (exemple le pont de Tacoma USA) (voire Figure II.36).

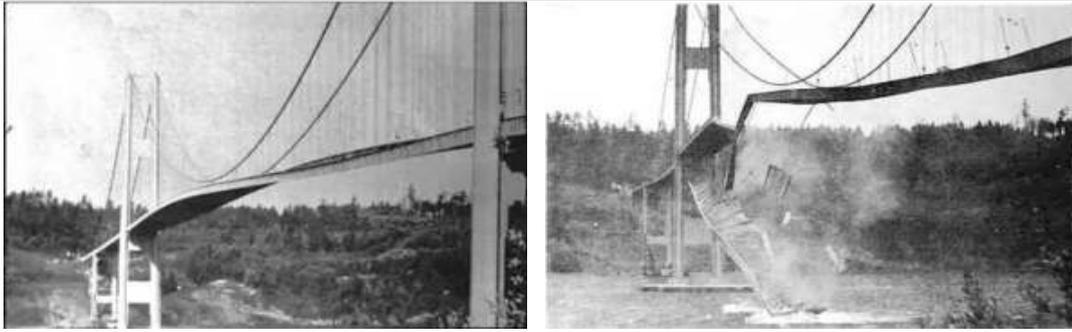


Figure II.36. Le pont de TAKOMA avant et après la ruine.

2. Caractéristiques fondamentaux d'un problème dynamique :

a. La variation dans le temps :

Un problème est dit « dynamique » quand sa réponse $x(t)$ provoquée par une charge dynamique est évolue dans le temps, d'une manière périodique ou non périodique. Le terme dynamique signifie alors la variation dans le temps.

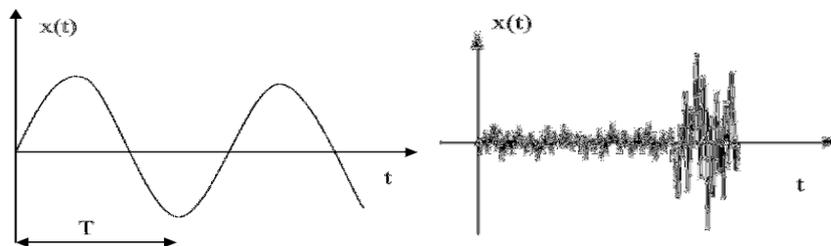


Figure II.37. Charge périodique et apériodique.

b. La force d'inertie

L'application d'une charge dynamique contribue à l'apparition d'une force d'inertie :

$$F_i(t) = m \cdot \ddot{x} \dots\dots\dots(II.2)$$

La Figure II.38 illustre une distribution plus fondamentale encore entre les problèmes statiques et dynamiques. Si une barre simple est soumise à une charge statique P , le moment fléchissant M et l'effort tranchant T et la déformation dépendent directement de la charge donnée et se calcul en fonction de P à l'aide des principes bien établis de l'équilibre des forces. Mais si la charge $P(t)$ est appliquée dynamiquement, les déplacements de la barre correspondent à des accélérations qui produisent des forces d'inerties opposées à ces mêmes accélérations. Le moment fléchissant M et l'effort tranchant T de la barre considérée doivent équilibrer non seulement la force extérieur appliquée, mais encore les forces d'inertie qui résultent les accélérations de la barre.



Figure II.38. L'apparition de force d'inertie sous l'effet d'une charge dynamique.

C'est un phénomène physique très dangereux qui se produit lorsque la pulsation de la charge dynamique sera égale ou s'approche de la pulsation propre de la structure qui est donnée par l'équation suivante :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \dots\dots\dots(\text{II.3})$$

m : la masse totale ; **K** : la rigidité de la structure ; ω_0 : pulsation propre du système.

Dans la structure l'effet la plus dangereux de la résonance c'est qu'une charge petit peut causée la ruine de structure par ce que sa pulsation s'approche de la pulsation propre de la structure.

II.4. Types de chargements externes :

A chaque type des actions des chargements agissants sur les structures correspond un mode de caractérisation et une méthode de résolution la mieux appropriée.

- Les chargements périodiques : qui se répètent dans le temps et gardent le même effet dans le temps pendant un très grand nombre de cycles, le plus simple est le chargement sinusoidale (machine tournante sur un socle produisant un battement), à d'autres charges complexes (rotation de l'hélice hydrodynamique d'un bateau),
Exemple : Machine tournante dans un bâtiment.

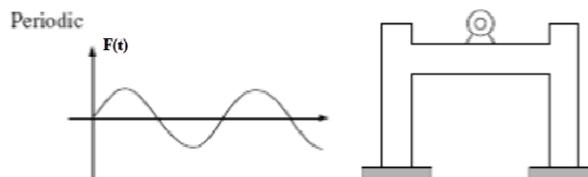


Figure II.39. Chargement harmonique simple.

Exemple : Hélice à l'arrière d'un navire.

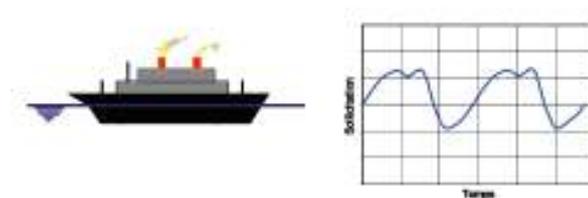


Figure II.40. Chargement périodique complexe anharmonique.

- Les chargements non périodiques de courte durée (impulsion ou explosion d'une bombe) ou des chargements sismiques (tremblement de terre)- ce type de chargement est limité dans le temps.

Exemple : Explosion d'une bombe au voisinage d'un bâtiment.

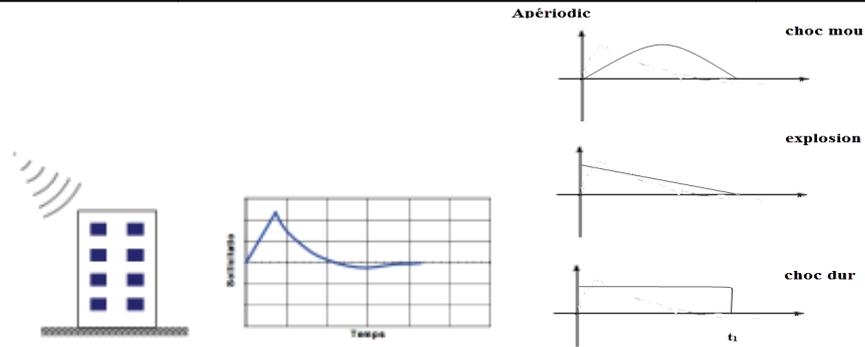


Figure II.41. Chargement apériodique impulsif (avion de chasse supersonique passe au dessus d'un bâtiment).

Exemple : secousse sismique sur un château d'eau.

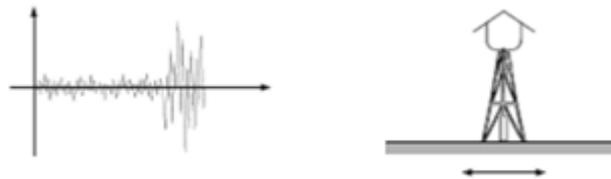


Figure II.42. Chargement apériodique quelconque.

Chargement aléatoire :

Beaucoup des chargements sollicitant les structures ne sont généralement connus que par leur valeur moyenne. Il s'agit typiquement des mouvements vibratoires engendrés par le trafic ferroviaire ou routier, le vent.... La sollicitation est aléatoire. La réponse de la structure à des chargements aléatoires fait l'objet de la dynamique stochastique qui ne sera pas abordée dans ce cours.

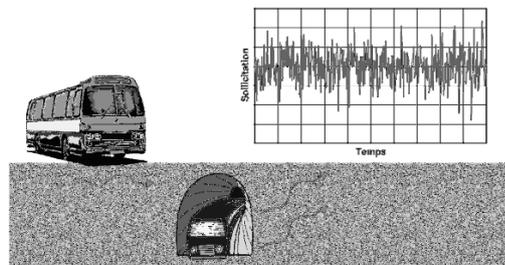


Figure II.43. Chargement aléatoire.

II.5. MISE EN EQUATION D'UN PHENOMENE DYNAMIQUE

La mise en équation d'un problème dynamique est l'une des étapes les plus délicates de l'analyse de la réponse d'une structure. Plusieurs techniques, qui seront utilisées indifféremment dans la suite du cours, sont résumées ci-après. Elles font appel soit à des quantités vectorielles, soit à des grandeurs scalaires.

a) La formulation directe

La formulation est connue sous le nom de seconde loi de Newton, ou loi fondamentale de la dynamique. Généralement ce torseur comporte six composantes : les forces suivant les trois directions des axes du référentiel et les moments autour des trois axes.

b) Méthode des puissances virtuelles

Cette méthode est particulièrement bien adaptée à la mise en équation des milieux continus pour lesquels masse et raideur sont distribuées dans tout le système.

c) Formulation énergétique - principe de Hamilton

Cette formulation, à l'opposé de la méthode directe, ne fait intervenir que des grandeurs scalaires.

Désignant par T l'énergie cinétique du système, U son énergie potentielle définie par $F_c = -\overrightarrow{grad} U$ où F_c représentent les forces conservatives, W_{nc} le travail des forces non conservatives, telles les forces d'amortissement, le principe de Hamilton stipule que pour tout intervalle de temps $[t_1, t_2]$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}dt = 0 ; \dots\dots\dots (II.4)$$

On aboutira aux mêmes équations de Lagrange.

Il convient de réaliser que toutes les méthodes exposées ci-dessus sont équivalentes et conduisent aux mêmes équations d'équilibre. Le choix de la méthode la mieux appropriée dépend du problème à traiter.

La méthode directe est plus intuitive mais se révèle de mise en œuvre difficile pour les systèmes complexes du fait de l'utilisation de grandeurs vectorielles.

La méthode énergétique, du fait de l'utilisation de grandeurs purement scalaires, ou celle des puissances virtuelles se révèlent très puissantes et simples de mise en œuvre. Elles constituent le fondement des méthodes numériques, telle la méthode des éléments finis.

II.5.1. Le modèle dynamique élémentaire

Le modèle dynamique à 1 degré de liberté est constitué d'un bloc rigide, de masse M connecté à un ressort de rigidité k [N/m] et un amortisseur de coefficient c [N.S/m], il est sollicité par une force (chargement externe) $F(t)$ variable dans le temps. Le seul mouvement autorisé pour l'oscillateur est le déplacement horizontal, $u(t)$, de la masse.

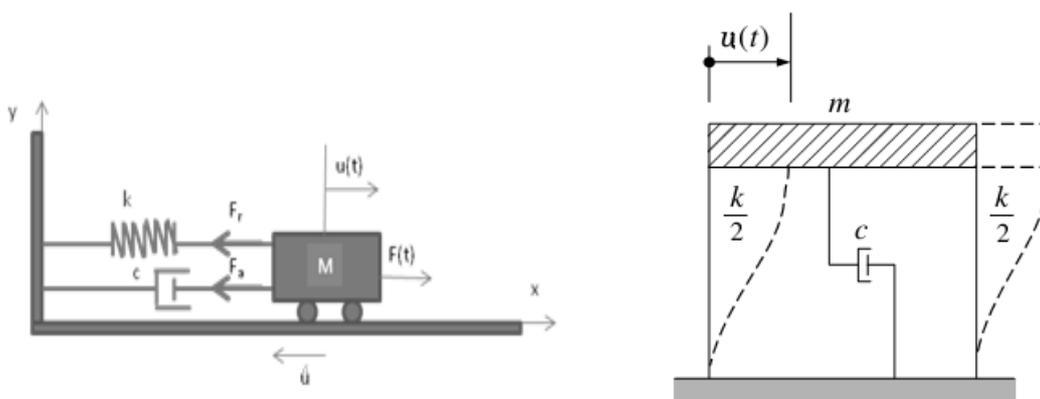


Figure II.44. Schéma du modèle dynamique élémentaire.

II.5.2. LOI DE COMPORTEMENT DE L'OSCILLATEUR

La force de rappel F_r peut ne dépendre que du déplacement $u(t)$. Si à tout instant il y a proportionnalité entre la force et le déplacement, l'oscillateur est élastique linéaire. Ce cas est typiquement celui d'un ressort.

$$F_r = k \cdot u(t) = k \cdot u \dots \dots \dots (II.5)$$

Un amortisseur visqueux linéaire est caractérisé par une relation linéaire entre la force développée dans l'amortisseur et la vitesse relative des deux extrémités de celui-ci :

$$F_a = c \cdot \dot{u}(t) = k \cdot \dot{u} \dots \dots \dots (II.6)$$

II.5.3. EQUATIONS DE L'ÉQUILIBRE DYNAMIQUE

Par projection de toutes les forces agissantes sur la masse M on trouve : $F_a + F_r = F(t) - F_i \dots \dots \dots (II.7)$

F_i est la force d'inertie ; $F_i = M \cdot \ddot{u} \dots \dots \dots (II.8)$

On aboutit finalement à l'équation différentielle du mouvement : $M\ddot{u} + c\dot{u} + ku = F(t) \dots \dots \dots (II.9)$

a) Formulation réduite de l'équation d'équilibre :

Divisant les deux membres de cette équation par M , on obtient la formulation réduite de l'équation d'équilibre :

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F(t)}{M} \dots \dots \dots (II.10)$$

b) Grandeurs caractéristiques :

L'écriture précédente montre que l'équation d'équilibre fait intervenir les deux grandeurs fondamentales suivantes caractérisant le modèle dynamique élémentaire :

- **pulsation propre**

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ [rd/s]} \dots \dots \dots (II.11)$$

Ou, de façon équivalente, **la fréquence propre** :

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M}} \text{ [Hz] ou [1/s]} \dots \dots \dots (II.12)$$

Ou **la période propre** :

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0} \text{ [s]} \dots \dots \dots (II.13)$$

- **pourcentage d'amortissement critique**

$$\zeta = \frac{c}{2M\omega_0} = \frac{c}{2\sqrt{kM}} \dots \dots \dots (II.14)$$

II.6. Dynamique des structures libres

Les vibrations libres sont solutions de l'équation :

$$\ddot{u} + 2\zeta \omega_0 \dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \dots \dots \dots (II.15)$$

Sous certaines **conditions initiales** pour la vitesse et le déplacement.

La solution générale de l'équation est recherchée sous la forme :

$$u(t) = Ae^{st} \dots \dots \dots (II.16)$$

Reportant dans l'équation différentielle, l'inconnue s doit satisfaire l'équation caractéristique :

$$s^2 + 2\zeta \omega_0 s + \omega_0^2 = 0, \dots \dots \dots (II.17)$$

dont la solution dépend du signe du déterminant :

$$\Delta = \omega_0^2 (\zeta^2 - 1), \dots \dots \dots (II.18)$$

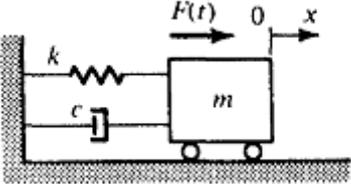
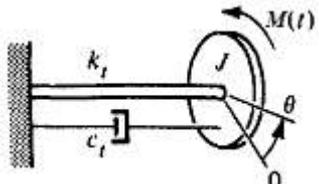
qui lui-même dépend de la valeur de ζ .

On distinguera trois cas possibles :

- structure dynamique non amorti $\zeta=0$ ou à amortissement sous-critique $\zeta < 1$
- structure dynamique à amortissement critique $\zeta=1$,
- structure dynamique à amortissement sur-critique $\zeta > 1$.

Tout en notant que le cas de l'amortissement sous-critique est celui pertinent pour la majorité des systèmes physiques rencontrés dans la pratique.

Similitude entre le mouvement en translation et le mouvement de rotation :

| Structure | En mouvement rectiligne | En mouvement de rotation |
|-----------|---|--|
| |  <p>Force d'élasticité : $F_e = k \cdot x$ Force d'amortissement : $F_a = c \cdot \dot{x}$ Force d'inertie : $F_i = m \cdot \ddot{x}$</p> <p>Equation du mouvement Réponse de la structure</p> $m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$ $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ |  <p>Couple du ressort : $M_t = k_t \cdot \theta$ Couple d'amortissement : $M_a = c_t \cdot \dot{\theta}$ Couple d'inertie : $M_i = J \cdot \ddot{\theta}$</p> $J\ddot{\theta} + c_t\dot{\theta} + k_t\theta = M(t)$ $\theta(t) = \theta_h(t) + \theta_p(t)$ |

Exemple :

Le disque ayant un diamètre D et un épaisseur h , à l'extrémité d'un arbre de longueur l , son diamètre est d et son module d'élasticité transversale (de cisaillement) est G .

La masse du disque est $m = \rho h \frac{\pi D^2}{4}$,

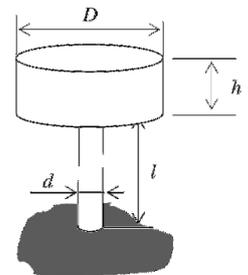


Figure II.45. Disque en torsion.

le moment d'inertie est $J_\theta = \frac{mD^2}{8}$, le coefficient de rigidité est $k_t = \frac{G\pi d^2}{32l}$.

a/ Structure dynamiques libres non amorti « $\xi=0$ »

L'équation différentielle se réduit à : $\ddot{u} + \omega_0^2 u = 0$;.....(II.19)

dont la solution s'écrit pour des conditions initiales du déplacement $u(0)$ et de la vitesse $\dot{u}(0)$:

$$u(t) = \frac{\dot{u}(0)}{\omega} \sin \omega t + u(0) \cos \omega t \dots\dots\dots(II.20)$$

Ou de façon équivalente : $u(t) = \rho \cos(\omega t - \varphi)$;.....(II.21)

ρ désigne l'amplitude de la réponse et θ la phase : $\rho = \sqrt{u(0)^2 + (\frac{\dot{u}(0)}{\omega})^2}$;.....(II.22)

Et $\varphi = \arctg \frac{\dot{u}(0)}{\omega u(0)}$;.....(II.23)

Où bien en faisant intervenir **les conditions initiales** comme suit :

$$u(0) = x_0 \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{x}_0 \rightarrow \rho = \sqrt{x_0^2 + (\frac{\dot{x}_0}{\omega_0})^2} \text{ et } \varphi = \arctg \left(\frac{\omega_0 x_0}{\dot{x}_0} \right).$$

La Figure II.46. représente la réponse de la structure dynamique libre sans amortissement au cours du temps. Celle-ci se reproduit à l'identique au bout d'un intervalle de temps égal à la période propre $T_0 = 2\pi/\omega$ de la structure et se prolonge indéfiniment avec une amplitude maximale égale à ρ .

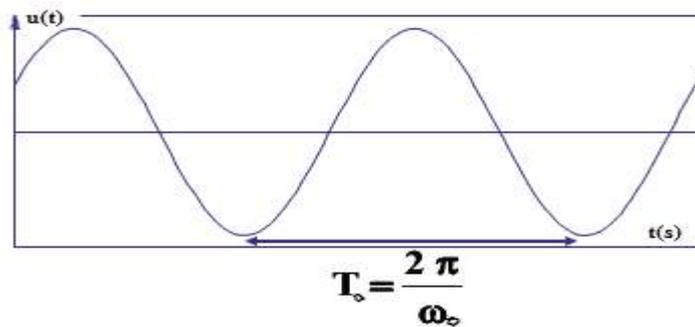
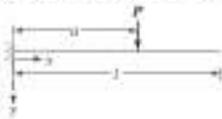


Figure II.46. Réponse d'une structure dynamique libre non amorti.

Les deux sections suivantes sont utiles pour être utilisé pour déterminer les différentes rigidités des éléments communs :

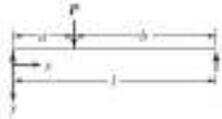
a.1 La flèche pour des poutres et des plaques

Poutre en porte à faux-caudiller



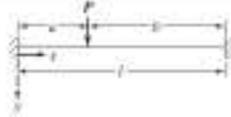
$$f(x) = \begin{cases} \frac{Px^2}{6EI}(3x - a); & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa^2}{6EI}(3x - a); & a \leq x \leq l \end{cases}$$

Poutre sur deux appuis



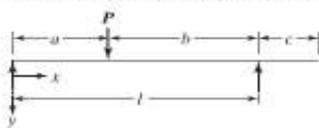
$$f(x) = \begin{cases} \frac{Pbx}{6EI}(l^2 - x^2 - b^2); & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa(l-x)}{6EI}(2lx - x^2 - a^2); & a \leq x \leq l \end{cases}$$

Poutre à deux extrémités encastées



$$f(x) = \begin{cases} \frac{Pb^2x^2}{6EI^3}[3al - a(3x + b)]; & 0 \leq x \leq a \\ \frac{Pa^2(l-x)^2}{6EI^3}[3bl - (l-x)(3b + a)]; & a \leq x \leq l \end{cases}$$

Poutre sur deux appuis avec surplomb



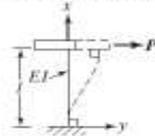
$$y(x) = \begin{cases} \text{les mêmes résultats que d'une poutre sur deux appuis} \\ \text{pour } 0 \leq x \leq a \text{ et } a \leq x \leq l \\ \frac{Pa}{6EI}(l^2 - a^2)(x - l); & l \leq x \leq l + c \end{cases}$$

Poutre sur deux appuis avec une charge en surplomb



$$y(x) = \begin{cases} \frac{Pax}{6EI}(x^2 - l^2); & 0 \leq x \leq l \\ \frac{P(x-l)}{6EI}[a(3x-l) - (x-l)^2]; & l \leq x \leq l + c \end{cases}$$

Poutre à deux extrémités encastées avec déplacement d'une extrémité



$$y(x) = \frac{P}{12EI}(3lx^2 - 2x^3)$$

Plaque circulaire sur appuis



$$y_{\text{centre}} = \frac{Pr^2(3 + \nu)}{16\pi D(1 + \nu)}$$

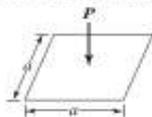
Où $D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)}$, t = épaisseur de la plaque,
et ν = coefficient de Poisson.

Plaque circulaire à extrémités encastées



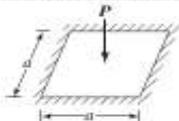
$$y_{\text{centre}} = \frac{Pr^2}{16\pi D}$$

Plaque carrée sur appuis de tous les côtés



$$y_{\text{centre}} = \frac{\alpha Pa^2}{Et^3} \text{ avec } \alpha = 0.1267 \text{ pour } \nu = 0.3$$

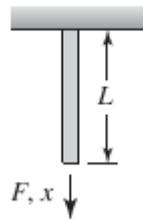
Plaque carrée encastée de tous les côtés



$$y_{\text{centre}} = \frac{\alpha Pa^2}{Et^3} \text{ avec } \alpha = 0.0611 \text{ pour } \nu = 0.3$$

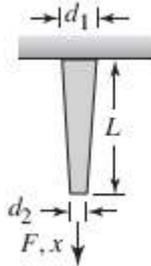
a.2. La constante de rigidité pour des éléments élastiques communs :

1. tige ou câble chargé axialement:



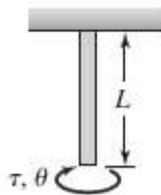
$$k = \frac{AE}{L}$$

2. tige conique chargée axialement :



$$k = \frac{\pi E d_1 d_2}{4L}$$

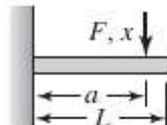
3. tige circulaire creuse en torsion :



$$k_t = \frac{GI}{L}$$

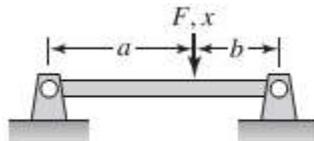
$$I = \frac{\pi(d_{\text{ext}}^4 - d_{\text{int}}^4)}{32}$$

4. Poutre cantilever « en porte à faux » :



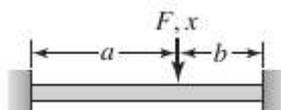
$$k = \frac{3EI}{a^3}; 0 < a \leq L$$

5. Poutre à deux extrémités articulées :



$$k = \frac{3EI(a + b)}{a^2 b^2}$$

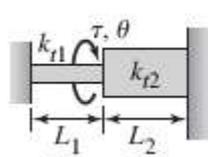
6. Poutre à deux extrémités encastées :



$$k = \frac{3EI(a + b)^3}{a^3 b^3}$$

Chapitre II :

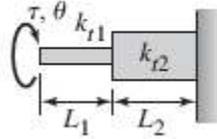
7. Deux tiges circulaires en torsion à deux extrémités encastées :



$$k_{te} = k_{t1} + k_{t2}$$

$$k_{ti} = \frac{G_i I_i}{L_i}$$

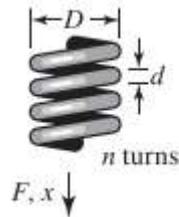
8. Deux tiges circulaires en torsion à une extrémité libre:



$$k_{te} = \left(\frac{1}{k_{t1}} + \frac{1}{k_{t2}} \right)^{-1}$$

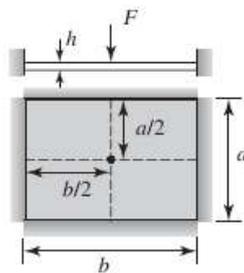
$$k_{ti} = \frac{G_i I_i}{L_i}$$

9. Ressort hélicoïdal :



$$k = \frac{Gd^4}{8nD^3}$$

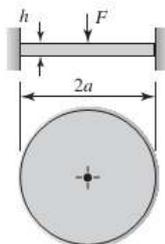
10. Plaque rectangulaire encastée, à épaisseur constant, charge appliquée au centre de la plaque:



$$k = \frac{Eh^3}{12\alpha a^2(1-\nu^2)}; \nu = \text{Constante de Poisson}$$

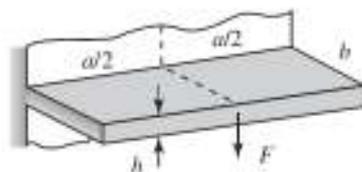
| $\frac{b/a}{}$ | α |
|----------------|----------|
| 1.0 | 0.00560 |
| 1.2 | 0.00647 |
| 1.4 | 0.00691 |
| 1.6 | 0.00712 |
| 1.8 | 0.00720 |
| 2.0 | 0.00722 |

11. Plaque circulaire encastée, à épaisseur constant, charge appliquée au centre de la plaque :



$$k = \frac{4.189Eh^3}{a^2(1-\nu^2)}; \nu = \text{Constante de Poisson}$$

12. Plaque en porte à faux, à épaisseur constant, force au centre de l'arrête :



$$k = \frac{0.496Eh^3}{b^2(1-\nu^2)}; \nu = \text{Constante de Poisson}, a \gg b$$

Exemple 1: Détermination de la rigidité d'une table métallique

Une table lourde est soutenue par des pieds plats en acier, sa période naturelle en mouvement horizontal est de 0,4 [s]. Lorsqu'une plaque qui pèse 30 [kg] est montée à sa surface, la période naturelle en mouvement horizontal est portée à 0,5[s]. Quelle est la constante de ressort effective et la masse de la table ?

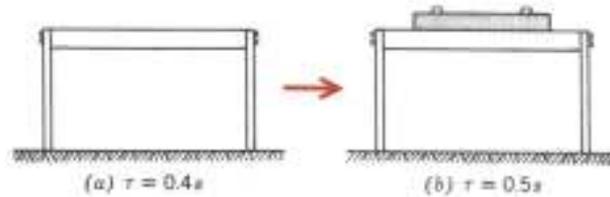


Figure II.47. Table en vibrations horizontales.

La masse de la table est: 53,3 [kg] et la rigidité du ressort équivalent est:13 160 [N/m].

Exemple 2: Calcul du moment d'inertie d'un arbre d'un turboréacteur

L'arbre possède une masse m et un rayon externe de R , attaché à deux fils de longueur h qui sont fixés au plafond d'un atelier.après avoir subis des petites oscillations. Afin de déterminer la fréquence des oscillations, on compte les allers et les retours avec enregistrement du temps à l'aide d'un chronomètre.

Déterminer le moment d'inertie de l'arbre du turboréacteur?

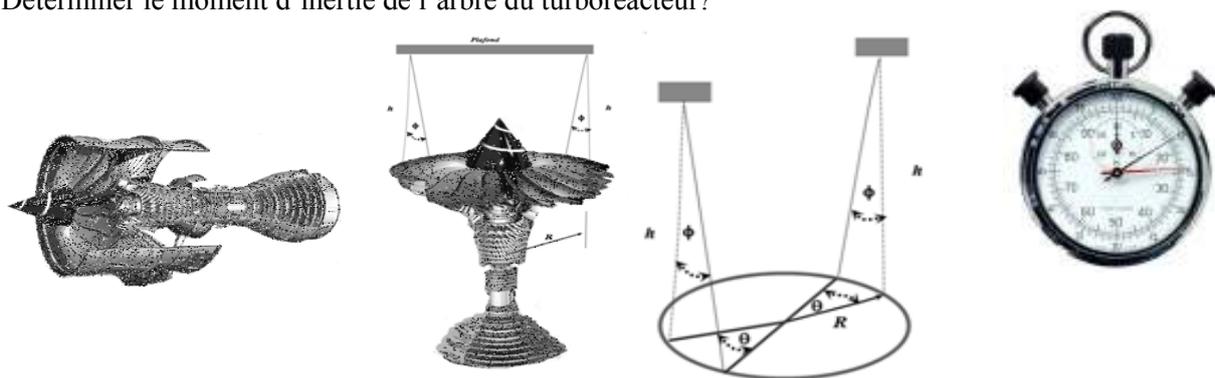


Figure II.48. Mesure du moment d'inertie d'un turboréacteur.

Puisque l'arbre est maintenu horizontal par les deux fils attachés au plafond de longueur connu h , on le fait subir des petites oscillations autour de son axe, et on enregistre le nombre des allers et des retours pendant un laps de temps à l'aide d'un chronomètre ce qui permet de déterminer la fréquence f ($\text{Hz} = \text{nombre des coups pendant une seconde}$), et puisque la 2^{ème} loi de Newton en dynamique nous permet d'écrire :

$$-(T/2).R. \sin \varphi = I_z \ddot{\theta}$$

La force T est la tension dans les fils et I_z est le moment d'inertie autour de l'axe OZ.

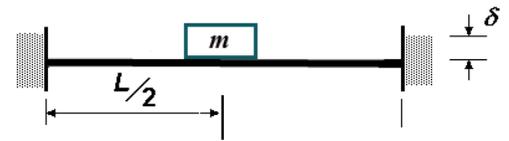
Ainsi la relation existante entre φ et θ est : $h. \sin \varphi = R. \sin \theta$

et pour des petites oscillations on peut faire l'approximation de : $\sin \theta = \theta$, et en fin on aura :

$$I_z = \frac{mgR^2}{64 \pi^2 f^2 h};$$

Exemple 3 : Calcul du module de Young à l'aide d'une mesure d'une pulsation propre

Une poutre de soutien de section carrée 5x5 [mm²] et de longueur 1[m], portant une masse de 2,3 [kg] au milieu, a une fréquence de vibration transversale de 30 [rd/s].



Déterminer le module d'élasticité de Young de la poutre ?

Figure II.49. Poutre avec deux extrémités fixes.

En négligeant le poids propre de la poutre, la fréquence naturelle de la vibration transversale de la poutre peut être exprimée comme suit: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ [rd/s] ; où : la rigidité de la poutre de soutien est :

$$k = \frac{192 EI}{L^3}$$

Où : E est le module d'élasticité longitudinal de Young du matériau de la poutre et I est le moment polaire de la section de la poutre, $I = \frac{1}{12} (5 \times 10^{-3})(5 \times 10^{-3})^3 = 0,5208 \times 10^{-10} [m^4]$;

Comme $m=2,3$ [kg], $L=1$ [m] et : $\omega_0 = 30 [\frac{rd}{s}] \rightarrow k = \frac{192 EI}{L^3} = m \omega_0^2 \rightarrow$

$$E = \frac{m \omega_0^2 L^3}{192 I} = \frac{(2,3)(30)^2(1)^3}{192 (0,5208 \times 10^{-10})} = 207,0132 \times 10^9 [\frac{N}{m^2}].$$

Cela peut indiquer que le matériau de la poutre est probablement un acier au carbone.

Exemple 4 : Calcul de la rigidité équivalente d'une grue

Le bras de levier AB de la grue représentée sur la figure II.50 (a) est une barre d'acier uniforme d'une longueur de 10 m et d'une section de 2500 [mm²]. Un poids P est suspendu pendant que la grue est à l'arrêt. Le câble CDEBF est en acier et a une section transversale de 100 [mm²]. En négligeant l'effet du câble CDEB.

Trouvez la constante de ressort équivalente du système dans le sens vertical ?

La constante du ressort équivalente peut être trouvée en utilisant l'équivalence des énergies potentielles des deux systèmes. Puisque la base de la grue est rigide, le câble et bras de levier peuvent être considérés comme étant fixés aux points Fet A, respectivement. De plus, l'effet du câble CDEB est négligeable; par conséquent, on peut supposer que le poids P passe par le point B, comme le montre la figure II.50 (b).

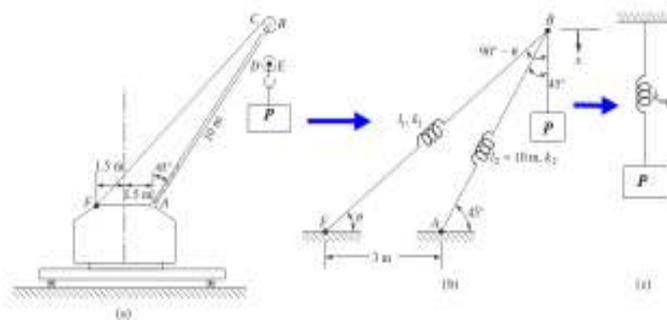


Figure II.50. Grue soulevant une charge.

Chapitre II :

Le déplacement vertical x du point B provoquera une déformation du ressort (bras de levier) et une déformation du ressort (câble). La longueur du câble FB, L_1 , est donnée par la figure II.50 (b).

$$L_1^2 = (3)^2 + (10)^2 - 2(3)(10) \cos 135^\circ = 151,426 \Rightarrow L_1 = 12,3055 \text{ [m]},$$

L'angle θ qui satisfait la relation, est : $L_1^2 + (3)^2 - 2(L_1)(3) \cos \theta = 10^2$, $\cos \theta = 0,8184$, $\theta = 35,0736[^\circ]$.

L'énergie potentielle totale (U) stockée dans les ressorts k_1 et k_2 peut être exprimée par :

$$U = \frac{1}{2} k_1 [x \cos (90^\circ - \theta)]^2 + \frac{1}{2} K_2 [x \cos(90^\circ - 45^\circ)]^2,$$

$$\text{Où : } k_1 = \frac{A_1 E_1}{L_1} = \frac{(100 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{12,3055} = 1,6822 \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right];$$

$$\text{Et : } k_2 = \frac{A_2 E_2}{L_2} = \frac{(2500 \times 10^{-6})(207 \times 10^9)}{10} = 5,1750 \times 10^7 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right];$$

Comme le ressort équivalent dans la direction verticale subit une déformation x , l'énergie potentielle du ressort équivalent (U_{eq}) est donnée par : $U_{eq} = \frac{1}{2} k_{eq} x^2$

En posant $U = U_{eq}$, on obtient la constante de ressort équivalente de la structure, comme:

$$k_{eq} = k_1 \sin^2 \theta + k_2 \sin^2 45^\circ = k_1 \sin^2 35,0736^\circ + k_2 \sin^2 45^\circ = 26,4304 \times 10^6 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}} \right].$$

Exemple 5 : Calcul du ressort équivalent

Un mécanisme constitué de plusieurs arbres avec différents matériaux et formes pour simplifier son étude son réduction à un disque et un seul arbre de rigidité équivalente en torsion.

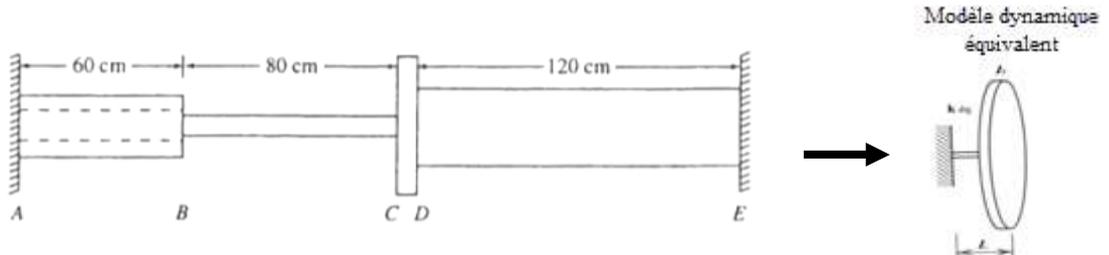


Figure II.51. Mécanisme avec des arbres de différents matériaux et formes.

Si les données numériques sont : AB : arbre en acier avec cœur en aluminium,

$$R_{1AB} = 20 \text{ [mm]}, R_{2AB} = 40 \text{ [mm]}.$$

BC : arbre plein en acier, $R_{BC} = 18 \text{ [mm]}$, DE : arbre plein en aluminium, $R_{DE} = 25 \text{ [mm]}$.

$$G_{ac} = 80 \times 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]}; G_{al} = 40 \times 10^9 \text{ [N/m}^2\text{]}.$$

- Calculer la rigidité du ressort équivalent ?

$$k_{AB-ac} = \frac{I_{AB-ac} \cdot G_{AB-ac}}{L_{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2} [(0,04 \text{ m})^4 - (0,02 \text{ m})^4] (80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}})}{0,6 \text{ m}} = 5,03 \times 10^5 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rd}} \right];$$

$$k_{AB-al} = \frac{I_{AB-al} \cdot G_{AB-al}}{L_{AB}} = \frac{\frac{\pi}{2} (0,02 \text{ m})^4 (40 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}})}{0,6 \text{ m}} = 1,68 \times 10^4 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rd}} \right];$$

$$k_{BC-ac} = \frac{I_{BC-ac} \cdot G_{BC-ac}}{L_{BC}} = \frac{\frac{\pi}{2} [(0,018 \text{ m})^4] (80 \times 10^9 \frac{\text{N}}{\text{m}})}{0,8 \text{ m}} = 1,65 \times 10^4 \left[\frac{\text{Nm}}{\text{rd}} \right];$$

$$k_{DE-al} = \frac{I_{DE-al} G_{DE-al}}{L_{DE}} = \frac{\frac{\pi}{2} [(0,025 \text{ m})^4] (40 \times 10^9 \frac{N}{m})}{1,2 \text{ m}} = 2,05 \times 10^4 \left[\frac{N.m}{rd} \right];$$

$$L'arbre de rigidité équivalente $k_{AB} = k_{AB ac} + k_{AB al} = 5,20 \times 10^5 \left[\frac{N.m}{rd} \right]$$$

La torsion développée dans les arbres AB et BC est la même, et l'angle de rotation du disque est $\theta_{AB} + \theta_{BC}$, ainsi les arbres AB et BC se comportent comme des ressorts de torsion en série dont la combinaison agit en parallèle avec l'arbre DE, d'où la raideur équivalente est:

$$k_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{k_{AB}} + \frac{1}{k_{BC}}} + k_{DE} = 3,65 \times 10^4 \left[\frac{N.m}{rd} \right].$$

Exemple 6: Détermination de la réponse d'une masse sur une colonne

Considérons le mouvement latéral d'une colonne élastique de longueur L et de rigidité à la flexion EI. La colonne est fixée à une masse rigide m comme indiqué à la Figure II.52., où la masse totale de la colonne est beaucoup plus petite que celle de la masse supportée. Si ρ est la masse volumique de la colonne, A est sa section transversale.

Déterminer la réponse de la structure lorsque la masse supportée est déplacée d'une distance x_0 de sa position d'équilibre ?

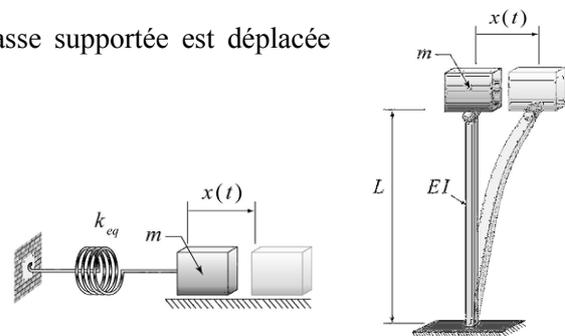


Figure II.52. La colonne élastique et son modèle dynamique.

Puisque le produit $\rho AL \ll m$, alors le modèle dynamique peut être admis, et on aura :

$$k_{eq} = 3EI/L^3 ;$$

La pulsation propre sera : $\omega_0 = \sqrt{3EI / mL^3}$ [rd/s];

La période propre sera : $T_0 = 2\pi \cdot \sqrt{mL^3 / 3EI}$ [s]

La masse avait un déplacement initial de x_0 de sa position d'équilibre avec v_0 ($\dot{x}(0) = 0$ [m/s]), la réponse de la colonne sera : $x(t) = x_0 \cos(\sqrt{\frac{3EI}{mL^3}} t)$ [m].

Exemple 7: Calcul de la position du centre d'inertie d'une biellette

Une biellette de masse de 3,1 [kg] oscille 59 fois en 1 minute, lorsqu'elle est suspendue sur un bord de couteau autour de la surface interne supérieure de la biellette. Si le moment d'inertie est $J_G = 0,0412$ [Kg.m²]. Déterminer la position de son centre d'inertie par rapport à la surface supérieure de la biellette.

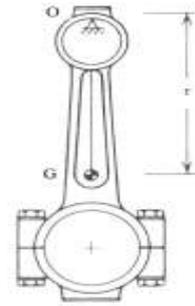


Figure II.53. Biellette en petites oscillations.

Puisque, la fréquence f_0 est 59/60 secondes, sera : $f_0 = 0,98$ [Hz], $\omega_0 = 2\pi f_0 = 6,157$ [$\frac{rd}{s}$]

$\sum M_O = J_O \ddot{\theta} = -m g r \sin \theta$ par approximation : $\sin \theta = \theta$, on aura, la pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m g r}{I_G + m r^2}} ; \text{ qui aboutira par la suite à : } r = 0,185 \text{ [m].}$$

b/ Structure dynamiques libres amorties

- **Structure dynamiques libres a amortissement sous critique « $0 < \zeta < 1$ »**

Ce cas correspond à $\zeta < 1$ et $c < 2M\omega_0$. La solution de l'équation conduit aux deux solutions :

$$s = -\zeta \omega_0 \pm i \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}; \dots \dots \dots (II.24)$$

La quantité ω_D est appelée pulsation propre amortie, $\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}$ [rd/s] ; \dots \dots \dots (II.25)

La réponse de la structure dynamique libre à amortissement sous critique soumis aux mêmes conditions initiales s'écrit :

$$u(t) = \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega u(0)}{\omega_D} \sin(\omega_D t) + u(0) \cos(\omega_D t) \right] e^{-\zeta \omega_0 t} \dots \dots \dots (II.26)$$

Qui peut être écrite, de façon équivalente, en introduisant l'amplitude ρ et la phase θ sous la forme :

$$u(t) = \rho e^{-\zeta \omega_0 t} \cos(\omega_D t - \theta) \dots \dots \dots (II.27)$$

Où bien en faisant intervenir **les conditions initiales** comme suit :

$$u(0) = x_0 \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{x}_0 \Rightarrow \rho = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0 + \zeta \omega_0 x_0}{\omega_D} \right)^2} \text{ et } \theta = \arctg \left(-\frac{\omega_D x_0}{\dot{x}_0 + \zeta \omega_0 x_0} \right).$$

Elle est représentée sur la Figure II.54. en fonction du temps

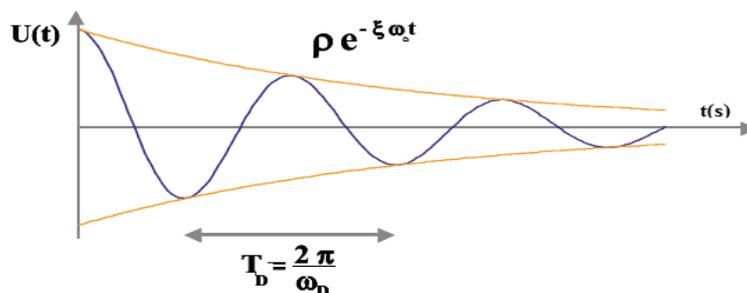


Figure II.54. Réponse d'une structure dynamique libre d'un système à amortissement sous-critique.

Chapitre II :

L'examen de la figure de la réponse montre que la courbe passe par des extrema espacés d'un temps $T_D = 2\pi/\omega_D$; l'amplitude des extrema, égale à $\rho e^{-\zeta\omega_0 t}$, décroît en fonction du temps pour tendre vers 0 au bout d'un temps infini.

Ce retour à l'équilibre s'effectue d'autant plus rapidement, et avec moins d'oscillations, que le pourcentage d'amortissement critique ζ est élevé.

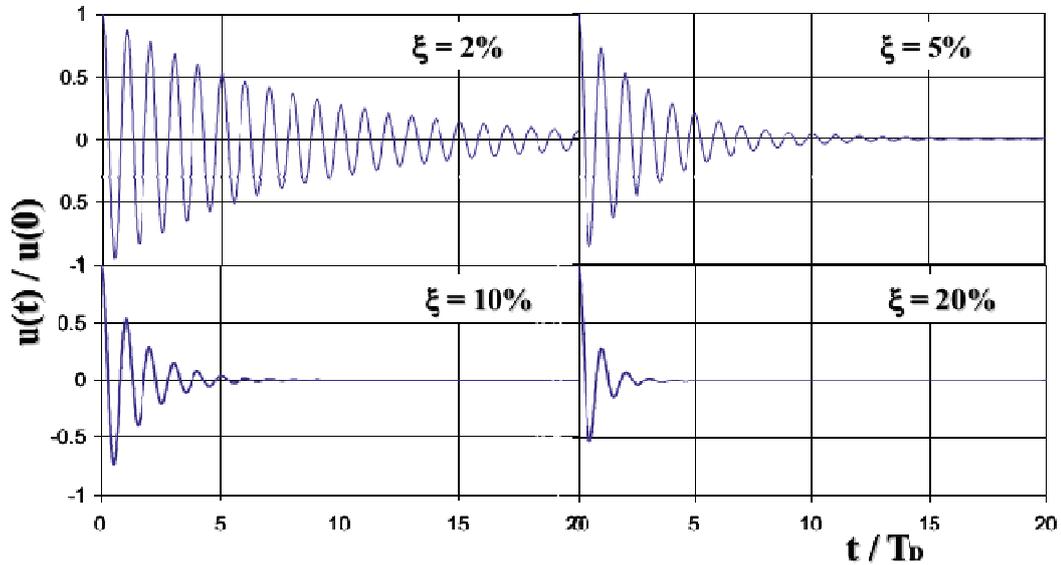


Figure II.55. Influence de l'amortissement sur la réponse d'une structure libre à amortissement sous-critique.

- **Grandeurs caractéristiques :**
- **pseudo période :**

La quantité T_D est appelée période propre amortie ou « pseudo période », $T_D = \frac{2\pi}{\omega_D}$ [s].....(II.28)

- **Le décrément logarithmique**

Si l'on considère deux extrema successifs, de même signe, dans la réponse vibratoire, le rapport des amplitudes est égal à :

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = e^{-2\pi\zeta \frac{\omega_0}{\omega_D}}; \dots\dots\dots(II.29)$$

Prenant le logarithme des deux membres de l'équation précédente, le pourcentage d'amortissement critique équivalent est égal :

$$\delta = Ln \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}; \dots\dots\dots(II.30)$$

La quantité δ est appelée le décrément logarithmique.

Des fois, si on connaît le décrément logarithmique δ expérimentalement on peut en déduire le pourcentage d'amortissement ζ par la relation : $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}$(II.31)

Pour les structures dynamiques à faibles valeurs de ζ (<20%) le décrément logarithmique se réduit à :

$$\delta = 2\pi\zeta; \dots\dots\dots(II.32)$$

La mesure expérimentale de ce décrément logarithmique permet d'accéder au pourcentage d'amortissement critique d'un système, sans nécessairement connaître la valeur de la constante d'amortisseur c.

Chapitre II :

Pour conclure sur l'oscillateur à amortissement sous-critique, on notera que pour les faibles valeurs de ζ (typiquement inférieures à 20%) telles qu'on les rencontre dans la pratique, on peut sans préjudice confondre ω_0 avec ω_D . La Figure II.56. présente la variation ω_0 / ω_D en fonction de ζ qui est représentée par un cercle de rayon unité.

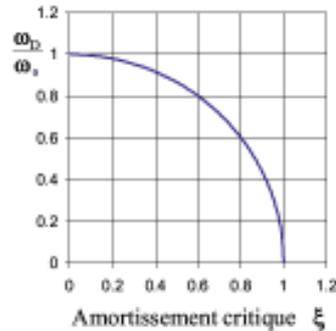


Figure II.56. Variation de la pulsation propre et amortie en fonction de ζ .

• **La constante de temps et le temps de relaxation**

Quelque soit le type de régime, l'amortissement des oscillations dépend du terme exponentielle $e^{-\zeta\omega_0 t}$, $\zeta\omega_0$ étant homogène à l'inverse d'un temps, on pose $\zeta\omega_0$ (τ est une *constante de temps*, chaque fois qu'il s'écoule un intervalle de temps égal à τ , la valeur de l'exponentielle est divisée par 2,7).

En fait, on utilise la quantité τ_r appelée *temps de relaxation* définit par :

$$\tau_r = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2\zeta\omega_0} \text{ (quantité relative à l'énergie).....(II.33)}$$

• **Le facteur de qualité**

On définit le *facteur de qualité* Q par les expressions :

$$Q = \frac{\omega_0}{2\zeta\omega_0} \quad \text{ou} \quad Q = \omega_0 \cdot \tau_r \text{(II.34)}$$

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est grande. Or Q est d'autant plus grand, à ω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de *facteur de qualité*.

Il existe également deux autres définitions de Q liées :

- l'une à l'**énergie** : $Q = -2\pi \frac{E}{\Delta E}$, où $E=E(t_n)$ est l'énergie totale du système à l'instant t_n , et $\Delta E = E(t_n + T_1) - E(t_n)$ est l'énergie dissipée pendant la pseudo-période suivant t_n .
- l'autre à la **bande passante** en pulsation $\Delta\Omega$ ou en fréquence Δf (quantités définies dans la ressource traitant des *oscillations forcées*, Ω_r et f_r désignant respectivement la *pulsation* et la *fréquence à la résonance*) :

$$Q = \frac{\Omega_r}{\Delta\Omega} = \frac{f_r}{\Delta f} \text{ (II.35)}$$

Dans le cas d'un tremblement de terre : $Q=1\ 000$.

Exemple : Un bâtiment métallique à un seul étage est modélisé par une poutre infiniment rigide de masse $M=12$ [tonnes] portée sur deux colonnes sans masse de longueur $L=3$ [m] (Voir la Figure II.57), avec $k=700$ [KN/m].

La structure a été soumise à un test de vibrations libres, son réponse est représentée sur la Figure II.57.

-Déterminer l'expression du déplacement de la masse à tout instant t .

-Calculer ce déplacement à l'instant $t=0.76$ s.

-Déduire la vitesse initiale.

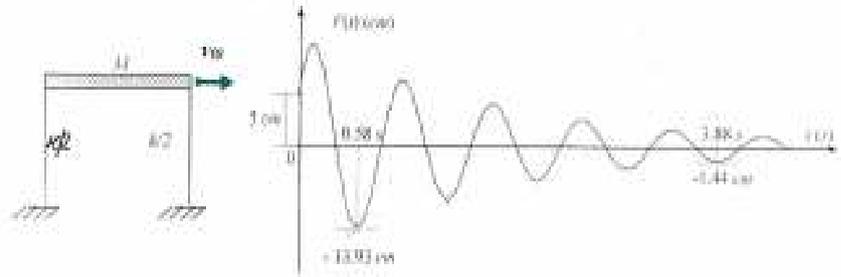


Figure II.57. Bâtiment métallique à un seul étage et son réponse sous test de vibration.

La réponse de la structure libre amortie avec les conditions initiales en déplacement et vitesse, est donnée par :

$$V(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} \left[v(0) \cos \omega_D t + \frac{\dot{V}(0) + \zeta\omega_0 V(0)}{\omega_D} \sin \omega_D t \right]$$

Le terme $B = \frac{\dot{V}(0) + \zeta\omega_0 V(0)}{\omega_D}$;

Du graphe $V(0)=5$ cm ; $T_D = \frac{3,88-0,58}{4} = 0,825$ [s] $\rightarrow \omega_D = \frac{2\pi}{T_D} = 7,61$ [$\frac{rd}{s}$],

Du graphe aussi on peut déterminer le décrément logarithmique : $\delta = \frac{1}{4} \ln \frac{13,93}{1,44} = 0,56$,

Le pourcentage d'amortissement sera : $\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,56}{\sqrt{4\pi^2 + 0,56^2}} = 0,088 \approx 9\%$,

La pulsation propre peut être calculée par : $\omega_0 = \frac{\omega_D}{\sqrt{1-\zeta^2}} = 7,64$ [$\frac{rd}{s}$] ;

Détermination de l'expression de déplacement de la masse a chaque instant t :

$$V(t) = e^{-(0,09*7,64)t} [5 \cos 7,61t + B \sin 7,61t]$$

Détermination de la constante B :

$$V(0,58) = -13,93 = e^{-(0,009*7,64)(0,58)} [-1,47 + 0,955B] ; \rightarrow B \approx 20,2.$$

Enfin :

$$V(t) = e^{-(0,09*7,64)t} [5 \cos(7,61t) + 20,2 \sin(7,61t)]$$

- la valeur du déplacement pour $t=0,76$ s :

$$V(0,76) = e^{-(0,09*7,64)(0,76)} [5 \cos(7,61*0,76) + 20,2 \sin(7,61*0,76)] = -3,13$$
 [cm],

- Calcul de la vitesse initiale :

$$B = \frac{\dot{V}(0) + \zeta \omega_0 V(0)}{\omega_D}; \text{ alors :}$$

$$\dot{V}(0) = B \cdot \omega_D - \zeta \omega_0 V(0) = (20,2 * 7,61) - (0,09 * 7,64 * 5) = 150 [cm].$$

- **Structures dynamiques libres à amortissement critique « $\zeta = 1$ »**

Ce cas correspond à $c=2M\omega_0$.

Sous les mêmes conditions initiales $u(0)$ et $\dot{u}(0)$, la réponse du système s'écrit :

$$u(t) = [(1 + \omega_0 t)u(0) + t \cdot \dot{u}(0)]e^{-\omega_0 t}; \dots\dots\dots(\text{II.36})$$

Où bien en faisant intervenir **les conditions initiales** comme suit :

$$u(0) = x_0 \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{x}_0 \rightarrow u(t) = e^{-\omega_0 t} [x_0 + (\dot{x}_0 + \omega_0 x_0)t].$$

La Figure II.58. représente la réponse d'une structure dynamique libre avec amortissement critique et qui ne présente aucune oscillation au cours du temps et le déplacement tend vers 0 au bout d'un temps infini. On peut en déduire que l'amortissement critique correspond à la plus petite valeur de l'amortissement pour laquelle la réponse en vibration libre ne comporte pas d'oscillations.

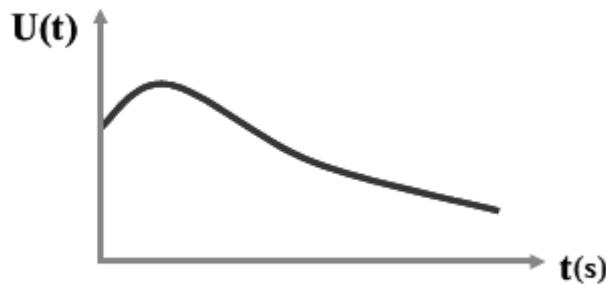


Figure II.58. Réponse d'une structure dynamique libre à amortissement critique.

- **Dynamique des structures à amortissement sur-critique « $\zeta > 1$ »**

Ce cas correspond à $c > 2M\omega_0$. La solution de l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$u(t) = \left[\frac{\dot{u}(0) + \zeta \omega_0 u(0)}{\hat{\omega}} \text{Sinh}(\hat{\omega}t) + u(0) \text{Cosh}(\hat{\omega}t) \right] e^{-\zeta \omega_0 t}; \dots\dots\dots(\text{II.37})$$

Avec $\hat{\omega} = \omega_0 \sqrt{\zeta^2 - 1} \left[\frac{rd}{s} \right]; \dots\dots\dots(\text{II.38})$

Où bien en faisant intervenir **les conditions initiales** comme suit :

$$u(0) = x_0 \text{ et } \dot{u}(0) = \dot{x}_0 \rightarrow$$

$$u(t) = \frac{e^{-\xi \omega_0 t}}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} \left\{ \left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + x_0 \left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] e^{\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t} + \left[-\frac{\dot{x}_0}{\omega_0} + x_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right] e^{-\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t} \right\}.$$

On notera que la réponse libre d'une structure dynamique sur-amorti ne comporte pas d'oscillations et que la structure revient à l'équilibre au bout d'un temps infini. La réponse est analogue à celle de la structure dynamique à amortissement critique mais le retour à l'équilibre s'effectue d'autant moins rapidement que le pourcentage d'amortissement critique est élevé.

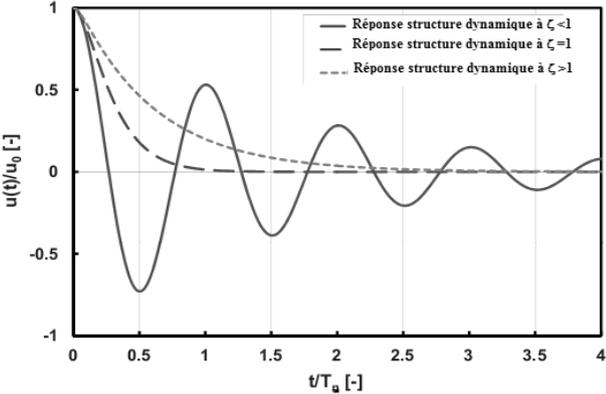


Figure II.59. Les différentes réponses des structures dynamiques avec différents amortissement.

Chapitre III :

Les structures dynamiques à l'ddl

Les vibrations forcées

III.1. Introduction

Dans ce paragraphe, on s'intéressera au cas où les vibrations de l'oscillateur simple sont engendrées par une sollicitation $F(t)$ directement appliquée à la masse M . On se restreindra dans la suite au cas d'un système à amortissement sous-critique, seul cas d'intérêt dans la pratique.

III.2. Réponse à une excitation harmonique

Une excitation harmonique est décrite par une fonction sinus ou cosinus (fonction périodique).

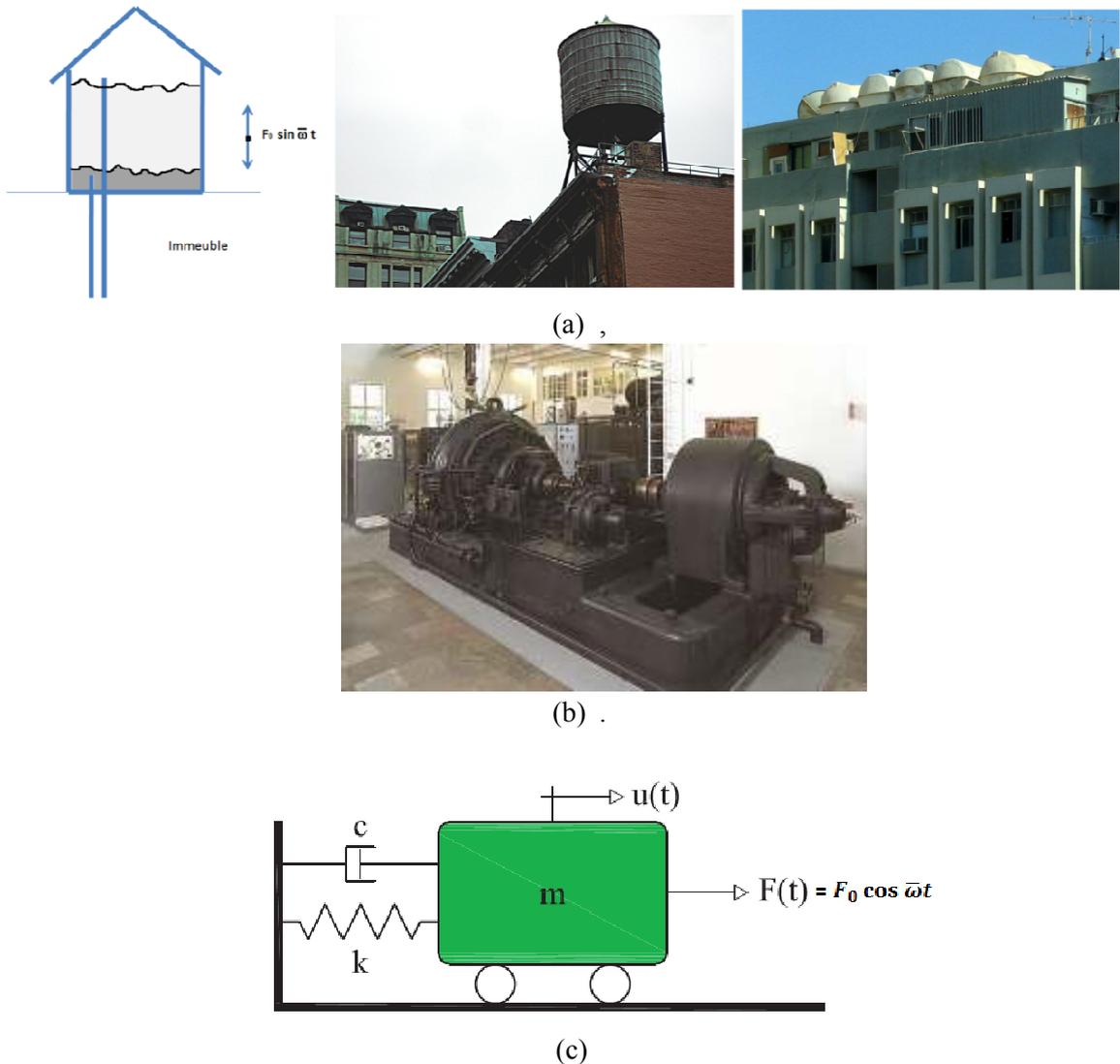


Figure III.1. Exemples de la vie au quotidien: (a) Citernes d'eau sur les immeubles, (b) Machine tournante avec alternateur sur fondation, (c) Modèle dynamique élémentaire sous excitation harmonique.

L'équation différentielle générale du mouvement du modèle dynamique élémentaire en appliquant la 2^{ème} loi de Newton :

$$\ddot{u} + 2\zeta\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = f_0 \cos \bar{\omega} t ; \dots \dots \dots (III.1)$$

Ou : ω_0 : la pulsation propre du modèle dynamique élémentaire,
 $\bar{\omega}$: La pulsation de l'excitation,

$$\text{et } f_0 = F_0/m = \left(\frac{F_0}{k}\right) \cdot \omega_0^2 \dots\dots\dots(III.2)$$

La solution générale de l'équation est :

$$u_g(t) = u_h(t) + u_p(t) ; \dots\dots\dots(III.3)$$

Tel que :

. $u_g(t)$: est la solution générale de l'équation différentielle, $u_h(t)$: la solution homogène de l'équation différentielle sans son second membre appelée aussi « la solution transitoire » et $u_p(t)$: la solution particulière nommée « la solution stationnaire ».

Les différentes constantes d'intégration de la solution générale sont à déterminer par les conditions initiales :

$$. u(0) = u_0 \quad \text{et} \quad \dot{u}(0) = v_0 ;$$

Des fois pour simplifier les calculs on a recours au rapport des pulsations :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} ; \dots\dots\dots(III.4)$$

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] + \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\zeta\beta \cos \bar{\omega} t] \dots\dots\dots(III.5)$$

Qui peut être représenté par la figure suivante :

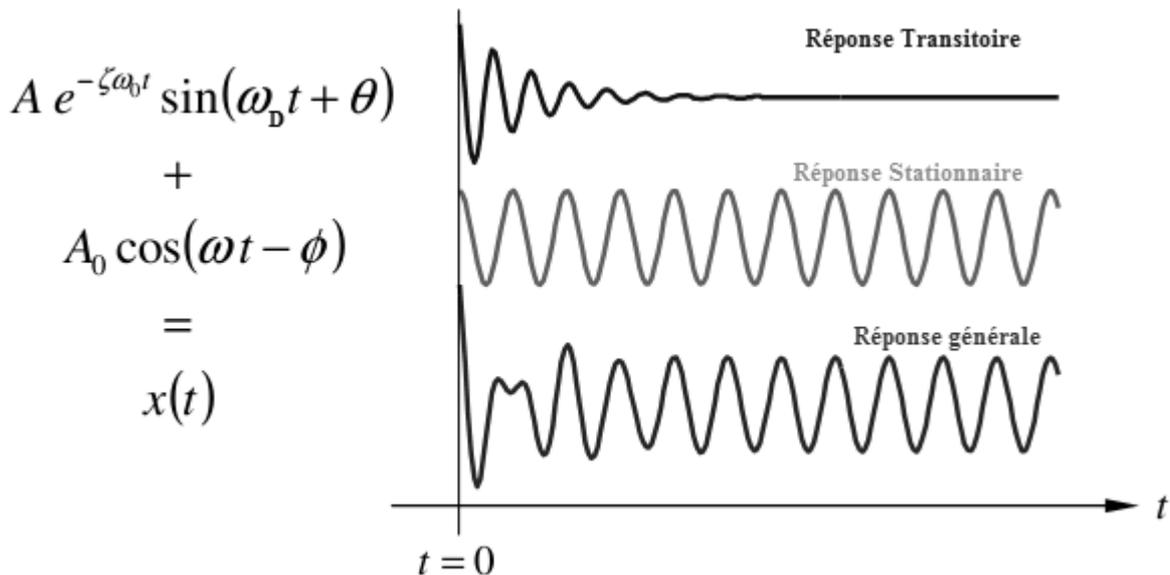


Figure III.2. Réponse d'une structure dynamique amortie sous excitation harmonique.

Pour une structure dynamique faiblement amorti ($\xi \approx 5\%$), dès que la durée devient supérieure à 2 fois la période propre $T_0 = 2\pi/\omega_0$ de la structure, la contribution de la réponse transitoire peut être négligée. La réponse stationnaire peut alors s'écrire, de façon similaire à l'équation :

$$u(t) = \rho \cos(\bar{\omega} t + \theta) \dots\dots\dots(III.6)$$

Où ρ représente l'amplitude de la réponse et θ la phase qui caractérise le déphasage entre l'effort appliqué et le déplacement résultant.

- **L'amplitude de la réponse** est égale à :

$$\rho = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{F_0}{k} \cdot D \quad \text{avec} : \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} ; D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \dots\dots\dots(III.7)$$

F_0/k représente le déplacement statique (à fréquence nulle) de la masse M lorsque la sollicitation vaut F_0 et D le facteur d'amplification dynamique.

Ce facteur d'amplification dynamique est représenté sur la figure suivante en fonction du rapport β . Il vaut bien évidemment 1 pour un chargement statique.

Lorsque $\bar{\omega}$ tend vers l'infini, D tend vers 0 quelle que soit la valeur de ζ .

A très haute fréquence, les forces d'inertie deviennent prépondérantes devant les forces élastique F_e et d'amortissement F_a ; elles tendent vers l'infini et s'opposent au mouvement : la masse reste "immobile".

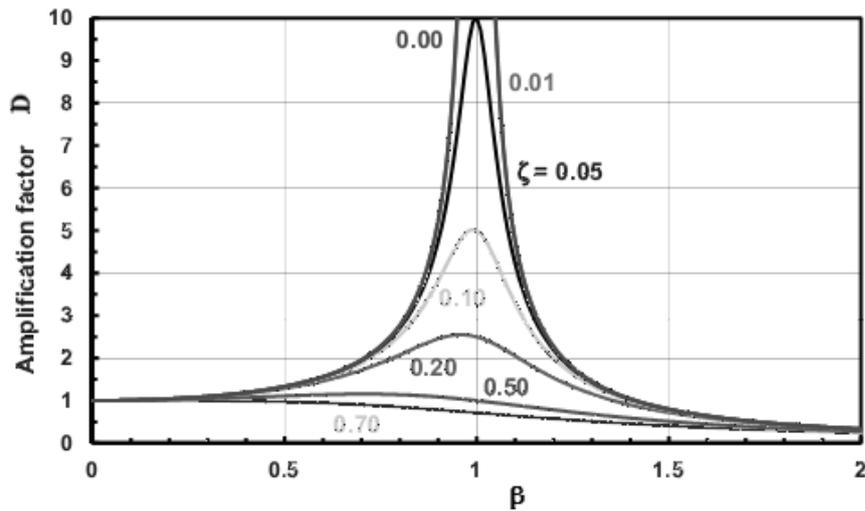


Figure III.3. Facteur d'amplification dynamique.

Lorsque la pulsation $\bar{\omega}$ de la sollicitation **coïncide** avec la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur, le facteur d'amplification D passe par un maximum égal à :

$$D = \frac{1}{2\zeta} ; \dots \dots \dots (III.8)$$

Ce phénomène est connu sous le nom de résonance. Lorsque l'amortissement est nul, D_{max} devient infini.

Pour les valeurs de $0 < \xi \leq 1/\sqrt{2}$ (0.707), $D_{max} = \frac{1}{2\xi(1-\xi^2)^{1/2}}$ (III.9)

- La phase θ est donnée par :

$$\theta = \arctg \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} ; \dots \dots \dots (III.10)$$

Elle est représentée sur la figure suivante en fonction de β .

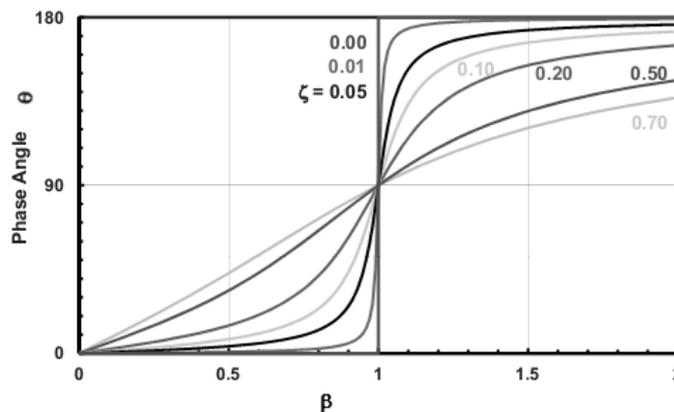


Figure III.4. La phase de la réponse stationnaire.

A faible fréquence, la phase est nulle ou négligeable : le système répond instantanément à la sollicitation. Lorsque **la résonance** est atteinte ($\beta=1$), il se produit un déphasage de 90° entre force appliquée et la réponse résultante : la réponse est nul lorsque la force est maximale, et vice-versa.

A haute fréquence, la réponse est maximale, en valeur absolue, au même instant que la force mais se produit dans la direction opposée à la force.

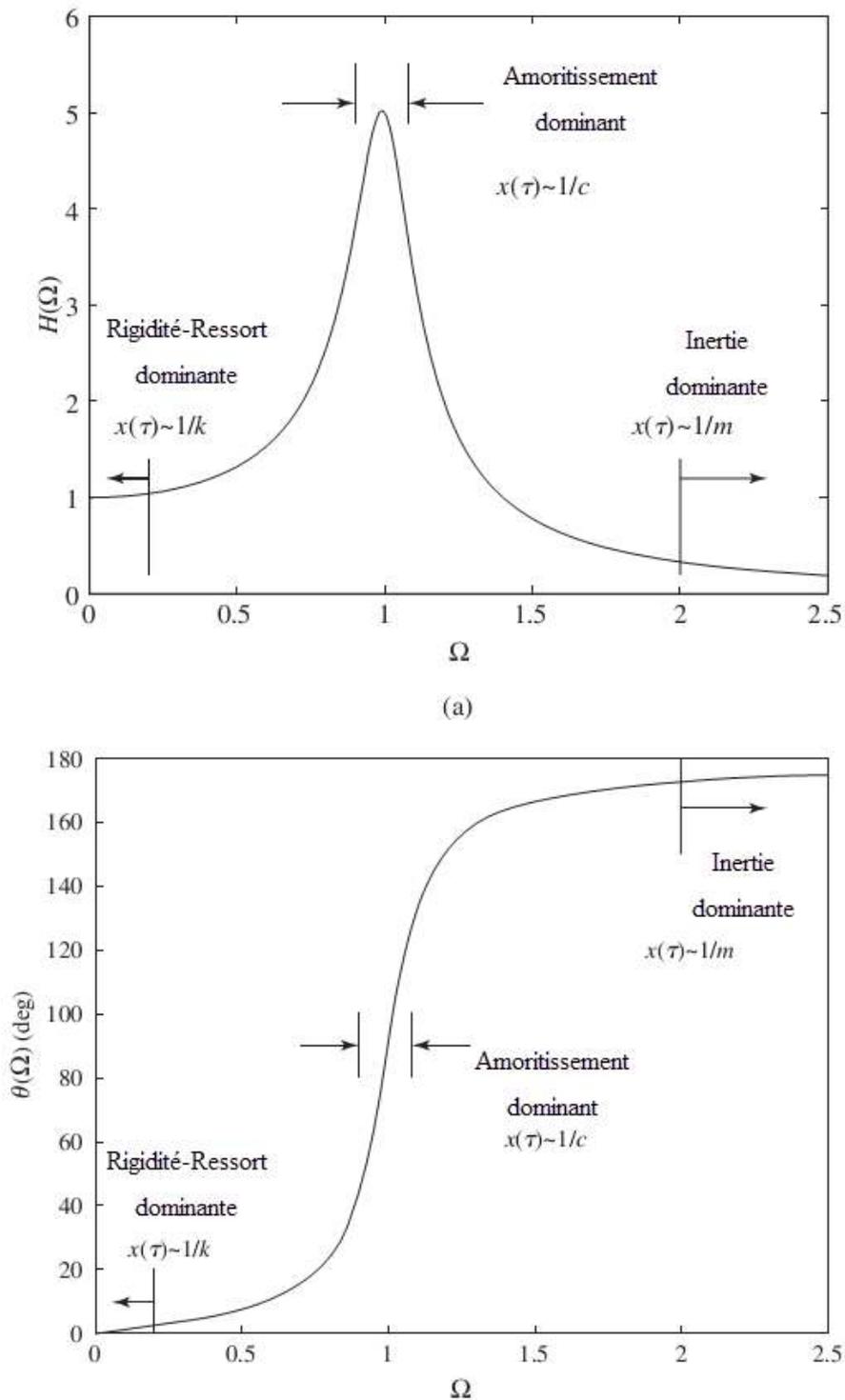


Figure III.5. Trois régions de la réponse d'une structure à 1 dl, (a) l'amplitude, (b) la phase.

Commentaires :

- $\beta \ll 1$, faible variation de l'excitation (ζ n'est pas important), $D \approx 1$, $u_{\max} = u_0$
 $\Rightarrow \theta \approx 0^\circ$, la réponse et la force excitatrice sont en phase.
- $\beta \gg 1$, variation rapide de l'excitation (ξ n'est pas important), $D \approx (1/\beta^2)$, $u_{\max} = u_0 \cdot (1/\beta^2) = F_0 / (m \bar{\omega}^2)$: la masse contrôle le mouvement.
 $\Rightarrow \theta \approx 180^\circ$: la réponse et la force excitatrice sont en opposition.
- $\beta \approx 1$, (ξ est très important), $D \approx 1/(2\xi)$, $u_{\max} = u_0 / 2\xi = F_0 / (c\omega_0)$: l'amortissement contrôle le mouvement,

⇒ $\theta \approx 90^\circ$: la réponse est nulle quand la force excitatrice est maximale.

ETUDE DE LA RESONANCE ($\beta = 1 \Rightarrow \omega_0 = \bar{\omega}$)

La réponse:

$$u(t) = e^{-\zeta\omega_0 t} [A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t] + \frac{F_0}{K} \cdot \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} [(1-\beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\zeta\beta \cos \bar{\omega} t] \dots\dots(III.11)$$

devient avec les conditions initiales ($u(0) = \dot{u}(0) = 0$) ceci nous donne, pour les constantes d'intégration A et B :

$$A = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-\zeta^2}} ; B = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\zeta} \dots\dots\dots(III.12)$$

$$u(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{2\zeta} \cdot \left[\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_D t) + \cos(\omega_D t) \right) e^{-\zeta\omega_0 t} - \cos(\bar{\omega} t) \right] \dots\dots\dots(III.13)$$

Qui se simplifie pour les faibles valeurs de ζ et un temps t suffisamment élevé en :

$$u(t) = \frac{F_0}{2k\zeta} \cdot (e^{-\zeta\omega_0 t} - 1) \cdot \cos(\bar{\omega} t) \dots\dots\dots(III.14)$$

Lorsque le système est non amorti ($\zeta \rightarrow 0$) , on aura :

$$u(t) = \frac{F_0}{2K} \cdot [\sin(\bar{\omega} t) + \bar{\omega} t \cos(\bar{\omega} t)] \dots\dots\dots(III.15)$$

La figure suivante présente l'évolution dans le temps Les réponses amortie et non amortie :

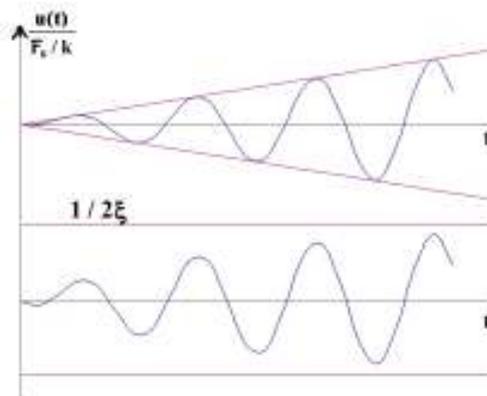


Figure III.6. Evolution de l'amplitude de la réponse d'une structure dynamique en résonance.

Pour la structure non amorti, l'amplitude de la réponse croît d'une quantité π à chaque cycle et tend vers l'infini : la structure devient instable.

Pour la structure, même faiblement amorti, l'amplitude de la réponse croît dans le temps mais reste bornée par la valeur $F_0/2k\zeta$ qui est atteinte d'autant plus rapidement que l'amortissement est élevé. La borne obtenue pour l'amplitude du déplacement est égale à celle de la réponse stationnaire à la résonance de l'oscillateur.

Les vidéos suivantes montrent l'effet de la résonance :

- 1/ <https://www.youtube.com/watch?v=iyw4AcZuj5k>
- 2/ <https://www.youtube.com/watch?v=W72LkQeSlpo>

III.3. La force transmise (isolation vibratoire)

La structure dynamique est excitée par une force harmonique de forme :

$$F(t) = F_0 \cdot \cos(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(III.16)$$

La force transmise à la fondation est donnée par :

$$F_T(t) = F_r(t) + F_a(t) = k \cdot u(t) + c \cdot \dot{u}(t) \dots\dots\dots(III.17)$$

Où la réponse est déduite précédemment :

$$u(t) = u_{max} \cdot \cos(\bar{\omega}t + \theta) \dots\dots\dots(III.18)$$

$$\text{avec : } u_{max} = u_0 \cdot D \dots\dots\dots(III.19)$$

Par dérivation et substitution on trouve :

$$F_T(t) = \frac{F_0}{k} \cdot D \cdot [k \cdot \cos(\bar{\omega}t + \theta) - c \cdot \bar{\omega} \cdot \sin(\bar{\omega}t + \theta)] ; \dots\dots\dots(III.20)$$

En utilisant la relation trigonométrique suivante ;

$$a \cdot \cos(\alpha) + b \cdot \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos(\alpha + \varphi) \text{ avec : } \text{tg } \varphi = \frac{b}{a}, \dots\dots\dots(III.21)$$

on trouve :

$$F_T(t) = \frac{F_0}{k} \cdot D [\sqrt{k^2 + c^2 \bar{\omega}^2} \cdot \cos(\bar{\omega}t + \bar{\varphi})] \dots\dots\dots(III.22)$$

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \dots\dots\dots(III.23)$$

Par substitution $c = (2\zeta k)/\omega_0$ alors :

$$F_T(t) = \frac{F_0}{k} \cdot D [\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2} \cdot \cos(\bar{\omega}t + \bar{\varphi})] ; \dots\dots\dots(III.24)$$

Donc la force maximale transmise sera :

$$\frac{|F_{T \text{ max}}|}{|F_0|} = TR \dots\dots\dots(III.25)$$

TR est nommé la transmissibilité et égale à :

$$TR = D \cdot \sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2} \dots\dots\dots(III.26)$$

Ou bien :

$$TR = \sqrt{\frac{1 + [2\zeta\beta]^2}{[1 - (\beta^2)^2 + [2\zeta\beta]^2]}} ; \dots\dots\dots(III.27)$$

Cas spéciale (Résonance $\beta=1$)

$$D = \frac{1}{2\zeta} ; \dots\dots\dots(III.28)$$

$$TR = D \cdot \sqrt{1 + 4\zeta^2} = \frac{\sqrt{1 + 4\zeta^2}}{2\zeta} \dots\dots\dots(III.29)$$

La figure suivante montre la transmissibilité en fonction de β .

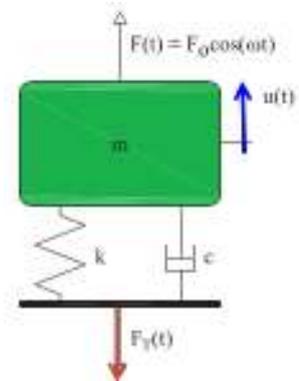


Figure III. 7. Structure dynamique forcée.

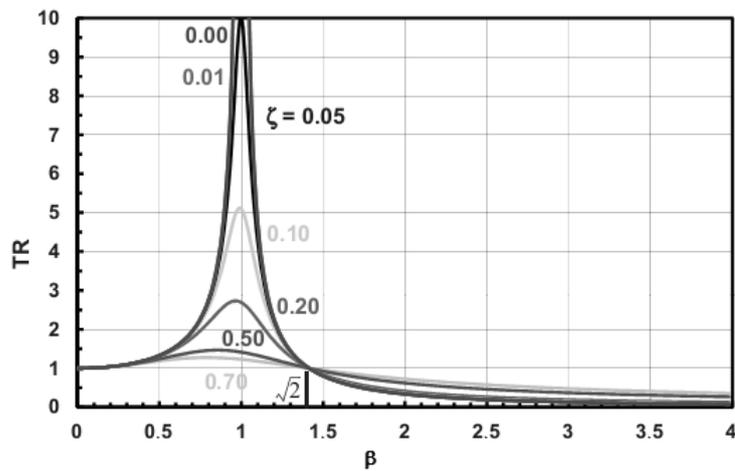


Figure III.8. La représentation de la transmissibilité.

- Quand : $\beta > \sqrt{2}$ (1,42) alors : $TR < 1 \rightarrow$ on aura une isolation vibratoire, amortissement à un effet rigide,
- β élevée (excitation sous-critique)
- β faible (excitation sur critique).

Les transmissibilités de la force et du déplacement correspondant à deux problèmes différents ont cependant la même expression. La transmissibilité peut également être exprimée en dB « le décibel »:

$$L_{TR} = 20 \log_{10} TR \text{ [dB]}, \dots \dots \dots \text{(III.30)}$$

Les figures suivantes montrent la transmissibilité en linéaire et en dB avec une échelle logarithmique des fréquences.

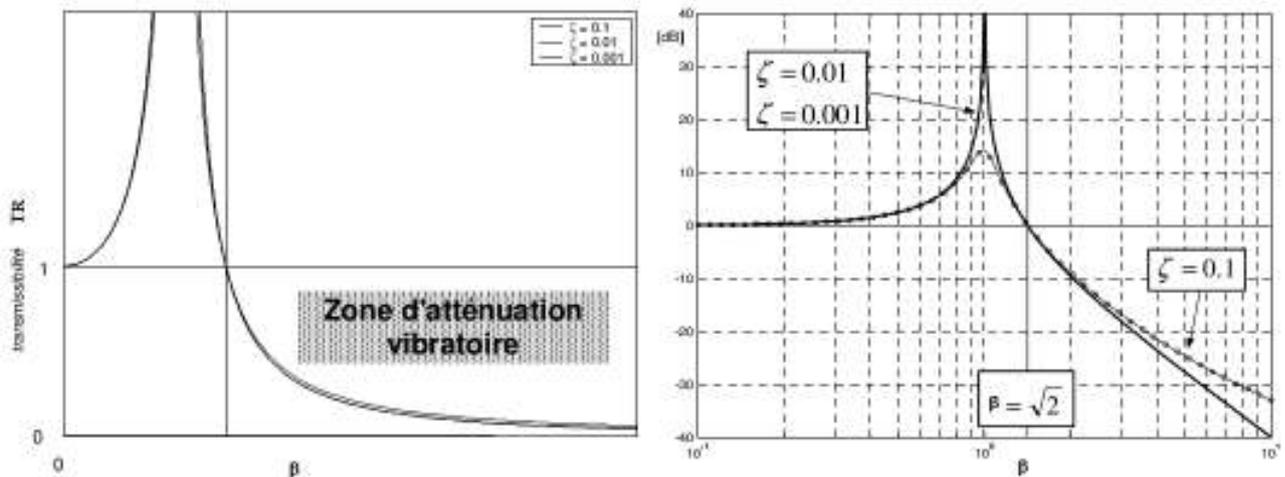


Figure III.9. Transmissibilité en fonction de β et pour différentes valeurs d'amortissement ζ . a) représentation linéaire (gauche), b) représentation en dB (droite).

- Pour différentes valeurs du taux d'amortissement ζ les courbes passent toutes par le point $TR=1$ et $\beta=2$.
- Pour que la force transmise à la fondation soit inférieure à la force d'excitation ou que le déplacement de la masse soit inférieur à celui de la base il faut que :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{\bar{f}}{f_0} > \sqrt{2}; \dots \dots \dots \text{(III.31)}$$

Atténuation (Isolation Effectiveness) :

Lors de la conception d'un système d'isolation vibratoire fonctionnant à des fréquences au-dessus de la valeur critique représentée par $\beta = \sqrt{2}$, il est commode d'exprimer le comportement de la structure dynamique à 1 dII en termes d'efficacité d'isolation (IE) « Atténuation » plutôt que de transmissibilité.

Pour les opérations de réduction du niveau vibratoire, le taux d'atténuation (souvent exprimé en %) est également utilisé :

$$A = 1 - TR = \frac{\beta^2 - 2}{\beta^2 - 1} ; \dots \dots \dots (III.32)$$

Quand l'atténuation (ou gain) est exprimée en dB, c'est la quantité : $20 \log_{10} \frac{1}{TR} = -L_{TR}$ (positive pour $\beta > 2$) qui est employée.

La fréquence d'excitation f pour laquelle on obtient une atténuation A se déduit des équations précédentes :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{\bar{f}}{f_0} = \sqrt{\frac{A-2}{A-1}} \quad \rightarrow \quad \bar{f} = f_0 \cdot \sqrt{\frac{A-2}{A-1}} \dots \dots \dots (III.33)$$

Pour une fréquence d'excitation \bar{f} , l'atténuation A dépend seulement de la fréquence propre f_0 de la structure. Ces résultats sont présentés sous forme d'abaques ;

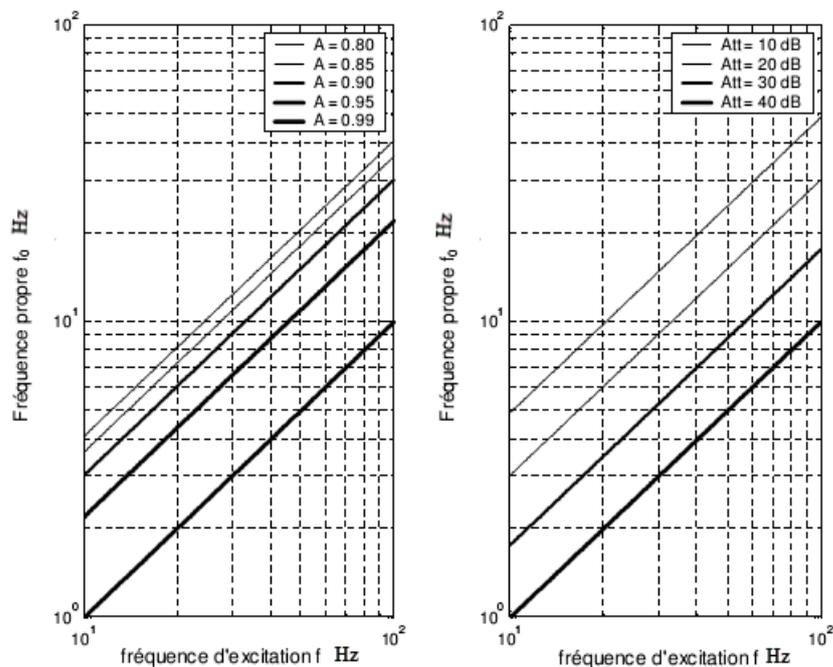


Figure III. 10. Abaques d'atténuation vibratoire donnant les relations entre la fréquence d'excitation f et la fréquence propre f_0 . a) pour des atténuations $A = 1 - TR$,
 b) pour des affaiblissements $Att = 20 \log_{10} \frac{1}{TR}$ (en dB).

Un cas fréquent est celui d'une excitation due à un mécanisme en rotation. Une atténuation A est recherchée dans une plage de fonctionnement définie par l'intervalle de fréquence $[f_1, f_2]$. C'est la fréquence d'excitation minimale f_1 qui représente la contrainte la plus importante et qui sert à déterminer la fréquence propre f_0 de la suspension élastique.

Le centre de gravité de l'ensemble mécanique à suspendre permet de déterminer le nombre et la position des points de fixation pour que la charge soit également répartie (dans le cas où la position des points de fixation est imposée, on peut être conduit à choisir des supports de rigidités différentes).

Chapitre III :

Dans le cas d'une machine tournante, le régime de fonctionnement est atteint après le démarrage en passant par la fréquence propre ($\beta = 1$). La transmissibilité passe par un maximum qui est contrôlé par le taux d'amortissement :

$$TR_{max} = \frac{1}{2\zeta} \dots \dots \dots (III.34)$$

Dans le cas où la structure est sans amortissement ($\zeta=0$) alors :

La réponse maximale est donnée par :

$$u_{max} = \frac{F_0}{k} \cdot D \dots \dots \dots (III.35)$$

Le facteur d'amplification sera : $D = \frac{1}{(1-\beta^2)} \dots \dots \dots (III.36)$

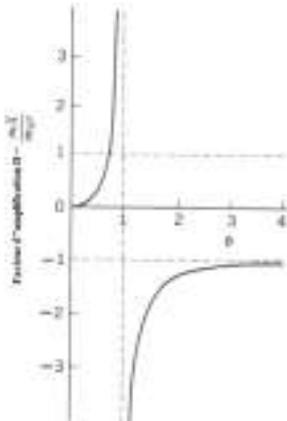


Figure III.11. Le facteur d'amplification sans amortissement.

La transmissibilité sera : $TR = |D| = \left| \frac{1}{(1-\beta^2)} \right| \dots \dots \dots (III.37)$

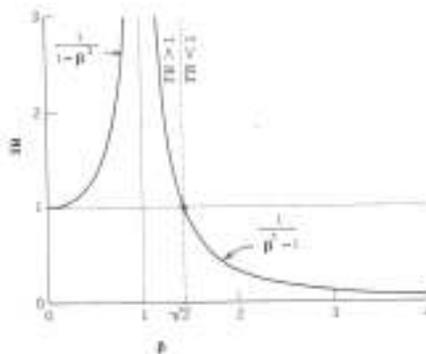


Figure III.12. La transmissibilité sans amortissement.

III.4. Excitation par déséquilibre dynamique en rotation (Les balourds):

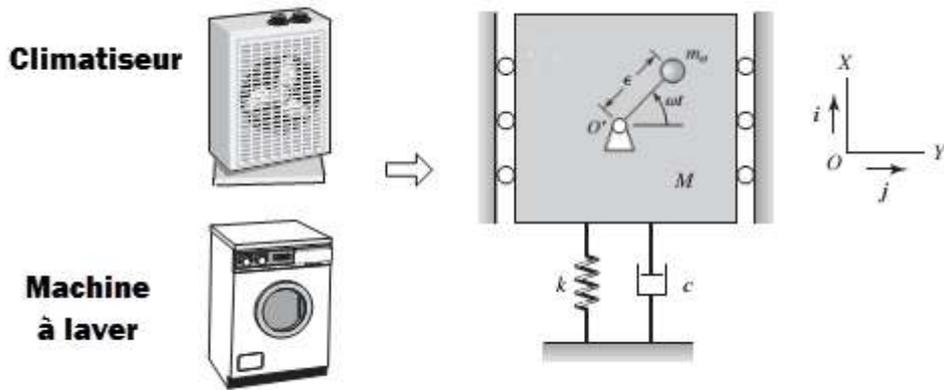


Figure III.13. Types de machines tournantes.

Les machines tournantes constituent des sources de vibrations très courantes. De petites irrégularités dans la distribution des masses des parties mobiles en rotation causent des niveaux vibratoires importants.

Si le centre de gravité d'une petite masse m_0 déséquilibrée se trouvant à une distance radiale dite «excentricité» « e » à partir de l'axe géométrique de rotation de la machine.

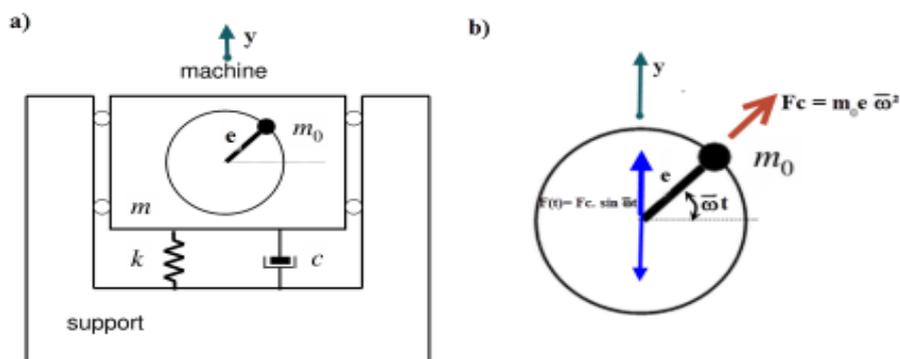
La force centrifuge générée a une grandeur de :

$$F(t) = m_0 e \cdot \bar{\omega}^2 \cdot \sin(\bar{\omega}t) ; \dots \dots \dots (III.38)$$

Un guidage sans friction autorise seulement un mouvement dans la direction y. En supposant la vitesse de rotation $\bar{\omega}$ constante.

Le parcours de la masse m_0 est déterminé par la simple relation de projection :

$$y_{m_0} = e \cdot \sin(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (III.39)$$



(a) représentation de la machine tournante , (b) projection sur l'axe y de la force centrifuge.

Figure III.14. Excitation par un balourd d'une machine tournante.

La force de réaction générée par la rotation de la masse a une composante dans la direction y qui est proportionnelle à m_0 et à l'accélération \ddot{y} . Cette force agit sur la masse m de la machine (les forces dans la direction x ne sont pas considérées). L'équilibre des forces par rapport au référentiel du support s'écrit (m_0 fait partie de la masse m de la machine)

$$(m - m_0)\ddot{y} + m_0(y + y_{m_0}) = -ky - c\dot{y} \dots \dots \dots (III.40)$$

Ce qui conduit à :

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = -m_0\ddot{y}_{m0} ; \dots\dots\dots(III.41)$$

Le terme au second membre est la force $F(t) = -m_0\ddot{y}_{m0} = m_0e.\bar{\omega}^2.\sin(\bar{\omega}t)$; qui excite la structure. Ce dernier peut s'écrire en normalisant l'équation par rapport à la masse :

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 = \frac{F(t)}{m} ; \dots\dots\dots(III.42)$$

Et puisque, la solution particulière recherchée est exprimée par :

$$y_p(t) = \rho \cos(\bar{\omega}t + \theta) \dots\dots\dots(III.43)$$

Après dérivation et substitution, par comparaison on aura :

$$\rho = \frac{m_0.e.\bar{\omega}^2}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} = \frac{m_0.e.\bar{\omega}^2}{k} . D ; \dots\dots\dots(III.44)$$

$$D = \frac{m\rho}{m_0e} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \dots\dots\dots(III.45)$$

$$\text{Et la phase } \theta = -\arctg \frac{1-\beta^2}{2\zeta\beta} = \arctg \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} - \frac{\pi}{2} ; \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} \dots\dots\dots(III.46)$$

Finalement la réponse particulière s'écrit :

$$y_p(t) = \rho \cos(\bar{\omega}t + \theta) = -\rho . \sin(\bar{\omega}t + \arctg \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}) \dots\dots\dots(III.47)$$

L'amplitude de déplacement en régime stationnaire est une fonction de la vitesse de rotation.

Quand $\beta \gg 1$, la valeur normalisée du déplacement tend vers 1 indépendamment de ζ . Pour les machines tournantes, la suspension sera calculée pour que ω_0 soit en dehors de la gamme de fonctionnement.

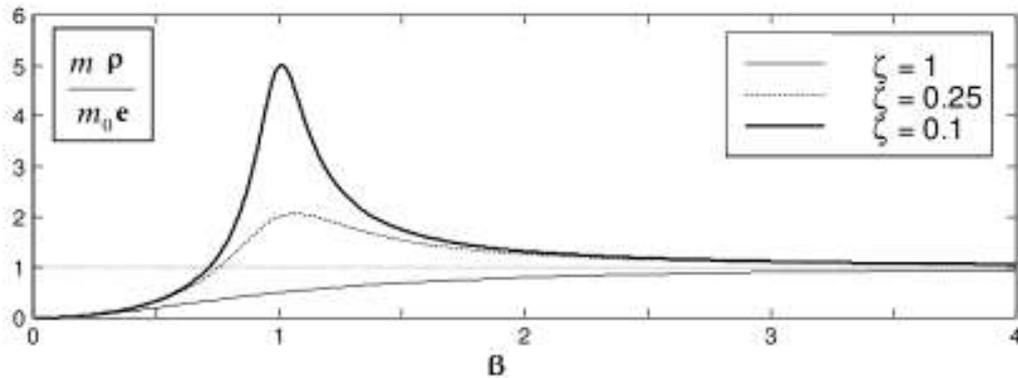


Figure III.15. Réponse d'une structure à une excitation par une masse tournante (un balourd).

Le facteur d'amplification est donnée par :

$$D = \frac{m\rho}{m_0e} = \frac{m\omega_0^2\rho}{F_0} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \dots\dots\dots(III.48)$$

Pour les valeurs de $0 < \xi \leq 1/\sqrt{2}$ (0.707), $D_{max} = \frac{m\omega_0^2\rho}{F_0} = \frac{1}{2\xi(1-\xi^2)^{1/2}}$ (III.49)

La transmissibilité est :

$$TR = \sqrt{\frac{1+[2\zeta\beta]^2}{[1-(\beta^2)]^2+[2\zeta\beta]^2}} ; \dots\dots\dots(III.50)$$

Le facteur d'amplification devient :

$$D = \frac{m\rho}{m_0e} = \frac{1}{(1-\beta^2)} \dots \dots \dots (III.51)$$

Et la transmissibilité sera :

$$TR = D = \frac{1}{(1-\beta^2)} \dots \dots \dots (III.52)$$

III.5. Tourbillonnement synchrone des arbres tournants des machines :

Un rotor et son arbre fléchissent sous l'effet de leur poids propres, la déformée statique est située sous la ligne des centres des paliers (Figure III.16). Si la vitesse de rotation est à très basse vitesse, le rotor tourne autour de sa déformée. Mais le centre de gravité ne sera pas sur l'axe de rotation, même si le rotor est bien équilibré. Une déformation supplémentaire engendrée par la force centrifuge qui donne à la fibre neutre sa déformée dynamique. On distingue que le rotor tourne autour de sa déformée statique. Ce mouvement est appelée *tourbillonnement* (*whirl*).

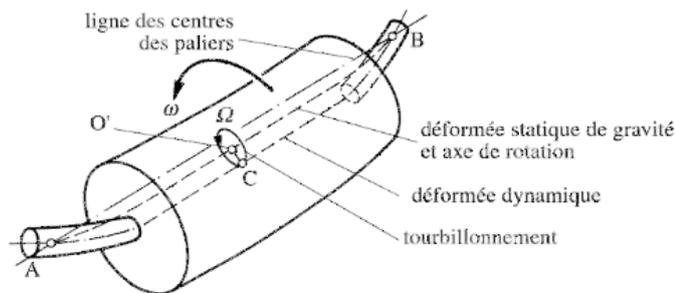


Figure III.16. Tourbillonnement d'un rotor.

On suppose, pour la première analyse ; que le rotor se réduise à un disque mince placé au milieu de la portée des paliers pour éliminer l'effet gyroscopique. O est la trace de la ligne des centres des paliers sur le plan disque. On appelle *excentrement* la distance e entre le centre C de l'axe du rotor et son centre de gravité G. f est la flèche de l'arbre.

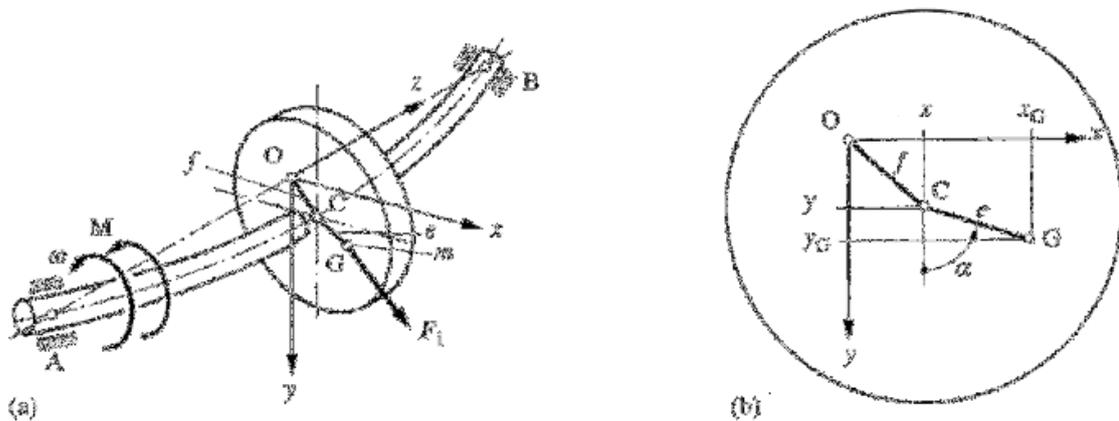


Figure III.17. Rotor déformé : (a) système de coordonnées, (b) position du rotor et du centre de gravité.

Chapitre III :

Étudions le mouvement du centre de l'arbre C dans un référentiel dont l'axe z coïncide avec la droite des centres des paliers A et B ; l'axe y est vertical, dirigé vers le bas. Les paliers sont fixés rigidement dans le bâti de la machine. Les efforts suivants agissent sur le rotor :

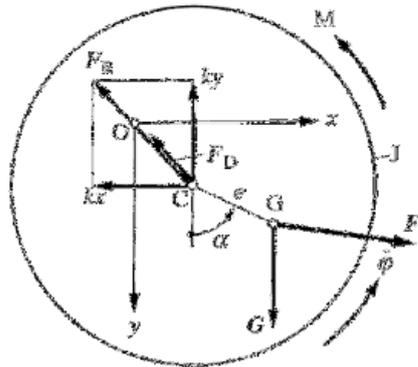


Figure III.18. Efforts appliqués à un rotor-disque.

- La force de rappel de l'arbre déformé : $F_R = kf$ (III.53)
- La force d'amortissement extérieur de la vibration par frottement dans le fluide ambiant :

$$F_a = C \frac{df}{dt}; \dots\dots\dots(III.54)$$

- Le poids du rotor : $P = mg$,.....(III.55)
- La force d'inertie appliquée au barycentre : $F_i = m a$,.....(III.56)
- Le couple net M résultant des couples moteurs et résistants appliqués au rotor.

L'équilibre dynamique des forces s'écrit :

$$\vec{F}_R + \vec{F}_a + \vec{P} + \vec{F}_i = \vec{0}; \dots\dots\dots(III.57)$$

(x,y) étant les coordonnées de C, la projection sur les axes de coordonnées donne les équations suivantes :

$$\begin{cases} -kx - c\dot{x} - m\ddot{x}_G = 0 \\ -ky - c\dot{y} + mg - m\ddot{y}_G = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(III.58)$$

L'équilibre des moments par rapport au barycentre s'exprime par :

$$M + (kx + c\dot{x})e \cos \alpha - (ky + cy) e \sin \alpha = J\ddot{\phi} \dots\dots\dots(III.59)$$

Où J est le moment d'inertie du rotor autour de son barycentre. On admet que la vitesse d'entraînement est constante et l'excentrement e assez petit pour que le poids du rotor ne puisse pas faire varier sa vitesse $\dot{\alpha}$.

Les coordonnées du centre C et du barycentre G sont liées par la géométrie :

$$\begin{cases} x_G = x + e \sin \alpha \\ y_G = y + e \cos \alpha \end{cases} \dots\dots\dots(III.60)$$

Le rotor tournant à la vitesse constante $\bar{\omega}$, on a $\alpha = \bar{\omega}t$; on remplaçons dans les équations d'équilibre des forces, on trouve ;

$$\begin{cases} m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega} t \\ m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me \bar{\omega}^2 \cos \bar{\omega} t + mg \end{cases} \dots\dots\dots(III.61)$$

Posons comme d'habitude :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \zeta = \frac{c}{2m\omega_0} \dots\dots\dots(III.62)$$

Il vient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \dot{x} + x = e \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega_0} \right)^2 \sin \bar{\omega} t \\ \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \dot{y} + y = e \left(\frac{\dot{\omega}}{\omega_0} \right)^2 \cos \bar{\omega} t + \frac{mg}{k} \end{cases} ; \text{ on pose : } \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}, \text{ le système devient :}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{x} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \dot{x} + x = e(\beta)^2 \sin \bar{\omega} t \\ \frac{1}{\omega_0^2} \ddot{y} + \frac{2\zeta}{\omega_0} \dot{y} + y = e(\beta)^2 \cos \bar{\omega} t + \frac{mg}{k} \end{cases} \dots \dots \dots \text{(III.63)}$$

Les solutions de ces équations différentielles en régime permanent (stationnaire) sont :

$$\begin{cases} x = X \sin(\bar{\omega} t + \varphi) \\ y = Y \cos(\bar{\omega} t + \varphi) + \frac{mg}{k} \end{cases} ; \dots \dots \dots \text{(III.64)}$$

Avec :

$$X = Y = D \cdot e \dots \dots \dots \text{(III.65)}$$

Où D est le facteur d'amplification dynamique :

$$D = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + 4\zeta^2\beta^2}} ; \dots \dots \dots \text{(III.66)}$$

$$\text{Et } \varphi = \arctg \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \dots \dots \dots \text{(III.67)}$$

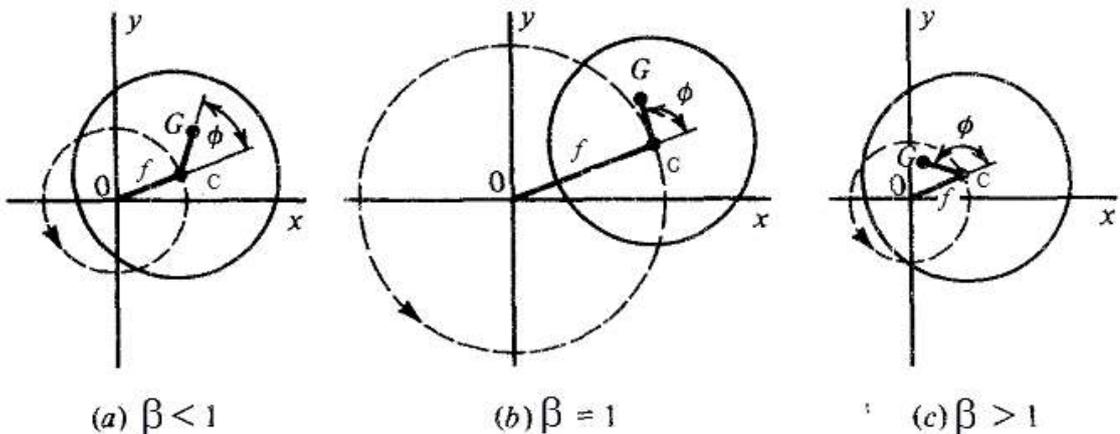


Figure III. 19. Relation entre la phase de l'arbre tournant pour $\beta \leq 1$.

Exemple :

Un rotor de masse de 50 [kg] est monté au centre d'un arbre de 6 [m] ayant une rigidité à la flexion (EI) de 20×10^6 [Pa]. L'arbre est supporté par des paliers rigides à chaque extrémité. En tournant à 2000 [tr / min], l'arbre est serré et le rotor est déplacé de 0,5 [mm]. Si le facteur d'amortissement du système est 0,1 à cette fréquence, déterminer le décalage du rotor?

La rigidité équivalente du mouvement transversal de l'arbre est :

$$k_{\acute{e}q} = 2 * \frac{12 EI}{(L/2)^3} = 192 \frac{EI}{L^3} = 192 * \frac{(20 \times 10^6)}{(6)^3} = 9,26 e + 4 \quad \left[\frac{N}{m} \right] ;$$

La pulsation propre est calculée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{\acute{e}q}}{m}} = \sqrt{\frac{9,26 e + 4}{50}} = 43,03 \left[\frac{rd}{s}\right]$$

La pulsation forcée de l'arbre est :

$$\bar{\omega} = \frac{2\pi N}{60} = \frac{2\pi(2000)}{60} = 209,4 \left[\frac{rd}{s}\right];$$

Le rapport des pulsations est :

$$\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0} = \frac{209,4}{43,03} = 4,87;$$

Et puisque :

$$\beta^2 D = \frac{(4,87)^2}{\sqrt{(1 - (4,87)^2)^2 + (2 \cdot (0,1)(4,87))^2}} = 0,044$$

Le décalage du rotor sera :

$$l = \frac{R}{\beta^2 \cdot D} = \frac{0,0005}{0,044} = 0,0114 [m] = 11,4 [mm].$$

III.6. Excitation de la base (isolation vibratoire) :

Le modèle dynamique élémentaire est excité par une fondation qui génère un déplacement vertical de forme harmonique, comme représenté par la figure suivant :

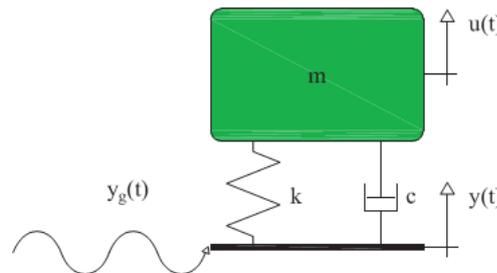


Figure III.20. Fondation en mouvement verticale harmonique.

Le mouvement de la fondation est décrit par :

$$y_g(t) = y_{g0} \cdot \cos(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (III.68)$$

L'équation différentielle du mouvement de la structure est donnée par :

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = 0 ; \dots \dots \dots (III.69)$$

Avec arrangement l'équation différentielle devient sous la forme :

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + k u = ky + c\dot{y} \dots \dots \dots (III.70)$$

La deuxième partie de l'équation, peut être considérée comme une force harmonique externe de la forme :

$$F(t) = ky_{g0} \cos(\bar{\omega}t) - c y_{g0} \bar{\omega} \sin(\bar{\omega}t) ; \dots \dots \dots (III.71)$$

on remplace $c = (2\zeta k)/\omega_0$ et en faisant un arrangement, on obtient :

$$F(t) = k y_{g0} \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right)^2} \cdot \cos(\bar{\omega}t + \varphi) \dots \dots \dots (III.72)$$

La force harmonique externe possède l'amplitude :

$$F_0 = k y_{g0} \cdot \sqrt{1 + (2\zeta \beta)^2} \dots \dots \dots (III.73)$$

Avec $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}$

Ceci nous permet d'avoir la valeur du déplacement maximal de la structure due à une telle force à :

$$u_{max} = \frac{F_0}{k} \cdot D = y_{g0} \cdot D \cdot \sqrt{1 + (2\zeta \beta)^2} \dots \dots \dots (III.74)$$

Par substitution on aura :

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \dots \dots \dots (III.75)$$

La transmissibilité : $TR = \frac{U_{max}}{y_{g0}} = \sqrt{\frac{1+[2\zeta\beta]^2}{[1-\beta^2]^2+[2\zeta\beta]^2}} \dots \dots \dots (III.76)$

Application pratique : La soupape à chaque cycle de la came est excitée de sa base.

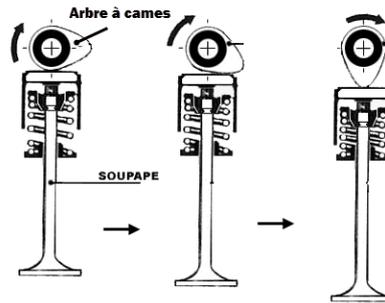


Figure III.21. Les mécanismes à cames.

III.7. Excitation d'accélération

Le modèle dynamique élémentaire est excité par une fondation en accélération verticale harmonique sous la forme :

$$\ddot{y}(t) = \ddot{y}_{g0} \cdot \cos(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (III.77)$$

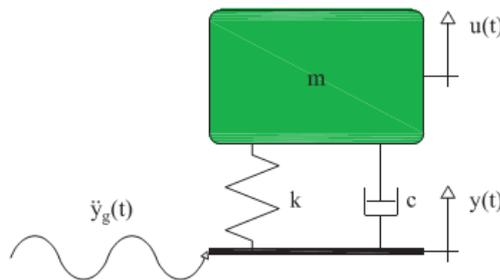


Figure III.22. Fondation en accélération verticale harmonique.

L'équation différentielle de mouvement du modèle dynamique élémentaire devient sous la forme :

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = 0 \dots \dots \dots (III.78)$$

Avec arrangement, on aura :

$$m\ddot{u} + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) - m\ddot{y} = -m\ddot{y} ; \dots \dots \dots (III.79)$$

$$m(\ddot{u} - \ddot{y}) + c(\dot{u} - \dot{y}) + k(u - y) = -m\ddot{y} ; \dots \dots \dots (III.80)$$

On pose : $u = u_{rel} + y$; $\dot{u} = \dot{u}_{rel} + \dot{y}$; $\ddot{u} = \ddot{u}_{rel} + \ddot{y}$; $\dots \dots \dots (III.81)$

$$m(\ddot{u}_{rel}) + c(\dot{u}_{rel}) + k(u_{rel}) = -m\ddot{y}_g \dots \dots \dots (III.82)$$

$$m(\ddot{u}_{rel}) + c(\dot{u}_{rel}) + k(u_{rel}) = -m\ddot{y}_{g0} \cdot \cos(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (III.83)$$

La réponse stationnaire u_{rel} due à l'excitation harmonique de l'accélération de la fondation est donnée par :

$$u_{rel} = a_1 \cos(\bar{\omega}t) + a_2 \sin(\bar{\omega}t) \dots \dots \dots (III.84)$$

Par constatation avec l'excitation force harmonique avec :

$$f_0 = \frac{F_0}{m} = \frac{-m \ddot{y}_{g0}}{m} = -\ddot{y}_{g0} ; \dots\dots\dots(III.85)$$

L'accélération relative peut être calculée par :

$$\ddot{u}_{rel} = -a_1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) - a_2 \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(III.86)$$

L'accélération de la structure recherchée sera alors :

$$\ddot{u} = \ddot{u}_{rel} + \ddot{y}_g = -a_1 \bar{\omega}^2 \cos(\bar{\omega}t) - a_2 \bar{\omega}^2 \sin(\bar{\omega}t) + \ddot{y}_{g0} \cos(\bar{\omega}t) \dots\dots\dots(III.87)$$

L'accélération maximale en valeur absolue du modèle sera :

$$\frac{\ddot{u}_{max}}{\ddot{y}_{g0}} = TR = D \cdot \sqrt{1 + \left(2\zeta \frac{\bar{\omega}}{\omega_0}\right)^2} ; D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \dots\dots\dots(III.88)$$

Une dérivation auxiliaire du déplacement relatif :

$$u_{rel,max} = \frac{f_0}{\omega_0^2} \cdot D = \frac{|\ddot{y}_{g0}|}{\omega_0^2} \cdot D \quad \text{Ou bien : } \frac{u_{rel,max}}{(\ddot{y}_{g0}/\omega_0^2)} = D \dots\dots\dots(III.89)$$

Quelques applications pratiques :

Une importante application de l'analyse des vibrations forcées et de l'excitation par la base se rencontre dans la réalisation de transducteurs pour la mesure des vibrations. C'est le cas de l'accéléromètre.

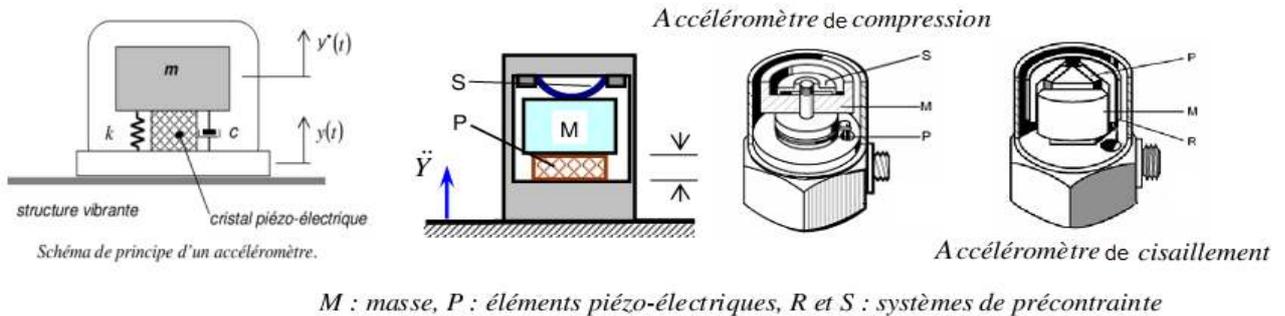


Figure III.23. Principe d'accéléromètre et leurs types pour la mesure des vibrations.



Figure III.24. Gyropode, hoverboard et monowheel.

Accéléromètre en silicium pour les portables et les tablettes pour connaître l'orientation qui permet de corriger l'affichage à son utilisateur.

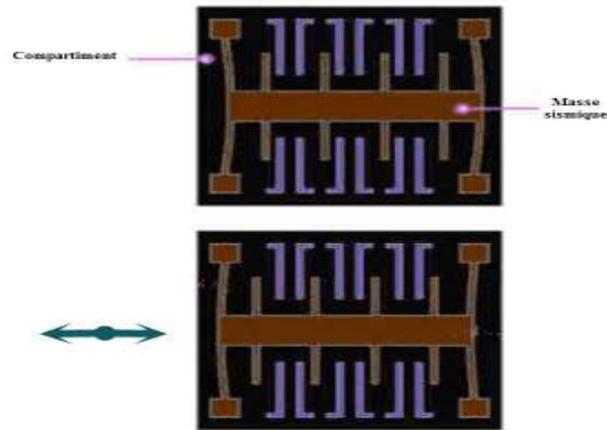


Figure III.25. Accéléromètre en Silicium.

III.8. Récapitulatif :

- Le facteur d'amplification : $D = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$;
- La transmissibilité : $TR = \sqrt{\frac{1 + [2\zeta\beta]^2}{[1 - (\beta^2)]^2 + [2\zeta\beta]^2}}$;
- La force d'excitation harmonique : $D = \frac{u_{max}}{u_0}$;
- Transmission de la force (isolation vibratoire): $TR = \frac{F_{T,max}}{F_0}$;
- Excitation de la base : $TR = \frac{u_{max}}{y_{g0}}$;
- Excitation d'accélération : $TR = \frac{\ddot{u}_{max}}{\ddot{y}_{g0}}$;
 $D = \frac{u_{rel,max}}{(\ddot{y}_{g0}/\omega_0^2)}$;

Chapitre IV :

Les vibrations forcées par impulsion Les structures dynamiques à 1ddl

IV.1. Introduction

La réponse impulsion d'une structure dynamique à un degré de liberté se définit comme la réponse à une excitation de la forme $F(t) = F_0 \cdot \delta(t)$ où $\delta(t)$ est la fonction de Dirac :

$$x(t) = F_0 \cdot h(t) \dots \dots \dots (IV.1)$$

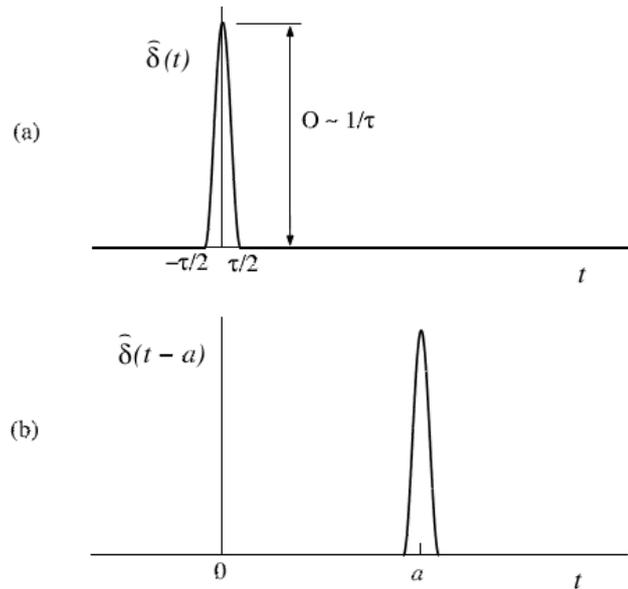


Figure IV.1. La fonction delta de Dirac (impulsion unitaire).

La réponse impulsion est donc :

$$h(t) = \begin{cases} 0 & , \text{pour } t < 0 \\ \frac{1}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0 t} \cdot \sin \omega_D t, & \text{pour } t \geq 0. \end{cases} \dots \dots \dots (IV.2)$$

avec la pseudo pulsation $\omega_D = \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$,

La réponse impulsion est donnée pour une impulsion unitaire $\delta(t)$ appliquée à $t = 0$.

L'impulsion $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} I_0 \cdot \delta(t) dt = I_0$ s'exprime en Ns ou kg m s⁻¹ et $I_0 h(t)$ a bien la dimension d'un déplacement.

Une excitation impulsion appliquée à l'instant $t=t_1$, $F(t) = I_0 \delta(t - t_1)$ aura pour réponse :

$$x(t) = I_0 h(t - t_1) = \frac{I_0}{m\omega_D} \int_0^{t_1} e^{-\zeta\omega_0(t-t_1)} \sin \omega_D(t - t_1) dt \text{ pour } x(t)=0 \text{ et } t < t_1 \dots \dots \dots (IV.3)$$

Cette solution s'entend au sens d'une solution particulière, une solution générale viendrait s'ajouter si les conditions initiales n'étaient pas nulles (existence d'un mouvement pour $t \leq 0$).

IV.2. Les types d'excitations impulsives ;

Les excitations impulsives les plus connus comme on vu au chapitre 2 peuvent être subdivisé en : semi-sinusoidale (arc) [tel le choc mou], triangle [tel l'explosion] et rectangle [tel le choc dur].

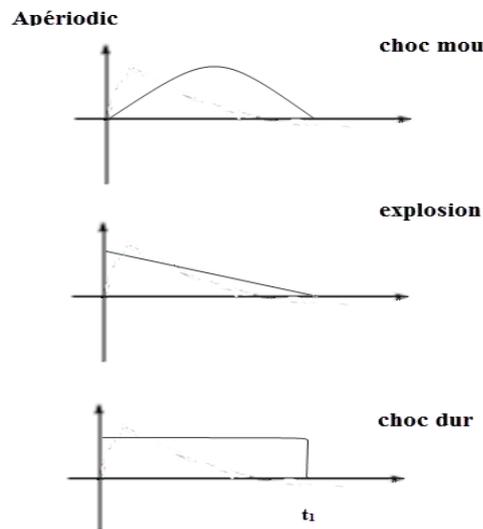


Figure IV.2. Les trois types de chargements- excitations-impulsives.

IV.3. Excitation semi-sinusoidale

Pour des charges impulsives qui peuvent être exprimées par des fonctions analytiques simples, on peut obtenir des solutions de forme proche des équations de mouvement. Par exemple, considérons l'impulsion de semi-sinusoidale dans la Figure IV.3. La réponse à une telle impulsion sera divisée en deux phases comme indiqué, la première correspondant à la phase de vibration forcée dans l'intervalle pendant lequel la charge agit et la seconde correspondant à la phase de vibration libre qui suit.

La charge d'impulsion semi-sinusoidale, sera définie par :

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0 \sin \bar{\omega} \tau & 0 \leq \tau \leq t_1 : \text{Phase I} \\ 0 & \tau > t_1 : \text{Phase II} \end{cases} \dots \dots \dots \text{(IV.4)}$$

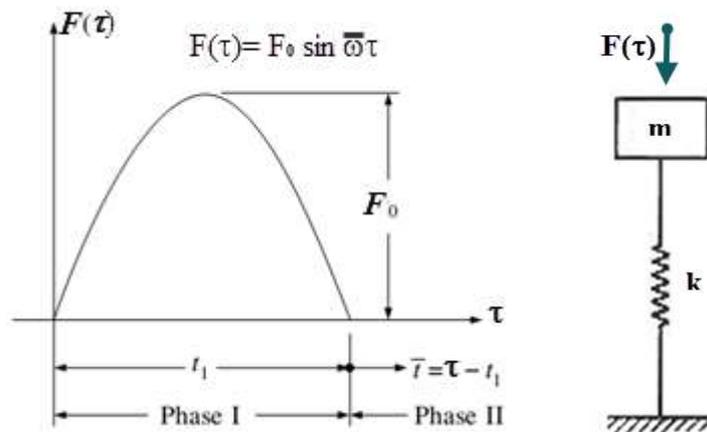


Figure IV.3. Structure dynamique non amortie excitée par impulsion semi-sinusoidale.

Chapitre IV :

La phase I ----- Pendant cette phase, la structure est soumise à la charge semi-sinusoïdale unique représentée sur la Figure IV.3. En supposant que le système commence à partir du repos,

La réponse-déplacement recherchée par utilisation de l'intégrale de convolution (Duhamel), nous aurons :

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_0} \int_0^{t_1} F(\tau) \sin \omega_0(t - \tau) d\tau ; \dots\dots\dots(IV.5)$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \int_0^{t_1} \sin \bar{\omega}\tau \cdot \sin \omega_0(t - \tau) d\tau ; \dots\dots\dots(IV.6)$$

$$\Rightarrow \text{Puisque : } \sin \omega_0(t - \tau) = \sin \omega_0 t \cdot \cos \omega_0 \tau - \cos \omega_0 t \cdot \sin \omega_0 \tau ; \dots\dots\dots(IV.7)$$

Alors :

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} \left[\sin \omega_0 t \int_0^{t_1} \sin \bar{\omega}\tau \cdot \cos \omega_0 \tau d\tau - \cos \omega_0 t \int_0^{t_1} \sin \bar{\omega}\tau \cdot \cos \omega_0 \tau d\tau \right] ; \dots(IV.8)$$

Qui peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = \frac{F_0}{m\omega_0} [\sin \omega_0 t \cdot I_1 - \cos \omega_0 t \cdot I_2] ; \dots\dots\dots(IV.9)$$

Avec : $I_1 = \int_0^{t_1} \sin \bar{\omega}\tau \cdot \cos \omega_0 \tau d\tau$ par intégration par parties, on trouve :

$$I_1 = \frac{1}{\omega_0(1-\beta^2)} [\sin \bar{\omega}t_1 \sin \omega_0 t_1 + \beta \cos \bar{\omega}t_1 \cos \omega_0 t_1 - \beta] ; \dots\dots\dots(IV.10)$$

Même procédure pour I_2 , on trouve :

$$I_2 = \frac{1}{\omega_0(1-\beta^2)} [\beta \cos \bar{\omega}t_1 \sin \omega_0 t_1 - \sin \bar{\omega}t_1 \cos \omega_0 t_1] ; \dots\dots\dots(IV.11)$$

Finalement, par substitution, on trouve :

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{1-\beta^2} [\sin \bar{\omega}t_1 - \beta \sin \omega_0 t_1] ; \dots\dots\dots(IV.12)$$

Le rapport de la réponse non amortie est $R(t) = y(t)/(F_0/k)$; y compris le terme transitoire ainsi que le terme d'état stable, est donnée par l'expression de charge harmonique simple, l'équation :

$$R(t) = \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] (\sin \bar{\omega}t_1 - \beta \sin \omega_0 t_1) \dots\dots\dots(IV.13)$$

Introduisant le paramètre de temps non dimensionnel $\alpha \equiv \tau/t_1$ de sorte que $\bar{\omega}t_1 = \pi\alpha$ et $\omega_0 t_1 = \pi\alpha/\beta$, cette équation peut être écrite sous la forme

$$R(\alpha) = \left[\frac{1}{1-\beta^2} \right] \left(\sin \pi\alpha - \beta \sin \frac{\pi\alpha}{\beta} \right) \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq 1 \dots\dots\dots(IV.14)$$

où $\beta \equiv \bar{\omega}/\omega_0 = \bar{T}/2t_1$. Cette équation n'est, bien sûr, valable que dans la phase I correspondant à $0 \leq \alpha \leq 1$. Comme il est indéterminé pour $\beta = 1$, la règle de l'Hôpital doit être appliquée pour obtenir une expression utilisable pour ce cas particulier. En procédant à cette action, on obtient :

$$R(\alpha) = \frac{1}{2} [\sin \pi\alpha - \pi\alpha \cos \pi\alpha] \text{ } \beta=1 \text{ et } 0 \leq \alpha \leq 1 \dots\dots\dots(IV.15)$$

La phase II---

Le mouvement de vibration libre qui se produit pendant cette phase, $\tau \geq t_1$ dépend du déplacement $y(t_1)$ et de la vitesse $\dot{y}(t_1)$ existant à la fin de la phase I; en d'autres termes, en termes du rapport de la réponse, il dépend des valeurs de $R(1)$ et $\dot{R}(1)$ données par l'équation (IV.14) et son expression de la première dérivée, respectivement. Donc, en utilisant :

$$y(t) = y(0) \cos \omega_0 t + \frac{\dot{y}(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t ; \dots\dots\dots(IV.16)$$

Dans le rapport de réponse cette réponse de vibration libre est :

Chapitre IV :

$$R(\alpha) = \left[\frac{-\beta}{1-\beta^2} \right] \left\{ \left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right) \sin \left[\frac{\pi}{\beta} (\alpha - 1) \right] + \left(\sin \frac{\pi}{\beta} \right) \cos \left[\frac{\pi}{\beta} (\alpha - 1) \right] \right\} \text{ pour } \alpha \geq 1 \dots \dots \dots (\text{IV.17})$$

Où $\left[\frac{\pi}{\beta} (\alpha - 1) \right] = \omega_0 (\tau - t_1)$. $\dots \dots \dots (\text{IV.18})$

Cette expression est indéterminée, on aura recours à la règle de l'Hôpital, qui nous donne :

$$R(\alpha) = \frac{\pi}{2} \cos[\pi(\alpha - 1)] \quad \beta=1 \text{ et } \alpha \geq 1 \dots \dots \dots (\text{IV.19})$$

En utilisant les équations de la phase I et les équations de la phase II. Les historiques de temps du rapport-réponse peuvent être générés pour des valeurs discrètes de β comme illustré par les lignes continues de la Figure IV.4. Les valeurs de β sélectionnées pour cette figure sont 1/4, 1/3, 1/2 et 3/2 qui correspondent aux valeurs de t_1 égal à 2, 3/2, 1, 1/2 et 1/3 respectivement. La ligne pointillée représentant le rapport-réponse $[F(t)/k]/(F_0/k) = F(t)/F_0$ quasi statique qui a une valeur de crête égale à l'unité est également présentée à titre de comparaison. Remarquez que pour $t_1/T = 1/2$ ($\beta = 1$), la réponse maximale au point d se produit exactement à la fin de la phase I. pour toute valeur de t_1/T inférieure à 1/2 ($\beta > 1$), la réponse maximale se produira dans la phase II ; alors que pour toute valeur de t_1/T supérieure à 1/2 ($\beta < 1$), il se produira dans la phase I. clairement, la valeur maximale de la réponse dépend du rapport de la durée de la charge à la période de vibration de la structure, sur le rapport $t_1/T=1/3 \beta$.

Bien qu'il soit très important de comprendre le comportement complet de l'historique temporel comme indiqué sur la Figure IV.4, l'ingénieur ne s'intéresse généralement qu'à la valeur maximale de la réponse comme représenté par les points a, b, c, d et e. Si une valeur maximale se produit dans la phase I, la valeur de α à laquelle elle se produit peut être déterminée en différenciant l'équation (IV.13) par rapport à α et mettre l'équation à zéro, obtenant ainsi :

$$\frac{dR(\alpha)}{d\alpha} = \left[\frac{\pi}{1-\beta^2} \right] \left[\cos \pi\alpha - \cos \frac{\pi\alpha}{\beta} \right] = 0 \dots \dots \dots (\text{IV.20})$$

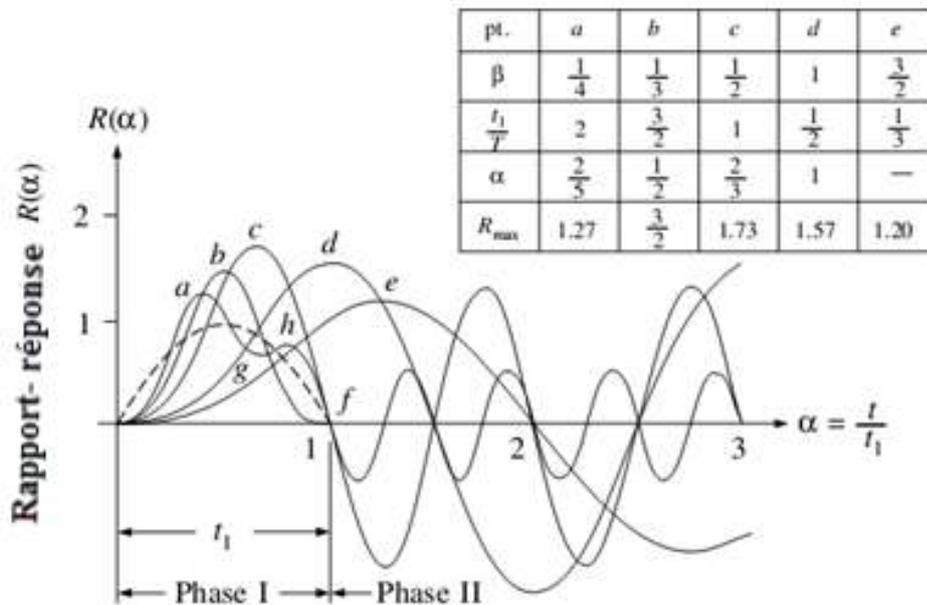


Figure IV.4. Rapports-réponses due à l'impulsion semi-sinusoïdale.

Chapitre IV :

Pour que : $\cos \pi\alpha = \cos \frac{\pi\alpha}{\beta}$, cette équation est satisfaite quand :

$$\pi\alpha = \pm \frac{\pi\alpha}{\beta} + 2\pi n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots (IV.21)$$

Résoudre pour les valeurs de α , nous donne : $\alpha = \frac{2\beta n}{(\beta \pm 1)}$ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \dots \dots (IV.22)$

ce qui n'est valable, bien sûr, que lorsque les valeurs résultantes de la chute de α à la phase I, c-a-d, dans l'intervalle $0 \leq \alpha \leq 1$. Comme précédemment montré, cette condition est justifiée seulement quand :

$0 \leq \beta \leq 1$. Pour satisfaire à ces deux conditions, il est nécessaire que les valeurs positives et négatives de n soient utilisées avec les signes plus et moins, respectivement, dans l'équation (IV.22). notez que la valeur nulle de n peut être retirée de notre considération car elle donne un $\alpha = 0$ qui confirme simplement que la condition initiale de vitesse nulle a été satisfaite.

Enfin, considérons le cas $\beta = 3/2$ qui a sa réponse maximale dans la phase II comme indiqué par le point e. il n'est pas nécessaire dans ce cas de vibration libre de déterminer la valeur α correspondante à la réponse maximale car la valeur maximale désirée est obtenue directement en prenant simplement la somme vectorielle des deux composantes orthogonales de l'équation (IV.17), donnant ainsi :

$$R_{max} = \left[\frac{-\beta}{1-\beta^2} \right] \left[\left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right)^2 + \left(\sin \frac{\pi}{\beta} \right)^2 \right]^{1/2} ;$$

$$= \left[\frac{-\beta}{1-\beta^2} \right] \left[2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right) \right]^{1/2} \dots \dots \dots (IV.23)$$

Enfin en utilisant l'identité trigonométrique $\left[2 \left(1 + \cos \frac{\pi}{\beta} \right) \right]^{1/2} \equiv 2 \cos \frac{\pi}{2\beta}$; $\dots \dots \dots (IV.24)$

Cela nous permet d'écrire sous forme simplifiée :

$$R_{max} = \left[\frac{-2\beta}{1-\beta^2} \right] \cos \frac{\pi}{2\beta} ; \dots \dots \dots (IV.25)$$

Pour le cas discutée ci-dessus de $\beta = 3/2$, cette expression donne : $R_{max} = 1, 2$.

IV.4. Excitation rectangle

Un deuxième exemple d'analyse de la réponse à une charge d'impulsion qui utilisera maintenant la charge rectangulaire représentée sur la Figure IV.5. Encore une fois la réponse sera divisée en phase de chargement et la phase de vibration libre ultérieure.

La charge d'impulsion rectangle, sera défini par :

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0 & 0 \leq \tau \leq t_1 \\ 0 & \tau > t_1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} : \text{Phase I} \\ : \text{Phase II} \dots \dots \dots (IV.26) \end{array}$$

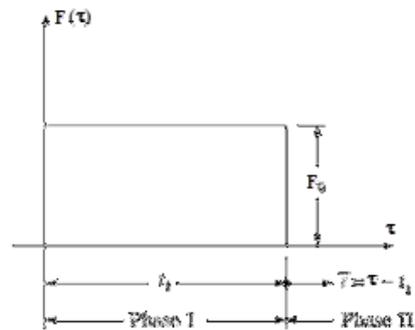


Figure IV.5. Impulsion rectangle.

Chapitre IV :

Phase I--- La charge appliquée soudainement qui reste constante pendant cette phase est appelée chargement par palier. La solution particulière à l'équation de mouvement par intégration par parties (les mêmes étapes que l'excitation semi-sinusoidale), pour ce cas est simplement la flèche statique.

$$y_p = F_0/k \quad R_p = 1, \dots \dots \dots (IV.27)$$

En utilisant ce résultat, la solution du rapport de réponse général, dans laquelle les constantes de la solution de vibration libre complémentaire ont été évaluées pour satisfaire aux conditions initiales au repos, se révèlent facilement être:

$$R(\alpha) = \left[1 - \cos 2\pi \left(\frac{t_1}{T_0} \right) \alpha \right] \text{ pour } 0 \leq \alpha \leq 1 \dots \dots \dots (IV.28)$$

Où encore $\alpha \equiv \tau/t_1$ pour que $\omega_0 \tau = 2\pi(t_1/T_0)\alpha$. Le premier maximum de cette expression se produit quand $(t_1/T_0) \alpha = 1/2$. Si elle doit se produire exactement à la fin de la phase I, c'est-à-dire; $\alpha=1$, alors le rapport t_1/T_0 doit être égale 1/2; dans ce cas, d'après l'équation (IV.28), $R(1/2) = 2$. Comme t_1/T_0 continue à augmenter au-dessus de 1/2, des maxima supplémentaires apparaîtront dans la phase I ayant chacune la valeur $R_{max} = 2$. En tant que t_1/T_0 diminue de 1/2, aucun maximum ne peut se produire dans la phase I conformément à l'équation (IV.28); au lieu, la réponse maximale se produira à la phase II sous les conditions de vibration libre.

Phase II--- En utilisant l'équation :

$$y(t) = y(0) \cos \omega_0 t + \frac{y'(0)}{\omega_0} \sin \omega_0 t, \dots \dots \dots (IV.29)$$

Dans sa forme de rapport réponse et en appliquant l'équation (IV.29) pour trouver $R(1)$ et $\dot{R}(1)$, la vibration libre dans cette phase est donnée par :

$$R(\alpha) = \left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T_0} \right) \cos \left[2\pi \frac{t_1}{T_0} (\alpha - 1) \right] + \left(\sin 2\pi \frac{t_1}{T_0} \right) \sin \left[2\pi \frac{t_1}{T_0} (\alpha - 1) \right] ; \text{ pour } \alpha \geq 1 \dots \dots (IV.30)$$

$$\text{Dans laquelle } \left[2\pi \frac{t_1}{T_0} (\alpha - 1) \right] = \omega_0 (\tau - t_1) \dots \dots \dots ; (IV.31)$$

En prenant la somme vectorielle des deux composants orthogonaux dans cette expression donne :

$$R_{max} = \left[\left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T_0} \right)^2 + \left(\sin 2\pi \frac{t_1}{T_0} \right)^2 \right]^{1/2} ;$$

$$= \left[2 \left(1 - \cos 2\pi \frac{t_1}{T_0} \right) \right]^{1/2} = 2 \sin \pi \frac{t_1}{T_0} ; \dots \dots \dots (IV.32)$$

montrant que la réponse maximale à l'impulsion rectangulaire varie comme une fonction sinus pour : $0 \leq t_1/T_0 \leq 1/2$.

IV.5. Excitation triangle

Le dernier chargement d'impulsion à analyser en détail est l'impulsion triangulaire décroissante montrée à la Figure IV.6.

La charge d'impulsion triangle sera défini par :

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_1}\right) & 0 \leq \tau \leq t_1 : \text{Phase I} \\ 0 & \tau > t_1 : \text{Phase II} \end{cases} \dots(\text{IV.33})$$

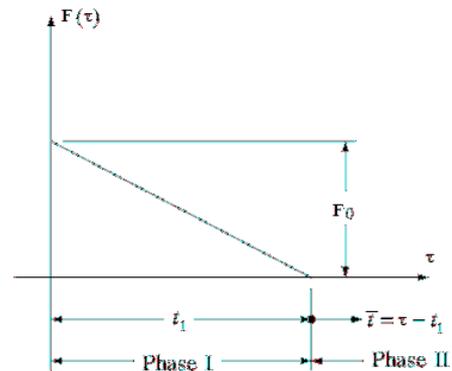


Figure IV.6. Excitation triangulaire.

Phase I - le chargement au cours de cette phase est pour lequel il est facilement démontré que la solution particulière aux équations du mouvement par intégration par parties (les mêmes étapes que l'excitation semi-sinusoïdale), dans sa forme de rapport-réponse, est :

$$R_p(t) = (1 - \alpha) ; \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \dots\dots\dots(\text{IV.34})$$

Dans laquelle $\alpha = \frac{\tau}{t_1}$. En combinant cette solution avec la solution de vibration libre complémentaire et en évaluant ses constantes pour satisfaire les conditions initiales nulles, on trouve:

$$R(\alpha) = \left(\frac{1}{2\pi\frac{t_1}{T_0}}\right) \sin 2\pi\frac{t_1}{T_0}\alpha - \cos 2\pi\frac{t_1}{T_0}\alpha - \alpha + 1 \quad 0 \leq \alpha \leq 1 ; \dots\dots\dots(\text{IV.35})$$

En prenant la première fois la dérivée de cette expression et en la mettant à zéro, on peut montrer que le premier maximum se produira exactement à la fin de la phase I (c'est-à-dire à $\alpha=1$), quand $t_1/T_0= 0,37101$.

En substituant cette valeur à l'équation (IV.35) donne $R(0,37101)=1$. Pour les valeurs de $t_1/T_0 > 0,37101$, la réponse maximale sera dans la phase I et peut être obtenue à partir de l'équation (IV.35) lors de la substitution de la valeur appropriée représentant la condition de vitesse nulle.

Phase II --- Lorsque $t_1/T_0 < 0,37101$, la réponse maximale sera l'amplitude de vibration libre dans la phase II. On le trouve de la même manière que dans les cas précédents en substituant $R(1)$ et $\dot{R}(1)$ obtenus de (IV.35) et sa première expression dérivée, respectivement, dans la forme rapport - réponse de la réponse de vibration libre donnée par L'équation (IV.29). La réponse maximale est alors la somme vectorielle des deux composantes orthogonales de l'équation de vibration libre résultante.

IV.6. Réponse spectrale –spectre de choc-

Dans l'expression dérivée ci-dessus, la réponse maximale produite dans une structure SDOF non amortie par chaque type de chargement impulsif dépend uniquement du rapport de la durée d'impulsion à la période naturelle de la structure, c'est-à-dire sur le rapport t_1 / T_0 est utile pour tracer la valeur maximale du taux de réponse R_{max} en fonction de t_1/T_0 pour diverses formes de chargement impulsif. De telles tracés, représentés sur la figure IV.7, pour trois formes de chargement traitées ci-dessus, sont communément appelées spectres de réponse au déplacement ou simplement en tant que spectre de réponse. En général, des parcelles de ce type peuvent être utilisées pour prédire avec une précision adéquate l'effet maximum à prévoir d'un type donné de charge impulsive agissant sur une structure simple.

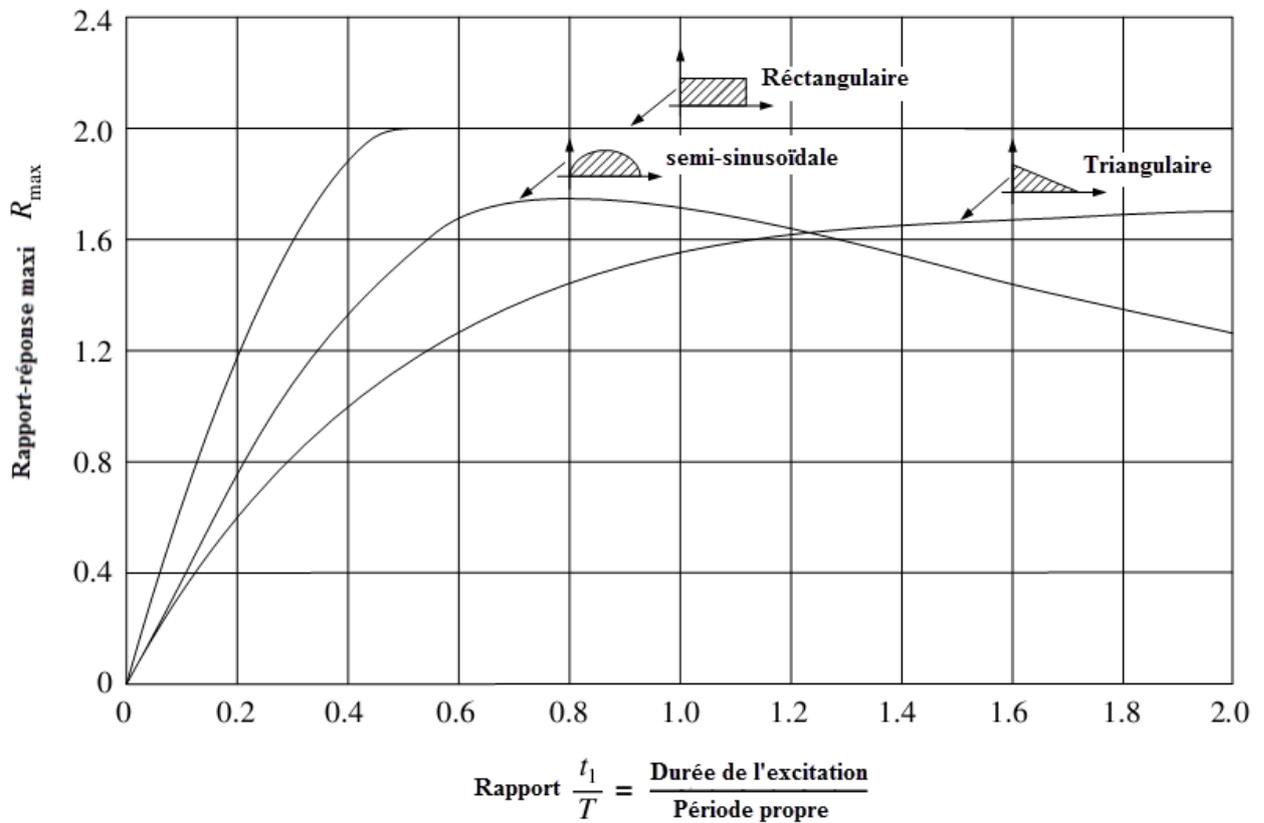


Figure IV.7. Spectre des réponses-déplacement pour les trois types excitations.

Ces spectres de réponse servent également à indiquer la réponse de la structure à une impulsion d'accélération appliquée à sa base. Si l'accélération de base est appliquée $\ddot{y}_g(t)$, elle produit une charge impulsive efficace $P_{eff} = -m\ddot{y}_g(t)$. Si l'accélération de base maximale est indiquée par :

$P_{0,max} = -m \ddot{y}_g(t)$, la charge impulsive effective maximale est le taux de réponse maximal peut maintenant être exprimé comme suit:

$$R_{max} = \left| \frac{y_{max}}{m\ddot{y}_{g0}/k} \right|; \dots \dots \dots (IV.36)$$

Dans lequel seule la magnitude absolue est généralement intéressante. Alternativement, ce taux de rapport-réponse maximum peut s'écrire sous la forme:

$$R_{max} = \left| \frac{\ddot{y}_{max}^t}{\ddot{y}_{g0}} \right| \dots\dots\dots (IV.37)$$

Où \ddot{y}_{max}^t est l'accélération totale maximale de la masse. Cela dépend du fait que dans un système non amorti, le produit de la masse et l'accélération totale doivent avoir une amplitude égale à la force élastique du ressort $k \cdot y_{max}$. En conséquence, il est évident que les tracés de spectre de réponse de la Figure IV.7. peuvent être utilisés pour prédire la réponse d'accélération maximale de la masse m à une accélération impulsive ainsi que la réponse déplacement maximale aux charges impulsives. Lorsqu'ils sont utilisés pour prédire la réponse à l'accélération de base, les tracés sont généralement appelés spectres de choc.

Exemple :

Utilisation des spectres de réponse (ou choc) décrits ci-dessus pour évaluer la réponse maximale de la structure (1 ddl) à la charge impulsive, considérons la structure illustrée à la Figure IV.8, qui représente un bâtiment à un seul étage soumis à la charge triangulaire d'explosion. Pour le poids donné et la rigidité des poteaux de la structure,

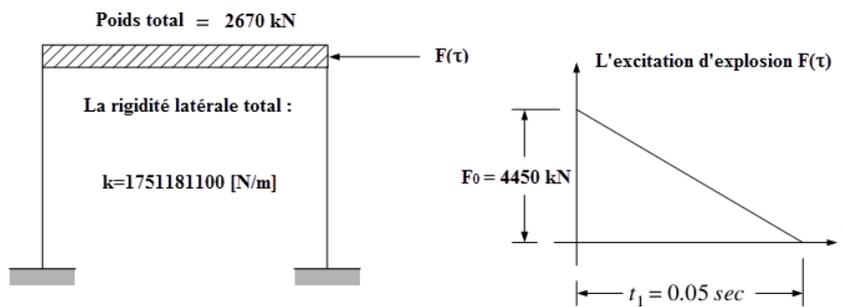


Figure IV.8. Bâtiment (1ddl) soumis à l'excitation d'explosion.

La période naturelle de vibration est :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{267000}{1751181100}} = 0,077 \approx 0,08 [s] ;$$

Le rapport entre la durée de l'impulsion et la période naturelle devient:

$$\frac{t_1}{T_0} = \frac{0,05}{0,08} = 0,63$$

Et à partir de la Figure IV.7, le rapport-réponse maximal est $R_{max} = 1,33$, ainsi, le déplacement maximum sera:

$$y_{max} = R_{max} \left(\frac{F_0}{k} \right) = 1,33 \cdot \left(\frac{4450000}{1751181100} \right) = 0,0034 [m] = 3,4 [mm] ;$$

Et la force élastique totale maximale développée est :

$$F_{e,max} = k \cdot y_{max} = 1751181100 \cdot (0,0034) = 5954,016 [kN],$$

Si l'impulsion de pression de l'explosion n'était que d'un dixième ($t_1 = 0,005$ s), le rapport-réponse maximum pour cette durée d'impulsion ($t_1 / T_0 = 0,063$) serait seulement $R_{max} = 0,2$. Ainsi, pour une impulsion de très courte durée, une grande partie de la charge appliquée est résistée par l'inertie de la structure, et les contraintes produites sont beaucoup plus faibles que celles produites par des charges de plus longue durée.

Chapitre IV :

Il faut garder à l'esprit que bien que les spectres de réponse (ou chocs) décrits ci-dessus aient été développés pour les structures (1 ddl) non amorti, ils peuvent aussi être utilisés pour des structures amortis car l'amortissement dans la plage d'intérêt pratique a peu d'effet sur la réponse maximale produite par des charges impulsives de courte durée.

IV.7. Les forces transmises au sol :

Les mêmes calculs effectués aux structures à 1 ddl forcées harmoniques pour les forces et les rapports de transmission peuvent être appliqués au calcul des structures 1 ddl forcées impulsions (excitées par impulsion), dans le but d'isolation.

Exemple :

Soit la structure représentée par la Figure IV.9. de masse $M=1000$ kg et de rigidité équivalente, $k=9700$ kN/m. Les poteaux ont une section carrée (axa : $a=200$ mm) et une longueur $L=3$ m.

Le bâtiment est soumis à une excitation d'explosion modélisée par un chargement triangulaire appliquée au niveau du plancher. La structure initialement été au repos, calculer :

- L'effort tranchant transmis à la base de la structure ?
- La contrainte normale maximale dans les poteaux ?

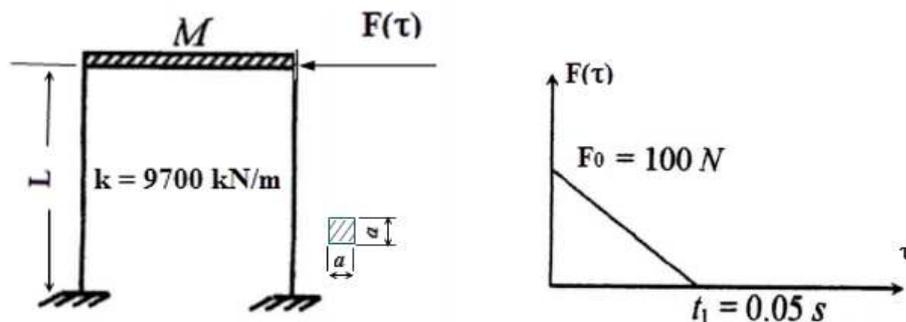


Figure IV.9. Bâtiment (1ddl) soumis à l'excitation d'explosion.

La charge d'explosion est défini par la forme suivante :

$$F(\tau) = \begin{cases} F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_1}\right) & 0 \leq \tau \leq t_1 ; \\ 0 & \tau > t_1 \end{cases}$$

La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{9700000}{1000}} = 98,48 \left[\frac{rd}{s}\right]$;

La période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{6,28}{98,48} = 0,064$ [s] ;

Le rapport $\frac{t_1}{T_0} = \frac{0,05}{0,064} = 0,78 \rightarrow (t_1 \geq 0,4 T_0)$ la réponse maximale se produit en phase I,

$$y(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) ;$$

Pour les conditions initiales au repos , on a :

$$y(0) = 0 \rightarrow A = -\frac{F_0}{k} ;$$

$$\dot{y}(0) = 0 \rightarrow B = \frac{F_0}{\omega_0 k t_1} ;$$

Par substitution, la réponse sera :

$$y(t) = -\frac{F_0}{k} \cos \omega_0 t + \frac{F_0}{\omega_0 k t_1} \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{k} \left(1 - \frac{t}{t_1}\right) ;$$

$$y(t) = \frac{F_0}{k} \left(\frac{1}{\omega_0 t_1} \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t - \frac{t}{t_1} + 1 \right)$$

Recherche de la réponse maximale, on peut utiliser soit la méthode du spectre de choc, où la deuxième méthode qui consiste :

- Trouver t_{max} , par mettre : $\frac{dy}{dt} = 0$, $\frac{F_0}{k} \left(\frac{1}{t_1} \cos \omega_0 t + \omega_0 \sin \omega_0 t - \frac{1}{t_1} \right) = 0$;
 $\frac{1}{t_1} (\cos \omega_0 t - 1 + \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t) = 0 \rightarrow 1 - \cos \omega_0 t = \omega_0 t_1 \sin \omega_0 t$

Et puisque : $1 - \cos \omega_0 t = 2 \sin^2 \frac{\omega_0}{2} t$ et $\omega_0 t_1 \sin \omega_0 t = 2 \omega_0 t_1 \sin \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_0}{2} t \right)$;

$$\text{Donc : } \sin \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) \left[\sin \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) - \omega_0 t_1 \cos \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) \right] = 0 \rightarrow \begin{cases} \sin \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) = 0 \\ \sin \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) - \omega_0 t_1 \cos \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\omega_0}{2} t = n\pi \\ \text{tg} \left(\frac{\omega_0}{2} t \right) = \omega_0 t_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_{max} = \frac{2n\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{2\pi} T_0 = T_0 = 0,064 [s] > t_1 = 0,05 [s] \\ t_{max} = \frac{2}{\omega_0} \text{tg}^{-1}(\omega_0 t_1) = 2,78 \times 10^{-2} [s] < t_1 = 0,05 [s] \end{cases} ;$$

Alors : $t_{max} = 2,78 \times 10^{-2} [s]$, $y_{max} = y(t_{max}) = 1,488 \times 10^{-5} [m] \approx 1,5 \times 10^{-5} [m]$

- L'effort tranchant transmis à la base de la structure :
 $T_{max} = k \cdot y_{max} = 97 \times 10^5 [N/m] \cdot 1,5 \times 10^{-5} [m] = 145,5 [N]$.
- La contrainte normale maximale dans les poteaux :

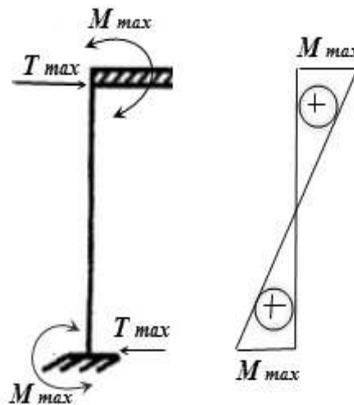


Figure IV.10. Représentation des moments au niveau des poteaux.

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I} \cdot \frac{a}{2} ;$$

$$\text{Avec : } M_{max} = \frac{k}{2} \cdot y_{max} \cdot \frac{h}{2} = \frac{9700 \times 10^3}{2} \cdot 1,5 \times 10^{-5} \cdot \frac{3}{2} = 109,125 [N \cdot m] ;$$

$$I_0 = \frac{a^4}{12} = \frac{0,2^4}{12} = 1,34 \times 10^{-4} [m^4] ;$$

$$\text{Enfin : } \sigma_{max} = \frac{M_{max}}{I_0} \cdot \frac{a}{2} = \frac{109,125}{1,34 \times 10^{-4}} \cdot \left(\frac{0,2}{2} \right) = 81,44 [KPa].$$

IV.8. Les applications pratiques

8.1 Réponse à une excitation non-sinusoïdale

La réponse à une excitation quelconque $F(t)$ correspond au produit de convolution de cette excitation par la réponse impulsionnelle d'une structure dynamique à 1 ddl,

$$x(t) = F(t) \cdot h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) h(t - \tau) d\tau ;$$

Puisque la réponse impulsionnelle est causale ($h(t)=0$ pour $t<0$) ;

Si l'excitation est-elle aussi causale, on pourra écrire :

$$x(t) = \int_0^t F(\tau) h(t - \tau) d\tau .$$

Exemple : La réponse d'une structure dynamique à une force en échelon (fonction de Heaviside) :

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ F_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

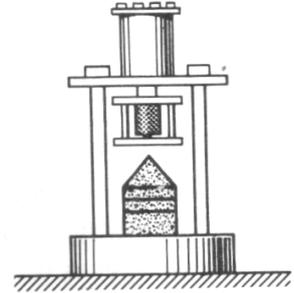


Figure IV.11. Presse d'estampage.

Dans le cas d'un système sous-amorti, la réponse s'écrit :

$$x(t) = \int_{t_0}^t \frac{F_0}{m \omega_D} e^{-\zeta \omega_0(t-\tau)} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau ; \quad \omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} ; \quad \omega_D : \text{la pulsation amortie,}$$

$$x(t) = \frac{F_0}{m \omega_D} e^{-\zeta \omega_0 t} \int_{t_0}^t e^{\zeta \omega_0 \tau} \sin \omega_D(t - \tau) d\tau ;$$

L'intégration de cette fonction conduit à :

$$x(t) = \frac{F_0}{k} - \frac{F_0}{k \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta \omega_0(t-t_0)} \cos[\omega_D(t - t_0) - \varphi] \quad \text{pour } t \geq t_0$$

Avec $\varphi = \arctg \frac{\zeta}{\sqrt{1 - \zeta^2}} ;$

La Figure IV.12. représente l'excitation et la réponse dans cette configuration :

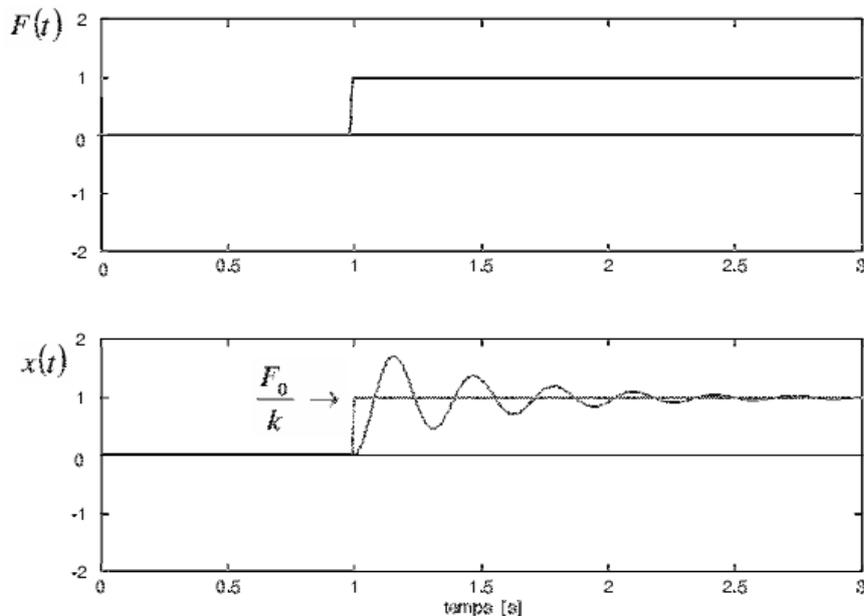
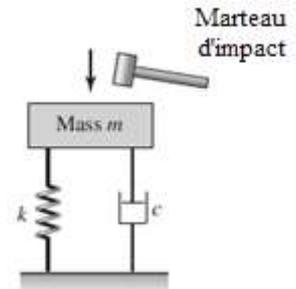


Figure IV.12. La force excitatrice et la réponse d'une structure dynamique à 1 ddl.

$$M = 10 \text{ [kg]}, \quad \omega_0 = 20 \text{ [rd/s]}, \quad \zeta = 0.05.$$

8.2 Réponse d'une structure dynamique linéaire à une série d'impacts :

Un marteau d'impact est utilisé pour appliquer manuellement une impulsion à un modèle d'un système à un seul degré de liberté tel qu'illustré à la Figure IV.13. Dans les expériences, un seul impact est préféré: cependant, il est difficile de réaliser un seul impact et de multiples impacts peuvent se produire. Supposons que pour un système d'une masse de 2 [kg], une rigidité de 8 [N/m] et un coefficient d'amortissement de 2 [Ns/m], un double impact de la forme:



$$f(t) = \delta(t) + 0,5 \delta(t - 1)$$

⇒ Excitation impulse est écrite sous la forme :

$$f(t) = f_0 \delta(t) \rightarrow f_0 = 1 [N],$$

Figure IV.13. Élément d'inertie du système heurté par un marteau d'impact.

se produit. Nous devons déterminer la réponse du système et la comparer à celle obtenue lorsque le deuxième impact à $t = 1$ [s] est absent. Pour les valeurs de paramètres données, la fréquence propre ω_0 et le facteur d'amortissement ζ sont déterminés respectivement, comme :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8 \text{ N/m}}{2 \text{ kg}}} = 2 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right],$$

$$\zeta = \frac{2 \text{ Ns/m}}{2 \times (2 \text{ kg}) \times (2 \frac{\text{rd}}{\text{s}})} = 0,25,$$

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = 2 \sqrt{1 - 0,25^2} = 1,94 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right],$$

La réponse $x(t)$ du système au premier impact qui commence à $t=0$ s - par utilisation des transformées de Laplace-et donnée par :

$$x_1(t) = \frac{f_0}{m\omega_D} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_D t = \frac{1}{2 [kg] * 1,94 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right]} \sin \left(1,94 \left[\frac{\text{rd}}{\text{s}} \right] t \right) = 0,26 e^{-0,5 t} \sin(1,94 t) [m]$$

Avec $x(t) = x_1(t) u(t)$

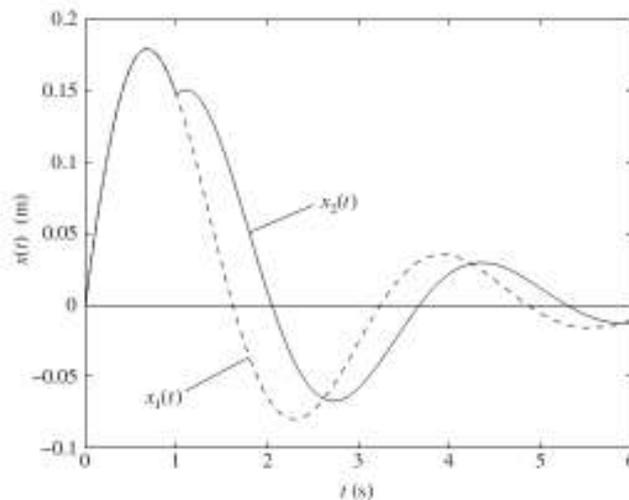


Figure IV.14. Réponses en déplacement à une impulsion unique et deux impulsions séparées d'une seconde.

La réponse de la structure soumis au double impact est donné par :

$$x_2(t) = \underbrace{x_1(t)u(t)}_{\text{Réponse au premier impact}} + \underbrace{0.5x_1(t-1)u(t-1)}_{\text{Réponse au second impact}}$$

$$x(t) = x_1(t)u(t) + (0,26 \times 0,5) e^{-0,5(t-1)} \sin(1,94(t-1))u(t-1) [m] ;$$

$$x(t) = x_1(t)u(t) + 0,13 e^{-0,5(t-1)} \sin(1,94(t-1))u(t-1) [m]$$

La fonction d'échelon unité $u(t-1)$ est utilisée pour indiquer que le second impact affecte la réponse uniquement pour $t \geq 1$ [s]. Avant une seconde, c'est-à-dire avant que le deuxième impact ne se produise, les réponses aux impacts simples et doubles sont identiques, comme le montrent les graphiques des réponses fournies à la Figure IV.14. Cependant, après une seconde, les réponses sont différentes, comme prévu.

8.3 Réponse d'un véhicule à un changement échelon au profil du chemin :

Considérons une voiture modélisée comme montré sur la Figure IV.15. avec une masse de 1100 [kg], une rigidité de la suspension est de 400 [kN/m], et le coefficient d'amortissement de la suspension est 15 [kN.s/m]. Le véhicule roule avec une vitesse v de 64 [km/h] et l'élévation du chemin a est de 0,03 [m]. après qu'il a fait un parcours de 160 [m] à partir de $t=0$ [s].

Déterminer la réponse en déplacements du véhicule ?

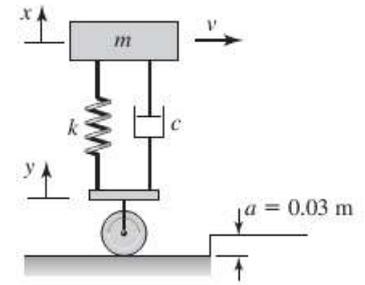


Figure IV.15. Suspension d'un véhicule lors d'un changement brusque du chemin.

Le mouvement du véhicule est gouverné par l'équation différentielle:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y$$

Où : $x(t)$ est la réponse déplacement du véhicule, alors que : $y(t)$ est le mouvement de la base. Notant que le changement de la marche du véhicule dans l'état de la route se fait à :

$$t_0 = (160 \text{ [m]} / 64000 \text{ [m]} / 3600 \text{ [s]}) = 9 \text{ [s]},$$

Le mouvement de base caractérisé par le changement de pas est décrit par:

$$y(t) = a \cdot u(t - t_0)$$

Pour déterminer la réponse déplacement, nous devons trouver la solution de l'équation :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0 a \delta(t - t_0) + a\omega_0^2 u(t - t_0),$$

Où nous avons utilisé le fait que la dérivée d'une fonction d'étape est la fonction d'impulsion; C'est:

$$\frac{du(t-t_0)}{dt} = \delta(t - t_0),$$

Pour les valeurs des paramètres données, le pourcentage d'amortissement est ;

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{k \cdot m}} = \frac{15000 \left(\frac{\text{Ns}}{\text{m}}\right)}{2\sqrt{400000 \cdot 1100}} = 0,358,$$

Puisque le système est sous-amortit, nous pouvons utiliser les équations :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m},$$

Et l'excitation impulsion est définit par : $F(t) = F_0 \delta(t)$,

Avec l'entrée échelon d'un système vibratoire est exprimée comme suit:

$$F(t) = F_0 u(t),$$

où $u(t)$ est la fonction de pas unitaire.

Nous déterminons que $f_0 = 2a\xi\omega_0 m$ et $F_0 = ak$. Alors, la réponse de déplacement est donnée par ;

$$x(t) = \frac{2\xi a}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0(t-t_0)} \sin(\omega_D(t-t_0)) u(t-t_0) + a \left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_0(t-t_0)}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_D(t-t_0) + \varphi) \right] u(t-t_0), (*)$$

où la fonction échelon $u(t-t_0)$ indique que le pas affecte la réponse seulement pour $t > t_0$, pour les valeurs des paramètres données, on constate que :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4 \times 10^5 \frac{N}{m}}{1100 \text{ [kg]}}} = 19,7 \left[\frac{rd}{s} \right],$$

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} = 19,7 \cdot \sqrt{1 - (0,356)^2} = 17,81 \left[\frac{rd}{s} \right];$$

$$\varphi = tg^{-1} \frac{\sqrt{1 - 0,358^2}}{0,358} = 1,21 \text{ [rd]};$$

En substituant ces valeurs dans l'équation (*) et en notant que $a = 0,03 \text{ [m]}$ et $t = 9[s]$, le graphique de la réponse de déplacement du véhicule montré à la Figure IV.16. est obtenu. La réponse du véhicule est à partir la position d'équilibre $x = 0$, avant le changement dû à l'échelon soudainement. Cette collision avec le changement soudain de l'élévation de la route produit des transitoires dans la réponse, qui s'abaissent après un certain temps, et la réponse du véhicule se fixe à la nouvelle position $x = a$.

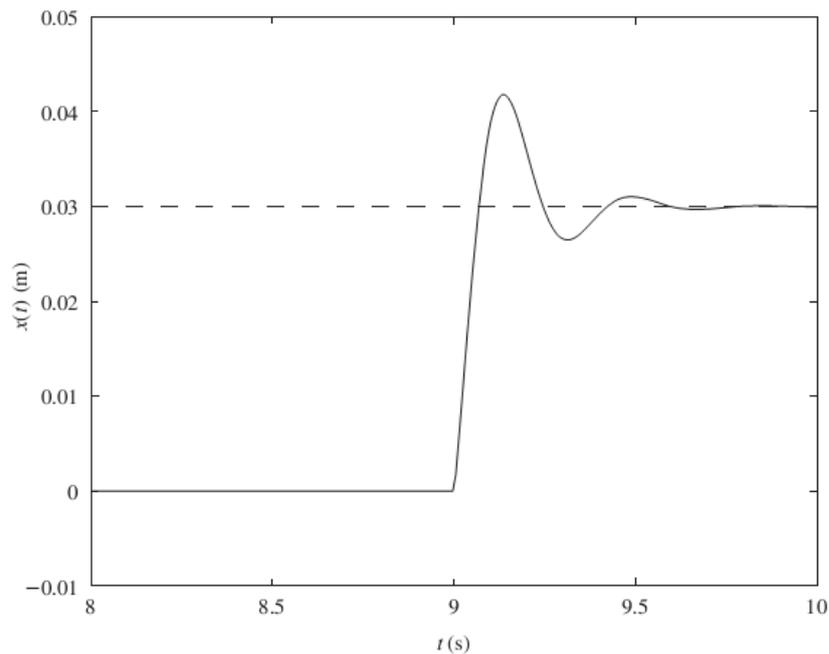


Figure IV.16. La réponse déplacement du véhicule lors de changement échelon dans la chaussée.



Figure IV.17. Atterrissage d'un avion.

8.4 Réponse à une excitation semi- sinusoïdale de la base

L'équation différentielle du mouvement d'une structure à base mobile est donnée par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\zeta\omega_0 \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 2\zeta\omega_0 \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y$$

Qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dx}{d\tau} + x = 2\zeta \frac{dy}{d\tau} + y,$$

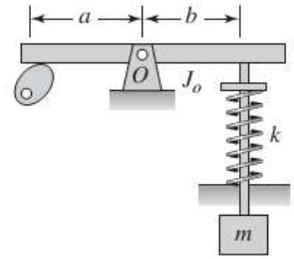


Figure IV.18. Mécanisme soupape et arbre à cames.

Où : $\tau = \omega_0 t$ qui est un paramètre de temps non dimensionnel ; on pose : $z(t) = x(t) - y(t)$,
qui peut s'écrire aussi : $z(\tau) = x(\tau) - y(\tau)$

On suppose que la base est en excitation semi sinus de pulsation $\bar{\omega}$ et d'amplitude y_0 , alors on peut décrire le mouvement de la base par :

$$y(\tau) = y_0 \sin(\Omega_0 \tau) [u(\tau) - u(\tau - \tau_0)] ;$$

Où :

$\tau_0 = \omega_0 t_0 = \frac{\pi\omega_0}{\bar{\omega}} = \pi/\Omega_0$, $\Omega_0 = \bar{\omega}/\omega_0 = T_0/(2t_0)$, $\bar{\omega}t_0 = \pi$, and : $T_0 = 2\pi/\omega_0$ est la période propre de la structure, par substitution ; on trouve :

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dx}{d\tau} + x = y_0 f_b(\tau)$$

Ou : $f_b(\tau) = 2z \sin(W_0 \tau) [\delta(\tau) - \delta(\tau - \tau_0)] + [\sin(W_0 \tau) + 2z W_0 \cos(W_0 \tau)] [u(\tau) - u(\tau - \tau_0)]$

Dont la solution est donnée par l'intégral de convolution avec la variable de temps non dimensionnelle τ ,

$$x(\tau) = \frac{y_0}{k} \int_0^\tau h(\xi, \tau) f_b(\xi) d\xi$$

$$\text{Où : } h(\xi, \tau) = \frac{e^{-\zeta(\tau-\xi)}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \left[\sqrt{1-\zeta^2} (\tau - \xi) \right]$$

Par substitution, on trouve :

$$x(\tau) = \frac{y_0}{k} \left[\int_0^\tau g_b(\xi, \tau) d\xi - u(\tau - \tau_0) \int_{\tau_0}^\tau g_b(\xi, \tau) d\xi \right]$$

Avec : $g_b(\xi, \tau) = [\sin(\Omega_0 \tau) + 2\zeta\Omega_0 \cos(\Omega_0 \tau)] h(\xi, \tau)$

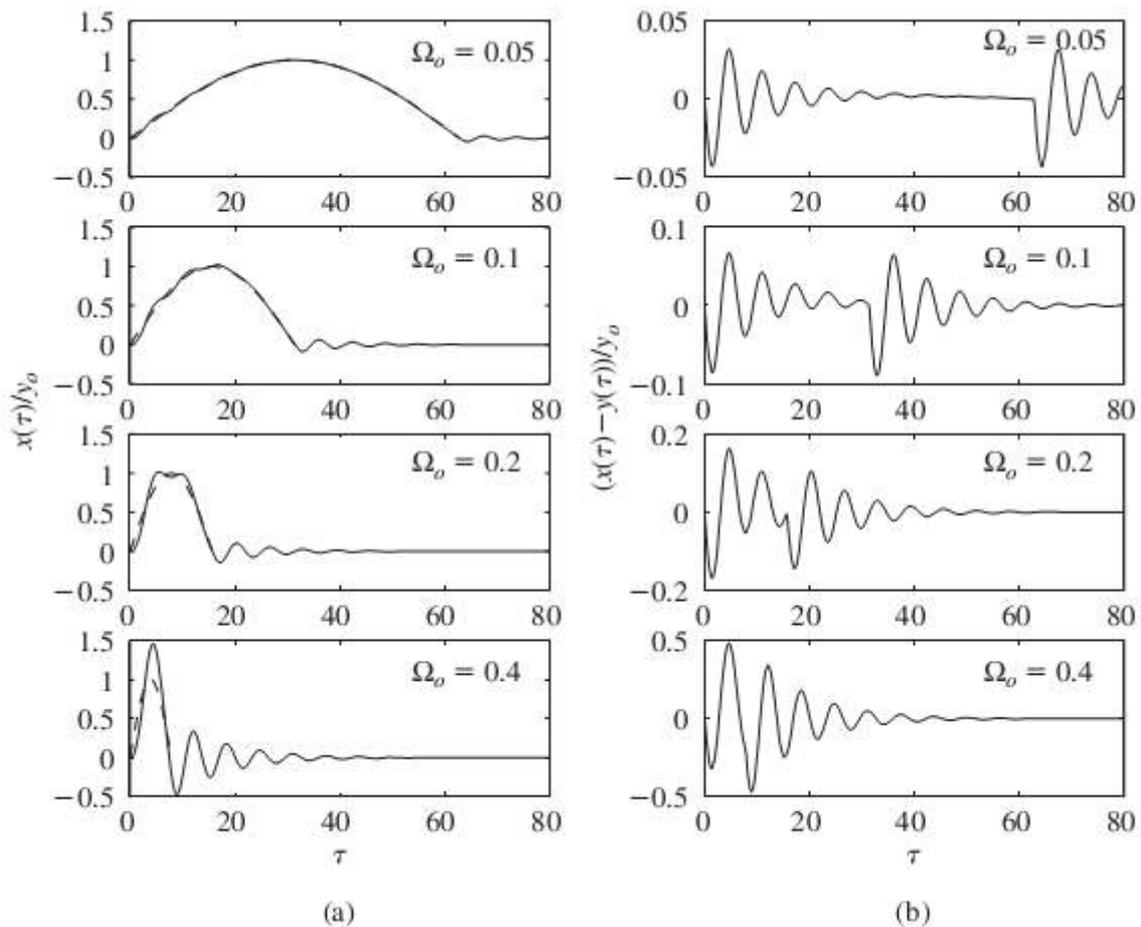


Figure IV.19. Déplacement absolu et déplacement relatif de la masse d’une structure à 1 ddl, soumise à un déplacement de la base excitation semi-sinusoïdale avec $\xi = 0,1$.

L’intégrale est résolue numériquement et les résultats obtenus pour x et z sont montrés sur la Figure IV.19, où nous voyons que si $\Omega_0 \ll 1$, la masse suit le mouvement de la base comme elle était rigidement collée à la base. Quand Ω_0 est proche de 1, la masse amplifie le mouvement de la base avec des grandes balades par rapport à la base. Cet exemple conduit à la directive de conception suivante.

Afin de minimiser l’amplification du mouvement de la base d’un système à 1 degré de liberté, il convient de garder la durée d’impulsion du déplacement appliquée à la base longue par rapport à la période de la fréquence propre du système. Autrement dit, pour une charge d’impulsion donnée, il est préférable d’avoir un système ayant une fréquence naturelle aussi élevée que possible pour minimiser l’amplification du mouvement de base.

8.5 Amplitude de l'impulsion communiquée à la balle :

Une similitude d'étude entre les engins de démolition à boule et le sport de rocketball ou du billard, pour déterminer l'amplitude de l'impulsion communiqué à l'immeuble ou à la balle (Figure IV.20 et IV.21), l'étude est faite dans l'exemple suivant du sport de rocketball pour le calcul de l'amplitude de l'impulsion.



Figure IV.20. Engins de démolition à boule.

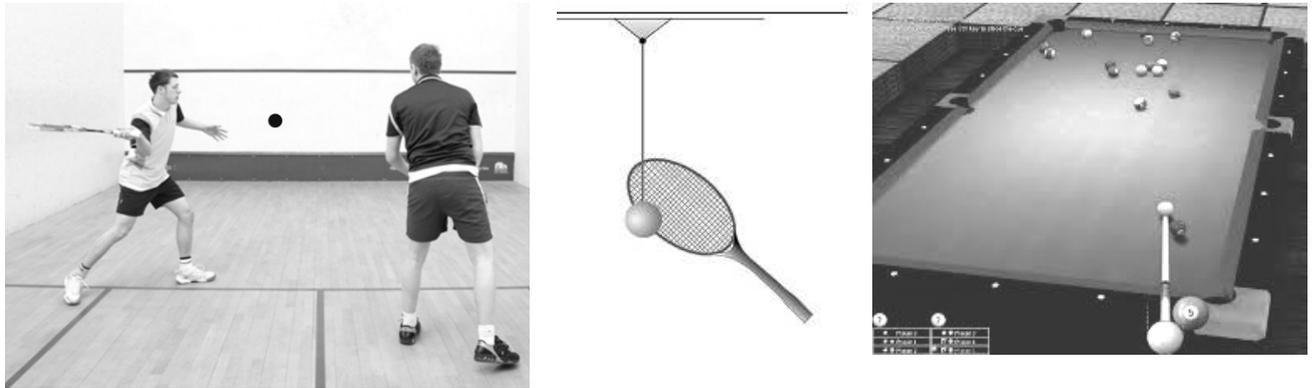


Figure IV.21. Sport du rocketball ou du billard.

Exemple (sport du rocketball) :

Une balle qui pèse 0,45 [Kg] pend dans le plan vertical quand elle est tapée avec une raquette. Après le tapage, on observe que la balle présente un mouvement oscillatoire d'amplitude 0,2 [rd] avec une période de 2 [s]. Déterminer l'impulsion communiquée par la raquette ?

Le chemin parcouru par la balle prend la forme :

$$s(t) = L\theta(t) = I G(t) ;$$

$$\text{Avec } G(t) = \frac{1}{m\omega_0} \sin \omega_0 t H(t),$$

$H(t)$ est la fonction pas (step) de Heaviside.

La balle et le cordon sont équivalents à un pendule de longueur L . La pulsation propre pour des petits mouvements de la balle est :

$$\omega_0 = \sqrt{g/L} ;$$

Par substitution, on trouve :

$$\theta(t) = \frac{I}{m\omega_0 L} \sin(\sqrt{g/L} t) H(t) ;$$

Où I est l'impulsion inconnue communiquée à la balle par la raquette et L la longueur du cordon qui peut être calculé à partir du période propre du mouvement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{g/L}} ; \rightarrow L = \frac{g T^2}{4 \pi^2} = \frac{10 \cdot (2)^2}{4 \cdot (3,14)^2} = 1,01 \text{ [m]}$$

L'amplitude des oscillations observées sont liées à l'amplitude de l'impulsion appliquée par :

$$\|\theta\| = \frac{I}{m\omega_0 L} ;$$

Alors, l'amplitude de l'impulsion communiquée de la raquette à la balle, sera :

$$I = \|\theta\| m\omega_0 L = (0,2) \cdot (0,45) \cdot (\sqrt{10/1,01}) \cdot (1,01) = 0,286 \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right]$$

IV.9. Réponse à une excitation quelconque :

La sollicitation est définie par sa variation temporelle $F(t)$ qui peut toutefois être périodique ou totalement quelconque. Les techniques d'obtention de la réponse diffèrent suivant cette particularité mais s'inspirent des développements présentés précédemment pour la sollicitation harmonique ou impulsive.

9.1 Réponse à une excitation périodique

Une fonction périodique, de période T_p , peut être décomposée en la somme d'un nombre infini d'harmoniques en utilisant les séries de Fourier.

$$F(t) = a_0 + \sum_{p=1}^{\infty} a_p \cos\left(\frac{2\pi p}{T_p} t\right) + \sum_{p=1}^{\infty} b_p \sin\left(\frac{2\pi p}{T_p} t\right) ; \dots \dots \dots \text{(IV.38)}$$

Que l'on peut également écrire de façon condensée en utilisant les nombres complexes :

$$F(t) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} c_p e^{\frac{2i\pi p}{T_p} t} ; \dots \dots \dots \text{(IV.39)}$$

Les coefficients C_p sont les coefficients de Fourier de la fonction $F(t)$, donnés par :

$$c_p = \frac{1}{T_p} \int_0^{T_p} F(t) e^{-\frac{2i\pi p}{T_p} t} dt ; \dots \dots \dots \text{(IV.40)}$$

Tenant compte de la relation linéaire de $F(t)$, la réponse stationnaire de la structure est alors simplement obtenue en résolvant l'équation des vibrations forcées pour chaque harmonique ω_p et en additionnant les réponses ainsi obtenues (principe de superposition des solutions d'une équation différentielle, de 2^{ème} ordre).

9.1.1 Applications :

Les machines de tissage : consulter les vidéos suivantes :

www.youtube.com/watch?v=0K2mOgRqeul.

www.youtube.com/watch?v=IPhuBRjqcCc.

www.youtube.com/watch?v=tGzx-K3Ekrq



Figure IV.22. Machine à coudre avec pédale.

Exemple : Soit une excitation qui correspond à une fonction ayant une période T , telle que $F(t+T)=F(t)$.

Cette fonction peut être représentée par une série de Fourier

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_T t + b_n \sin n\omega_T t), \quad \omega_T = \frac{2\pi}{T}$$

La réponse particulière est

$$x_p(t) = x_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n [a_n \cos(n\omega_T t - \phi_n) + b_n \sin(n\omega_T t - \phi_n)]$$

Avec

$$\rho_n = \frac{1}{m} \{ [\omega_0^2 - (n\omega_T)^2]^2 + (2\zeta\omega_0 n\omega_T)^2 \}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \phi_n = \arctg \frac{2\zeta\omega_0 n\omega_T}{\omega_0^2 - (n\omega_T)^2};$$

La solution particulière $x_0(t)$ satisfait l'équation :

$$m\ddot{x}_0 + c\dot{x}_0 + kx_0 = \frac{a_0}{2} \rightarrow x_0 = \frac{a_0}{2k};$$

Pour obtenir la solution complète, on ajoute la solution de l'équation homogène (la réponse libre). Pour le cas où $0 < \zeta < 1$,

$$x(t) = Ae^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_D t + \theta) + x_p(t)$$

Où A et θ sont déterminés par les conditions initiales : le premier terme représente donc la réponse transitoire et $x_p(t)$ la réponse stationnaire.

Utilisation des transformées de Laplace :

La transformée de Laplace est un outil particulièrement utile pour calculer la réponse des structures dynamiques à un grand nombre d'excitations. C'est aussi une méthode générale pour résoudre les équations différentielles.

9.2 Réponse à une excitation non périodique

Toute sollicitation quelconque $F(t)$ peut être considérée comme égale à la somme d'impulsions $F(\tau) d\tau$, agissant à l'instant $t=\tau$.

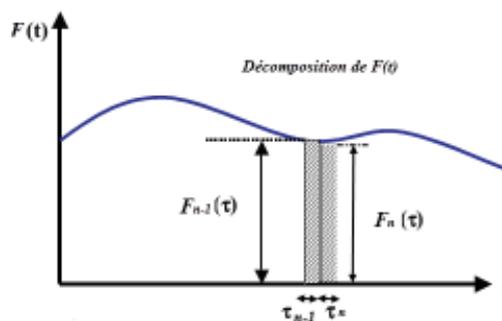


Figure IV.23. Principe d'obtention de l'intégrale de Duhamel.

La réponse à l'instant t est la somme des réponses aux impulsions produites aux temps $\tau < t$, pour une structure dynamique amortie, soit :

$$y(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t F(\tau) e^{-\zeta\omega_0(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau ; \dots \dots \dots (IV.41)$$

Cette intégrale de convolution est connue sous le nom d'intégrale de Duhamel caractérisant la réponse d'une structure simple initialement au repos à une excitation externe quelconque (non périodique) $F(t)$. si $F(t)$ n'est

pas connue analytiquement, ou est représentée par une fonction compliquée, l'intégrale de Duhamel doit être évalué numériquement. Cette intégration numérique ne se révèle pas particulièrement compétitive et il est souvent préférable d'intégrer directement l'équation différentielle régissant l'équilibre dynamique de la structure.

IV.10. Les structures dynamiques généralisées à 1 ddl

Dans les chapitres précédents nous avons concentré sur l'étude des structures dynamiques à un seul degré de liberté impliquant une seule masse ou translation d'une masse distribuée rigide qui est exactement équivalente à une masse localisée en un seul point. Une fois que la rigidité du système a été déterminée, l'équation du mouvement a été facilement formulée et les procédures de résolution ont été présentées dans les chapitres précédents.

Dans ce chapitre, nous développons l'analyse des structures dynamiques plus complexes traités comme des systèmes à un seul degré de liberté, d'où le nom de structures généralisées à 1 ddl. L'analyse fournit des résultats exacts pour un assemblage de corps rigides sur des appuis de façon qu'ils fléchissent dans une seule direction, mais seulement les résultats approximatifs pour des structures à masse et flexibilité distribuées. Dans ce dernier cas, la pulsation naturelle approximative dépend de la forme de la fléchée supposée. La même estimation de pulsation est également déterminée par la méthode classique de Rayleigh, basée sur le principe de conservation de l'énergie, cette méthode fournit également un aperçu de l'erreur dans la pulsation naturelle estimée.

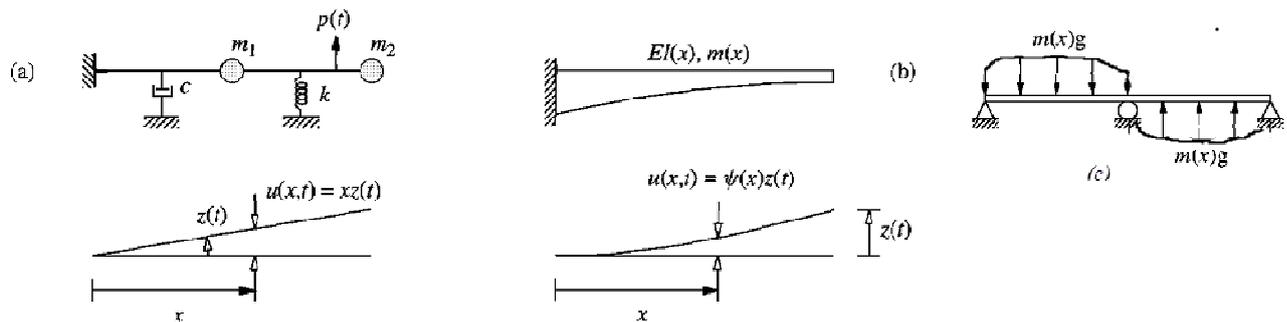


Figure .IV.24. Structures dynamiques généralisées.

Puisque la barre est rigide dans les deux exemples montrées sur la Figure IV.24 (a) et (b), sa flèche peut être relié à une *coordonnée généralisée* $z(t)$ est peut être exprimée par le produit de deux fonctions :

$$u(x,t) = \psi(x) \cdot z(t), \dots \dots \dots (IV.42)$$

Avec : $\psi(x)$ appelée fonction de forme.

Les deux structures sont appelées des structures dynamiques généralisées parce que dans chaque cas, les déplacements à tous les emplacements sont définis en termes de la coordonnée généralisée $z(t)$ à travers la fonction de forme $\psi(x)$. Nous montrerons que l'équation de mouvement pour le système 1 ddl généralisé est de la forme :

$$\bar{m}\ddot{z} + \bar{c}\dot{z} + \bar{k}z = \bar{p}(t) ; \dots \dots \dots (IV.43)$$

Ou \bar{m} , \bar{c} , \bar{k} et $\bar{p}(t)$ sont comme étant la masse généralisée, l'amortissement généralisé, la rigidité généralisée et la force généralisée : ces propriétés généralisées sont associés au déplacement généralisé choisi $z(t)$.

Les structures avec des masses et des rigidités distribuées : nous pouvons utiliser les formules :

$$\begin{cases} \bar{m} = \int_0^L m(x) [\psi(x)]^2 dx \\ \bar{k} = \int_0^L EI(x) [\psi''(x)]^2 dx \end{cases} \dots \dots \dots (IV.44)$$

La pulsation propre avec déplacement généralisé sera : $\omega_0^2 = \frac{\bar{k}}{\bar{m}} = \frac{\int_0^L EI(x)[\psi''(x)]^2 dx}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx}$;.....(IV.45)

Pour une force généralisée : $\bar{p}(t) = \int_0^L p(x, t)\psi(x) dx$;.....(IV.46)

La pulsation propre avec le déplacement $u(x)$ se calculera par :

$$\omega_0^2 = \frac{g}{z_0} \cdot \frac{\int_0^L m(x)\psi(x) dx}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx} = g \cdot \frac{\int_0^L m(x)u(x) dx}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx} \dots\dots\dots(IV.47)$$

Ou bien :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{z_0} \cdot \frac{\sum p_j \psi(x_j)}{\int_0^L m(x)[\psi(x)]^2 dx} = \frac{\sum p_j u(x_j)}{\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx} \dots\dots\dots(IV.48)$$

La méthode de résolution de ce type de problèmes sont traités par les exemples suivants ;

Exemple 1:

Considérons la structure dynamique représentée sur la Figure IV.25., constituée d'une barre rigide supportée par un point d'appui en O (pivot), avec un ressort et un amortisseur fixés soumis à la force $p(t)$. La masse m_1 de la partie OB de la barre est répartie uniformément sur sa longueur. Les parties OA et BC de la barre sont sans masse, mais une plaque circulaire uniforme de masse m_2 est attachée au milieu de BC. Sélectionnant la rotation antihoraire autour du point d'appui comme déplacement généralisé et compte tenu des petits déplacements ;

- Formuler l'équation de mouvement pour ce système généralisé à 1ddl, déterminer la pulsation naturelle des vibrations et le taux d'amortissement ?
- Evaluer la réponse dynamique du système sans amortissement qui a subit à une charge externe appliquée P_0 .
- Comment l'équation du mouvement changerait-elle avec une force axiale sur la barre horizontale, Quelle est la charge de flambage?

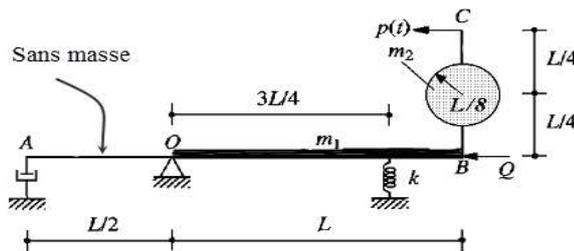


Figure .IV.25. Bar rigide sur pivot.

1. Détermination de la fonction de forme : la barre en forme de L tourne autour du point d'appui en O. En supposant de petites déviations, la flèche est représentée sur la Figure IV.26.

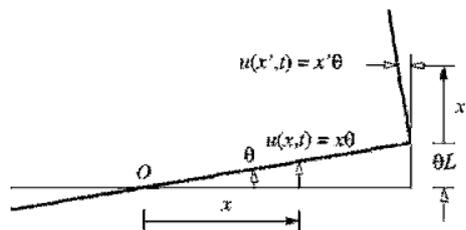


Figure .IV.26. La flèche de la barre en forme L.

- Traçage du diagramme de corps libre et écrire l'équation d'équilibre:

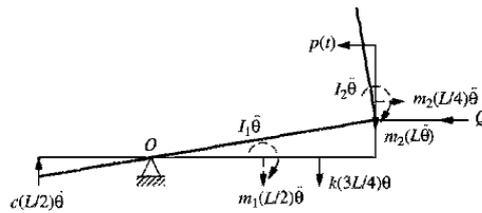


Figure .IV.27. Les forces et les moments agissants sur la barre en forme L.

La Figure IV.27, montre les forces dans le ressort et l'amortisseur associées aux déplacements de la Figure IV.26, ainsi que les forces d'inertie. Posant la somme des moments de toutes les forces autour de O à zéro donne:

$$J_1 \ddot{\theta} + \left(m_1 \frac{L}{2} \ddot{\theta} \right) \frac{L}{2} + J_2 \ddot{\theta} + (m_2 L \ddot{\theta}) L + \left(m_2 \frac{L}{4} \ddot{\theta} \right) \frac{L}{4} + \left(c \frac{L}{2} \dot{\theta} \right) \frac{L}{2} + \left(k \frac{3L}{4} \theta \right) \frac{3L}{4} = p(t) \frac{L}{2}$$

Substituant :

$J_1 = m_1 L^2 / 12$ et $J_2 = m_2 (L/8) / 2$ (changement de repère), on aura :

$$\left(\frac{m_1 L^2}{3} + \frac{137}{128} m_2 L^2 \right) \ddot{\theta} + \frac{c L^2}{4} \dot{\theta} + \frac{9 k L^2}{16} \theta = p(t) \frac{L}{2} ;$$

L'équation de mouvement sera :

$$\bar{m} \ddot{\theta} + \bar{c} \dot{\theta} + \bar{k} \theta = \bar{p}(t) ;$$

Avec : $\bar{m} = \left(\frac{m_1}{3} + \frac{137}{128} m_2 \right) L^2$; $\bar{c} = \frac{c L^2}{4}$; $\bar{k} = \frac{9 k L^2}{16}$ et $\bar{p}(t) = p(t) \frac{L}{2}$

3. Détermination de la pulsation naturelle et du taux d'amortissement :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\bar{k}}{\bar{m}}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{\bar{c}}{2\sqrt{\bar{k}\bar{m}}} ;$$

4. La solution recherchée est :

$$\theta(t) = \frac{\bar{p}_0}{\bar{k}} (1 - \cos \omega_0 t) = \frac{8 p_0}{9 k L} (1 - \cos \omega_0 t)$$

Avec en considération que :

$$\bar{p}(t) = \frac{p(t) L}{2} = \frac{p_0 L}{2} \equiv \bar{p}_0$$

5. Détermination des déplacements :

$$u(x, t) = x \theta(t) \quad \text{et} \quad u(x', t) = x' \theta(t) ;$$

6. Inclure une force axiale : dans la position déplacée de la barre, la force axiale Q introduit un moment antihoraire = $QL\theta$. ainsi l'équation devient:

$$\bar{m} \ddot{\theta} + \bar{c} \dot{\theta} + (\bar{k} - QL) \theta = \bar{p}(t)$$

Une force axiale compressive diminue la rigidité du système et donc sa fréquence propre. Ceux-ci deviennent zéro si la force axiale est:

$$Q_{cr} = \frac{\bar{k}}{L} = \frac{9 k L}{16} ; \text{ c'est la charge axiale critique ou de flambage pour le système.}$$

Exemple 2:

Estimer la pulsation propre d'une poutre en porte-à-faux uniforme en supposant que la fonction de forme est obtenue à partir de la flèche statique due à une charge p à l'extrémité libre?

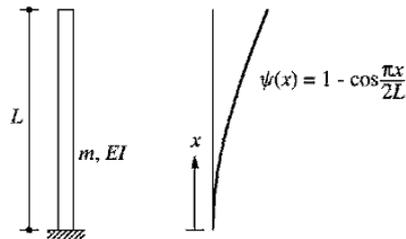


Figure .IV.28. Poutre en porte à faux uniforme.

1. Détermination des déformations: avec l'origine à l'extrémité fixée;

$$u(x) = \frac{p}{6EI} (3Lx^2 - x^3) ;$$

2. Détermination de la pulsation propre :

$$\sum_j p_j u'(x_j) = pu(L) = p^2 \frac{L^3}{3EI} ;$$

$$\int_0^L m(x)[u(x)]^2 dx = m \frac{p^2}{(6EI)^2} \int_0^L (3Lx^2 - x^3) dx = \frac{11p^2}{420} \cdot \frac{mL^7}{(EI)^2}$$

Ce qui nous donne :

$$\omega_0 = \frac{3.57}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \left[\frac{rd}{s} \right] .$$

Exemple 3:

Un pont simple de masse m de longueur L et possédant une rigidité en flexion " EI " .une charge de roue unique p_0 se déplace sur le pont à une vitesse uniforme de v , comme montré dans la Figure IV.29. Négliger l'amortissement et supposer que la fonction de forme est comme $\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$.

- Déterminer une équation pour la flèche à mi-portée en fonction du temps.

Les propriétés du pont sont $L = 200$ [m], $m = 0.3416$ [kg], $I = 700$ m⁴, et $E = 576000$ [N/m²]

- si $v = 2.241 \times 10^{-5}$ [km/h], déterminer le facteur d'impact défini comme le rapport de déflexion maximum à mi-portée à la déflexion statique ?

On suppose que la masse de la roue est petite devant à la masse du pont, et peut être considérée négligeable.

1. Détermination de la masse généralisée, rigidité généralisée et la pulsation propre :

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) ; \psi''(x) = -\frac{\pi^2}{L^2} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

$$\bar{m} = \int_0^L m \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{mL}{2} ;$$

$$\bar{k} = \int_0^L EI \left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)^2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} dx = \frac{\pi^4 EI}{2L^3} ;$$

$$\omega_0 = \frac{\bar{k}}{\bar{m}} = \frac{\pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \left[\frac{rd}{s} \right],$$

2. Détermination de la force généralisée :

Une charge p_0 qui traverse le pont avec une vitesse v prend un temps de : $t_d = \frac{L}{v}$ pour passer le pont. Pour trouver la position de la roue a chaque instant, la courbe du parcours est représenté sur la Figure IV.29. (b) :

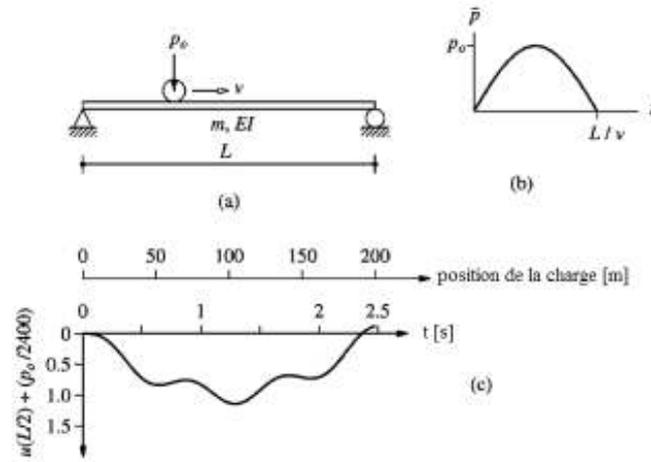


Figure .IV.29. La réponse $u(x,t)$ de la charge traversant le pont.

Le déplacement de la charge sur le pont peut être décrite mathématiquement par :

$$p(x, t) = \begin{cases} p_0 \delta(x - vt) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

Où $\delta(x - vt)$ est la fonction de Dirac centrée sur le point : $x = vt$, la charge généralisée sera :

$$\bar{p}(t) = \int_0^L p(x, t) \psi(x) dx = \begin{cases} \int_0^L p_0 \delta(x - vt) \sin(\pi x/L) dx & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} ;$$

$$= \begin{cases} p_0 \sin(\pi vt/L) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases} = \begin{cases} p_0 \sin(\pi t/t_d) & 0 \leq t \leq t_d \\ 0 & t \geq t_d \end{cases}$$

La force généralisée est une excitation semi-sinusoidale.

3. La solution de l'équation du mouvement :

$$\bar{m}\ddot{z} + \bar{k}z = \bar{p}(t)$$

La réponse à une excitation sinusoidale déjà étudié précédemment est :

$$\begin{cases} \frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{2\pi t}{T_0} - \frac{2\pi t}{T_0} \cos \frac{2\pi t}{T_0} \right) & t \leq t_d \\ \frac{u(t)}{(u_{st})_0} = \frac{(T_0/t_d) \cos(\pi t_d/T_0)}{(T_0/2 t_d)^2 - 1} \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T_0} - \frac{1}{2} \frac{t}{T_0} \right) \right] & t \geq t_d \end{cases}$$

en substituant $u(t)$ par $z(t)$, avec : $t_d = \frac{L}{v}$; $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$; $(z_{st})_0 = \frac{p_0}{k} = \frac{2p_0}{mL\omega_0^2}$;

on aura :

$$\begin{cases} z(t) = \frac{2p_0}{mL} \cdot \frac{1}{\omega_0^2 - (\pi v/L)^2} \left(\sin \frac{\pi vt}{L} - \frac{\pi v}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t \right) & t \leq L/v \\ z(t) = -\frac{2p_0}{mL} \frac{(2\pi v/\omega_0 L) \cos(\omega_0 L/2v)}{\omega_0^2 - (\pi v/L)^2} \sin[\omega_0(t - L/2v)] & t \geq L/v \end{cases}$$

4. La flèche à mi-portée :

$$u(x, t) = z(t)\psi(x) = z(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{L} ;$$

A mi-portée : $x=L/2$;

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = z(t) \cdot \sin \frac{\pi x}{L} = z(t) ,$$

5. Application numérique :

$$m = 0.3416 \text{ [kg]} ;$$

$$EI = 576,000 \times 700 = 4.032 \times 10^8 \text{ [N.m}^2\text{]} ;$$

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{(200)^2} \sqrt{\frac{4.032 \times 10^8}{0.3416}} = 8.477 \text{ [rd/s]} ;$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0.74 \text{ [s]} ;$$

$$v = 2.241 \times 10^{-5} \left[\frac{km}{h} \right] = 80.67 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$\frac{\pi v}{L} = 1.267 ;$$

$$t_d = \frac{L}{v} = \frac{200}{80.67} = 2.476 \text{ [s]} > \frac{T_0}{2} = 0.37 \text{ [s]}$$

$$u\left(\frac{L}{2}, t\right) = \frac{2p_0}{(0.3416)200} \cdot \frac{1}{(8.477)^2 - (1.267)^2} \left(\sin 1.267 t - \frac{1.267}{8.477} \sin 8.477t \right) ;$$

$$= \frac{p_0}{2400} \cdot (\sin 1.267 t - 0.1495 \sin 8.477t) .$$

D'après la courbe de la Figure IV.29. (c), la flèche dynamique maximale à mi- portée sera :

$$u_0 = \left(\frac{p_0}{2400} \right) (1.147) = 0.0004779 p_0,$$

La flèche statique à mi- portée peut être calculée par la formule :

$$u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p_0 L^3}{48EI} = \frac{p_0}{2419} = 0.0004134 p_0 ;$$

Le facteur d'impact qui est le rapport entre les flèche est de : 1.156 (la charge statique doit être augmentée de 13.5% pour que l'effet dynamique est pris en considération).

Chapitre 8 :

Les structures dynamiques discrètes à N ddl

Les vibrations libres & forcées

V.1. Introduction

Une structure dynamique discrète à n degrés de liberté est décrite par un ensemble de n équations différentielles ordinaires simultanées du second ordre. Le système aura des pulsations naturelles tels les degrés de liberté, un mode de vibration est associé à chaque pulsation naturelle.

Puisque les équations du mouvement sont couplées, les mouvements des masses sont la combinaison des mouvements des modes individuels. Si les équations sont découplées par le bon choix de coordonnées, chaque mode peut être examiné en tant qu'un degré de liberté indépendant du système.

La règle générale pour le calcul du nombre de degrés de liberté d'une structure dynamique discrétisée peut être indiquée comme suit :

Nombre de degré de liberté d'une structure = Nombre des masses (points matériels) de la structure discrétisée X nombre de type de mouvement possible de chaque masse = Nombre des pulsations propres.

V.2 La démarche à suivre dans l'étude d'une structure dynamique à nddl :

Les calculs se font à l'aide d'un outil de traitement numérique « ordinateur », la démarche de l'étude passe par les étapes suivantes :

2.1. Discrétisation de la structure dynamique en n degrés de liberté avec plusieurs systèmes dynamique élémentaires couplés,

2.2. La mise en équations différentielles du système discret : par le biais des théorèmes généraux ou des équations de Lagrange. Afin d'établir par la suite les matrices masses et raideurs qui permettent le calcul des pulsations et des modes propres, et de la matrice d'amortissement visqueux et du vecteur force excitatrices pour le calcul des réponses de la structure dynamique.

Le système d'équations différentielles du mouvement peut être écrit sous forme matricielle :

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [c]\dot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{f}(t); \dots\dots\dots(V.1)$$

Où : [m], [c], [k] sont appelés les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, respectivement.

1/ Pour avoir les pulsations et les modes propres : on considère l'ensemble du système de la structure conservatif : $[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{0}$,(V.2)

les solutions recherchés sont de la forme : $x(t) = X \cos \omega t$ et $x(t) = -\omega^2 x(t)$,(V.3)

ce qui nous permet d'avoir la linéarité du système d'équations différentielles.

On aura : $[m]^{-1}[k]\{X\} = \omega^2\{X\}$

Nous serons devant un problème de valeurs et vecteurs propres à résoudre par l'une des méthodes :

2.3. Méthode directe (méthode modale):

Il faut trouver les solutions du système d'équations, écrit sous la forme:

$$([k] - [m]\omega^2)\{X\} = \{0\}; \text{ on pose : } z = \omega^2; \text{ alors le système devient : } ([k] - [m]z)\{X\} = \{0\} \dots(V.4)$$

Si les deux matrices sont définies comme des nombres physiques positifs, z_i sont des nombres réels et positifs.

Si le vecteur $\{X\}$ est nul, la solution est triviale (à éviter), donc ; le vecteur $\{X\}$ sera non nul que si et seulement si ; le système d'équations $([k] - [m]z)$ soit singulier $\rightarrow \det ([k] - [m]z) = 0 \dots\dots\dots(V.5)$

Chapitre V :

On obtiendra alors un polynôme d'ordre n en z . Pour trouver les valeurs des pulsations propres z_i , c'est comme la recherche des **racines d'un polynôme d'ordre n** . « méthode de Newton, ... ».

A chaque valeur de z_i correspond un vecteur (mode) propre $\{X\}$. Ces modes seront orthogonaux si :

$$\{X\}^T [k] \{X\} = z_i \delta_{ij} \dots \dots \dots (V.6)$$

$$\{X\}^T [m] \{X\} = \delta_{ij} \dots \dots \dots (V.7)$$

On dit que les modes propres pour $[k]$ sont orthogonaux et pour $[m]$ sont orthonormés. Qui permettent par la suite de construire les matrices masse modale, rigidité modale et amortissement modale ($\{c\} = \alpha[m] + \beta[k]$), afin d'avoir un système d'équations différentielles découplées pour trouver la réponse forcée de la structure dynamique.

La réponse forcée est acquise, en prenant en considération la matrice de l'amortissement et le vecteur force excitatrice, et admettre une décomposition en série de Fourier / où les transformées de Laplace de la force et en posant comme solution recherchée une forme similaire à l'excitation.

2.4. Méthodes indirectes (itératives) de recherche des pulsations et modes propres :

Pour rechercher les pulsations et les modes propres des systèmes à plusieurs degrés de liberté, les méthodes itératives sont les plus utilisés parmi eux, on peut citer :

- **a) La formule de Dunkerley :**

La formule de Dunkerley donne la valeur approximative de la pulsation fondamentale d'une structure composite en fonction des pulsations propres de ses composantes. Elle est dérivée en utilisant le fait que les pulsations naturelles supérieures de la plupart des systèmes vibratoires sont grandes comparées à leurs pulsations fondamentales. Pour dériver la formule de Dunkerley, considérons une structure générale de n degré de liberté dont les valeurs propres peuvent être déterminées en résolvant l'équation fréquentielle;

$$|-[k] + [m]\omega^2| = 0 \dots \dots \dots (V.8)$$

Ou bien :
$$\left| -\frac{1}{\omega^2} [I] + [f][m] \right| = 0 \dots \dots \dots (V.9)$$

$[f]$: matrice de flexibilité.

Après développement nous allons trouver :
$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx f_{11} m_1 + f_{22} m_2 + \dots + f_{nn} m_n \dots \dots \dots (V.10)$$

Cette dernière expression est appelée la formule de Dunkerley ; qui peut être écrite aussi :

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \frac{1}{\omega_{10}^2} + \frac{1}{\omega_{20}^2} + \dots + \frac{1}{\omega_{n0}^2} \dots \dots \dots (V.11)$$

Ou $\omega_{i0} = (1/f_{ii} m_i)^{1/2} = (k_{ii}/m_i)^{1/2}$ indique les pulsations propres pour un système à un seul degré de liberté de masse m_i et de rigidité k_{ii} , $i=1, 2, \dots, n$.

Exemple

Estimer la pulsation propre fondamentale d'une poutre soutenue par des appuis simples et portante de trois masses identiques équidistantes, comme indiqué sur la Figure.V.1.

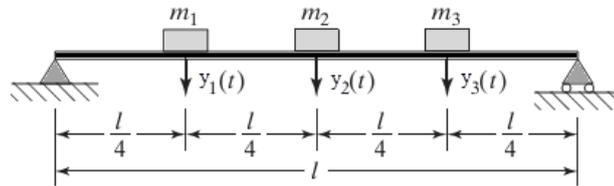


Figure .V.1. Poutre portante de trois masses identiques équidistantes.

Les coefficients d'influence de la matrice de flexibilité sont nécessaires pour appliquer la formule de Dunkerley, qui sont :

$$f_{11} = f_{33} = \frac{3}{256} \cdot \frac{l^3}{EI} \text{ et } f_{22} = \frac{1}{48} \cdot \frac{l^3}{EI}, \text{ posons : } m_1=m_2=m_3=m, \text{ qui donne :}$$

$$\frac{1}{\omega_1^2} \approx \left(\frac{3}{256} + \frac{1}{48} + \frac{3}{256} \right) \frac{l^3}{EI} = 0.04427 \frac{l^3}{EI} \rightarrow \omega_1 \approx 4.75375 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \left[\frac{rd}{s} \right].$$

• **b) La méthode de Rayleigh :**

La méthode de Rayleigh peut être utilisée pour trouver la valeur approximative de la pulsation naturelle fondamentale d'un système discret. La méthode est basée sur le principe de Rayleigh, qui peut être énoncé comme suit:

La pulsation de vibration d'un système conservateur vibrant autour d'une position d'équilibre a une valeur stationnaire au voisinage d'un mode naturel. Cette valeur stationnaire, en effet, est une valeur minimale au voisinage du mode naturel fondamental.

Nous allons maintenant dériver une expression pour la valeur approximative de la première pulsation naturelle d'un système multi-degré de liberté selon la méthode de Rayleigh.

Les énergies cinétique et potentielle du système discret à n degrés de liberté sont exprimées par :

$$T = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T [m] \dot{\vec{x}} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{2} \vec{x}^T [m] \vec{x}, \dots\dots\dots(V.12)$$

on suppose la solution est harmonique du mouvement : $\vec{x} = \vec{X} \cos \omega t \dots\dots\dots(V.13)$

Le système est considéré conservatif, ce qui permet d'égaliser le maximum de l'énergie cinétique au maximum de l'énergie potentielle:

$$T_{max} = V_{max} \rightarrow T_{max} = \frac{1}{2} \vec{X}^T [m] \vec{X} \omega^2, \quad V_{max} = \frac{1}{2} \vec{X}^T [k] \vec{X} \dots\dots\dots(V.14)$$

Alors : $\omega^2 = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}}$, ce rapport est appelé le quotient de Rayleigh et il est noté $R(\vec{X})$.

Exemple

Estimer la pulsation propre fondamentale des vibrations d'une structure comme indiqué sur la Figure.V.2.

Suppose que : $m_1=m_2=m_3=m$, $k_1=k_2=k_3=k$ et le mode propre est : $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

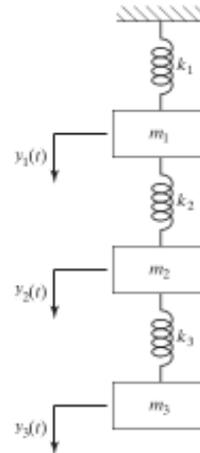


Figure .V.2. Structure dynamique à trois degrés de liberté.

La matrice de masse est : $[m] = m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, la matrice de rigidité est : $[k] = k \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

Par substitution dans la formule de Rayleigh :

$$R(\vec{X}) = \omega^2 = \frac{\vec{X}^T [k] \vec{X}}{\vec{X}^T [m] \vec{X}} = \frac{(1 \ 2 \ 3)k \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{(1 \ 2 \ 3)m \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}} = 0.2143 \frac{k}{m}, \rightarrow \omega_1 = 0.4629 \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\frac{rd}{s} \right].$$

Cette valeur est plus grande que la valeur exacte qui est de $0.4450 \sqrt{\frac{k}{m}}$ et que le mode exacte fondamental

$$\text{est : } \vec{X} = \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{pmatrix}.$$

Pulsations fondamentales (propres) des poutres et des arbres :

Bien que la procédure décrite ci-dessus s'applique à tous les systèmes discrets, une équation plus simple peut être dérivée pour la pulsation fondamentale de la vibration latérale d'une poutre ou d'un arbre portant plusieurs masses telles que des poulies, des engrenages ou des volants-moteur. Dans ce cas, la courbe de la flèche statique est utilisée comme une approximation de la courbe de la flèche dynamique.

Considérons un arbre portant plusieurs masses, comme le montre la Figure.V.3.

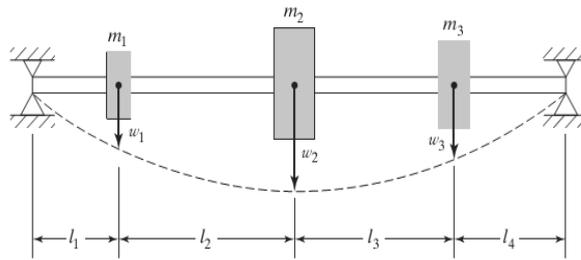


Figure .V.3. Arbre portant des masses.

L'arbre est supposé avoir une masse négligeable. L'énergie potentielle du système est l'énergie de déformation de l'arbre dévié, qui est égale au travail effectué par les charges statiques. Ainsi :

$$V_{max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i g w_i \dots \dots \dots (V.15)$$

où : $m_i g$ (*poinds*) est la charge statique due à la masse m_i et w_i est la flèche total de la masse m_i due à toutes les masses.

$$T_{max} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n (m_i w_i^2) \dots \dots \dots (V.16)$$

par égalisation des énergies, on obtient : $\omega = \left(\frac{g \sum_{i=1}^n m_i w_i}{\sum_{i=1}^n m_i w_i^2} \right)^{1/2} \dots \dots \dots (V.17)$

Exemple

En utilisant la formule de Rayleigh, estimer la pulsation propre fondamentale des vibrations latérales d'un arbre portant trois (rotors) masses, comme indiqué sur la Figure.V.4.,

avec : $m_1=20$ [kg], $m_2=50$ [kg], $m_3= 40$ [kg], $l_1= 1$ [m], $l_2= 3$ [m], $l_3=4$ [m] et $l_4=2$ [m].

L'arbre est en acier de 10 [cm] de diamètre de la section transversale.

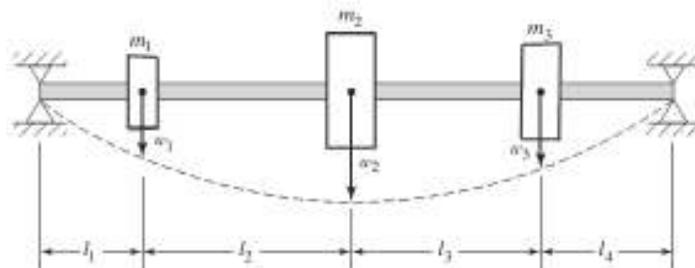


Figure .V.4. Arbre avec trois masses.

De la résistance des matériaux, la flèche due à une charge statique P d'un arbre comme indiqué par la Figure .V.5. , est donnée par :

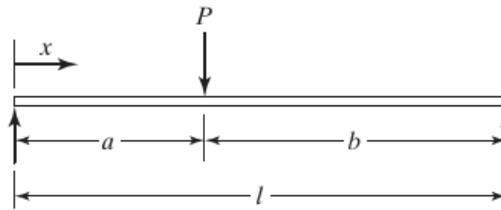


Figure .V.5. Poutre sous une charge statique.

$$w(x) = \begin{cases} \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2); & 0 \leq x \leq a \\ -\frac{Pa(l-x)}{6EI} [a^2 + x^2 - 2lx]; & a \leq x \leq l \end{cases};$$

- Les flèches dues à la masse m_1 : * position , $x=1$ m, $b=9$ m, $l=10$ m.

$$w'_1 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(20.9,81).(9).(1)}{6EI.(10)} (10^2 - 9^2 - 1^2) = \frac{529.74}{EI};$$

* Position , $a=1$ m, $x=4$ m, $l=10$ m,

$$w'_2 = -\frac{Pa(l-x)}{6EI} [a^2 + x^2 - 2lx] = -\frac{(20.9,81)(1)(10-4)}{6EI(10)} [1^2 + 4^2 - 2.(10)(4)] = \frac{1236.06}{EI};$$

* Position , $a=1$ m, $x=8$ m, $l=10$ m,

$$w'_3 = -\frac{Pa(l-x)}{6EI} [a^2 + x^2 - 2lx] = -\frac{(20.9,81)(1)(10-8)}{6EI(10)} [1^2 + 8^2 - 2.(10)(8)] = \frac{621.3}{EI};$$

- Les flèches dues à la masse m_2 : * position , $x=1$ m, $b=6$ m, $l=10$ m.

$$w''_1 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(50.9,81).(6).(1)}{6EI.(10)} (10^2 - 6^2 - 1^2) = \frac{3090.15}{EI};$$

* Position , $b=6$ m, $x=4$ m, $l=10$ m,

$$w''_2 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(50.9,81).(6).(4)}{6EI.(10)} (10^2 - 6^2 - 4^2) = \frac{9417.6}{EI};$$

* Position , $a=4$ m, $x=8$ m, $l=10$ m,

$$w''_3 = -\frac{Pa(l-x)}{6EI} [a^2 + x^2 - 2lx] = -\frac{(50.9,81)(4)(10-8)}{6EI(10)} [4^2 + 8^2 - 2.(10)(8)] = \frac{5232.0}{EI};$$

- Les flèches dues à la masse m_3 : * position , $x=1$ m, $b=2$ m, $l=10$ m.

$$w'''_1 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(50.9,81).(2).(1)}{6EI.(10)} (10^2 - 2^2 - 1^2) = \frac{1242.6}{EI};$$

* Position , $b=2$ m, $x=4$ m, $l=10$ m,

$$w'''_2 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(50.9,81).(2).(4)}{6EI.(10)} (10^2 - 2^2 - 4^2) = \frac{4185.6}{EI};$$

* Position , $b=2$ m, $x=8$ m, $l=10$ m,

$$w'''_3 = \frac{Pbx}{6EI} (l^2 - b^2 - x^2) = \frac{(50.9,81).(2).(8)}{6EI.(10)} (10^2 - 2^2 - 8^2) = \frac{3348.48}{EI}.$$

Chapitre V :

Les flèches totales dues aux différentes masses :

$$w_1 = w'_1 + w''_1 + w'''_1 = \frac{4862.49}{EI} ; w_2 = w'_2 + w''_2 + w'''_2 = \frac{14839.26}{EI} ; w_3 = w'_3 + w''_3 + w'''_3 = \frac{9201.78}{EI}.$$

Alors par substitution dans la formule de Rayleigh, on peut trouver que la pulsation propre fondamentale sera :

$$\omega = \left(\frac{g \sum_{i=1}^n m_i w_i}{\sum_{i=1}^n m_i w_i^2} \right)^{1/2} = \left\{ \frac{9.81 * EI * ((20).4862.49 + (50).14839.26 + (40).9201.78)}{20.(4862.49)^2 + 50.(14839.26)^2 + 40.(9201.78)^2} \right\}^{1/2} = 0.028222 \sqrt{EI} ;$$

Pour un arbre en acier : $E = 2.07 \times 10^{11} \left[\frac{N}{m^2} \right]$ et $I = \frac{\pi(0.1)^4}{64} = 4.90875 \times 10^{-6} [m^4] \rightarrow \omega = 28.4482 \left[\frac{rd}{s} \right].$

• c) **La méthode de Holzer :**

Cette méthode est très utilisée en vibration de torsion. Elle permet de calculer toutes les pulsations et les modes d'un système à plusieurs degrés de liberté, avec ou sans amortissement, en vibrations libres ou forcées.

Structures de torsion :

Considérons la structure dynamique de torsion, constitué de trois disques (engrenages), comme montrer la Figure.V.6 .

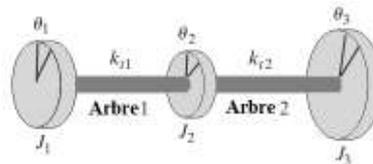


Figure.V.6. Structure de trois disque en vibrations de torsion.

Le système d'équations, peut être obtenu par application de la 2^{ème} loi de Newton en dynamique :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t1}(\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t1}(\theta_2 - \theta_1) + k_{t2}(\theta_2 - \theta_3) = 0 \dots \dots \dots (V.18) \\ J_3 \ddot{\theta}_3 + k_{t2}(\theta_3 - \theta_2) = 0 \end{cases}$$

Puisque le mouvement est considéré de forme harmonique , on peut supposer que:

$$\theta_i(t) = \Theta \cos(\omega t + \phi) [i=1,2,\dots,n] \dots \dots \dots (V.19)$$

Ce qui nous permet d'écrire le système d'équations :

$$\begin{cases} \omega^2 J_1 \Theta_1 = k_{t1}(\Theta_1 - \Theta_2) \\ \omega^2 J_2 \Theta_2 = k_{t1}(\Theta_2 - \Theta_1) + k_{t2}(\Theta_2 - \Theta_3) \dots \dots \dots (V.20) \\ \omega^2 J_3 \Theta_3 = k_{t2}(\Theta_3 - \Theta_2) \end{cases}$$

En additionnant les termes du système d'équations, on aura : $\sum_{i=1}^3 \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \dots \dots \dots (V.21)$

Cette équation indique que la somme des couples d'inertie du système doit être nulle.

Dans la méthode d'Holzer, une pulsation d'essai ω est supposée, et Θ_1 est arbitrairement choisie comme unité, ensuite Θ_2 est calculée de l'équation qui s'ensuit, et puis Θ_3 se trouve à partir de l'équation qui s'ensuit, nous obtenons ainsi:

$$\begin{cases} \Theta_1 = 1. \\ \Theta_2 = \Theta_1 - \frac{\omega^2 J_1 \Theta_1}{k_{t1}} \dots \dots \dots (V.22) \\ \Theta_3 = \Theta_2 - \frac{\omega^2}{k_{t2}} (J_1 \Theta_1 + J_2 \Theta_2) \end{cases}$$

Ces valeurs calculées sont substituées de l'équation (V.21) pour vérifier la satisfaction de la condition.

Si l'équation n'est pas satisfaite, une nouvelle valeur d'essai de ω est supposée et le processus est répété. Les équations peuvent être généralisées pour n système de disque comme suit:

$$\sum_{i=1}^n \omega^2 J_i \Theta_i = 0 \dots \dots \dots (V.23)$$

$$\Theta_i = \Theta_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{ti-1}} \left(\sum_{k=1}^{i-1} J_k \Theta_k \right), i = 2, 3, \dots, n \dots \dots \dots (V.24)$$

Ainsi la méthode utilise des équations à plusieurs reprises pour différentes pulsations d'essai. Si la pulsation d'essai supposée n'est pas une pulsation propre du système, l'équation n'est pas satisfaite. Le couple résultant en équation représente un couple appliqué au dernier disque. Ce couple M_t est ensuite reporté pour le ω choisi. Lorsque le calcul est répété avec une autre valeur de ω , le graphique résultant apparaît comme indiqué sur la Figure.V.7. À partir de ce graphique, les pulsations propres du système peuvent être identifiées comme les valeurs de ω auxquelles $M_t = 0$. Les amplitudes Θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) correspondant aux pulsations propres sont les formes de mode du système.

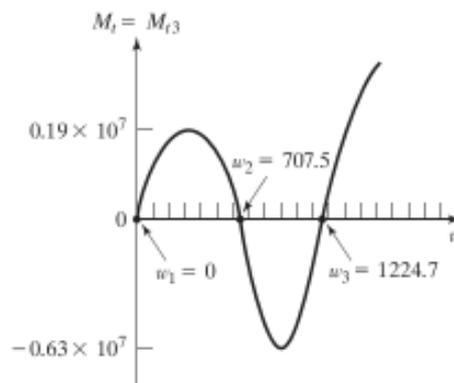


Figure .V.7. Le couple résultant en fonction de la pulsation.

Exemple

L'agencement du compresseur, de la turbine et du générateur dans une centrale thermique est représenté sur la Figure.V.8.

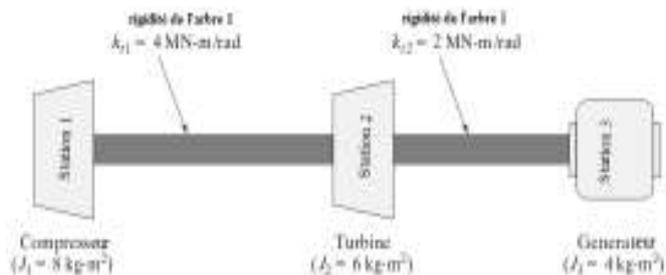


Figure .V.8. Structure en vibrations libres de torsion.

- Trouver les pulsations naturelles et les formes de mode du système?

Ce système représente un système de torsion libre ou sans contrainte. Le tableau V.1. montre ses paramètres et la séquence des calculs. Les calculs pour les pulsations d'essai $\omega = 0, 10, 20, 700$ et 710 sont indiqués dans ce tableau.

Tableau .V.1. Exemple de calcul pour $\omega = 1, 10, 20, \dots, 700, 710$.

| Paramètres du système | Quantité | Les valeurs testées : | | | | | |
|--------------------------|------------|-----------------------|--------|--------|-----|--------------|---------------|
| | | 1 | 2 | 3 | ... | 71 | 72 |
| | ω | 0 | 10 | 20 | | 700 | 710 |
| | ω^2 | 0 | 100 | 400 | | 490000 | 504100 |
| Station 1 : | | | | | | | |
| $J_1 = 8$ | Θ_1 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | | 1.0 | 1.0 |
| $k_{t1} = 4 \times 10^6$ | M_{t1} | 0 | 800 | 3200 | | 0.392^{E7} | 0.403^{E7} |
| Station 2 : | | | | | | | |
| $J_2 = 6$ | Θ_2 | 1.0 | 0.9998 | 0.9992 | | 0.0200 | -0.0082 |
| $k_{t2} = 2 \times 10^6$ | M_{t2} | 0 | 1400 | 5598 | | 0.398^{E7} | 0.401^{E7} |
| Station 3 : | | | | | | | |
| $J_3 = 4$ | Θ_3 | 1.0 | 0.9991 | 0.9964 | | -1.9690 | -2.0120 |
| $k_{t3} = 0$ | M_{t3} | 0 | 1800 | 7192 | | 0.119^{E6} | -0.494^{E5} |

La quantité M_{t3} désigne le couple à droite de la station 3 (générateur), qui doit être nul aux pulsations propres. La Figure .V.7. montre le graphique du M_t contre ω . Des valeurs d'essai proches de ω sont utilisées au voisinage de $M_{t3} = 0$ pour obtenir des valeurs précises de la première forme de mode flexible, illustrée à la Figure .V.9. A noter que $\omega=0$ correspond à une rotation d'un corps rigide.

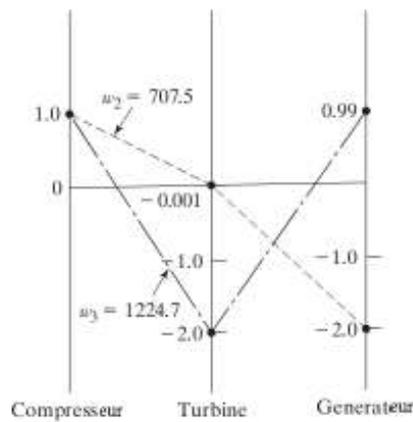


Figure .V.9. Les premiers deux modes flexibles.

Bien que la méthode de Holzer ait été largement appliquée aux systèmes de torsion, la procédure est également applicable à l'analyse des vibrations des systèmes de masse à ressorts.

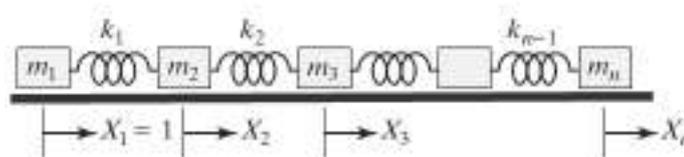


Figure .V.10. Système dynamique libre masses-ressorts.

Les équations de mouvement d'un système de masse ressort peuvent être exprimées comme suit:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) = 0 ; \dots \dots \dots (V.25) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Pour le mouvement harmonique ; $x_i(t) = X_i \cos \omega t$ où X_i est l'amplitude de la masse m_i et les équations peuvent être écrites :

$$\begin{cases} \omega^2 m_1 X_1 = k_1(x_1 - x_2) \\ \omega^2 m_2 X_2 = k_1(x_2 - x_1) + k_2(x_2 - x_3) ; \dots \dots \dots (V.26) \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

La procédure de la méthode d'Holzer commence avec une pulsation d'essai et l'amplitude de la masse $m_1 = X_1 = 1$, on peut alors utiliser les équations pour obtenir les amplitudes des masses m_2, m_3, \dots, m_i :

$$\begin{cases} X_2 = X_1 - \frac{\omega^2 m_1 X_1}{k_1} \\ X_3 = X_2 - \frac{\omega^2}{k_2} (m_1 X_1 + m_2 X_2) ; \dots \dots \dots (V.27) \\ X_i = X_{i-1} - \frac{\omega^2}{k_{i-1}} \sum_{k=1}^{i-1} (m_k X_k) \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Comme dans le cas des systèmes de torsion, la force résultante appliquée à la dernière (nième) masse peut être calculée comme suit:

$$F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i ; \dots \dots \dots (V.28)$$

Les calculs sont répétés avec plusieurs autres pulsations d'essai. Les pulsations propres sont identifiées comme les valeurs de ω qui donnent $F= 0$ pour un système libre. Pour cela, il convient de tracer un graphique entre F et ω , en utilisant la même procédure pour les systèmes de masses-ressorts que pour les systèmes de torsion.

Exemple

Utiliser la méthode d'Holzer pour calculer les pulsations propres de la structure constituée des masses-ressorts, comme montrer par la figure suivante, en supposant : $m_1=m_2= 1$ [kg] et $k_1=k_2=1$ [N/m]:

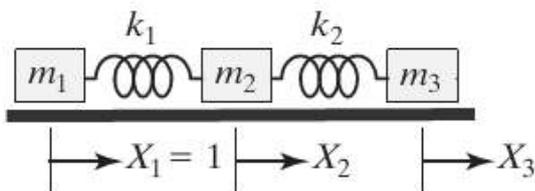


Figure .V.11. Structure dynamique de masses-ressorts.

Tableau .V.2. Exemple de calcul pour $\omega =0.5, 0.75, 1.0, 1.5, 1.79, 2.0$.

| Paramètres du système | Quantité | Les valeurs testées : | | | | | |
|-----------------------|------------|-----------------------|-------|------|-------|-------|------|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| | ω | 0.5 | 0.75 | 1.0 | 1.5 | 1.79 | 2.0 |
| | ω^2 | 0.25 | 0.56 | 1.0 | 2.25 | 3.20 | 4.0 |
| Station 1 : | | | | | | | |
| $m_1 = 1$ | X_1 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 | 1.0 |
| $m_2 = 1$ | X_2 | 0.75 | 0.44 | 0.0 | -1.25 | -2.21 | -3.0 |
| $m_3 = 1$ | X_3 | 0.31 | -0.36 | -1.0 | -0.68 | 1.66 | 5.0 |
| $k_2 = 1$ | F_3 | 0.51 | 0.60 | 0.0 | -2.10 | 1.47 | 12.0 |

Chapitre V :

Par représentation graphique de $F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i$ en fonction de ω , on peut constater que les pulsations propres de la structure sont :

$$\omega_1 = 0 \left[\frac{rd}{s} \right]; \quad \omega_2 = 1.0 \left[\frac{rd}{s} \right]; \quad \omega_3 = 1.70 \left[\frac{rd}{s} \right].$$

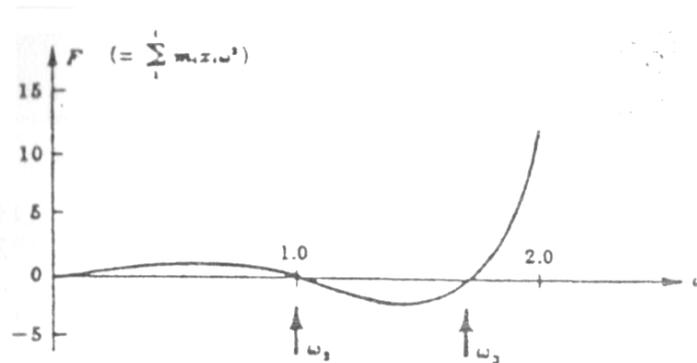


Figure .V.12. La courbe de $F = \sum_{i=1}^n \omega^2 m_i X_i$ en fonction de la pulsation ω .

Autant de méthodes ont été développées, telle la méthode de Stodola, la méthode de la matrice d'itération, la méthode de décomposition de Choleski, la méthode de Jacobi, la méthode de Myklestad-Prohl et la méthode de l'impédance mécanique.

V.3. Structures dynamiques à 2 degrés de liberté :

Les structures dynamiques qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour décrire leur mouvement sont appelées structures à deux degrés de liberté. Nous nous limitons à deux degrés de liberté dans ce chapitre, afin de faire une introduction simple au comportement des structures avec un nombre arbitrairement élevé de degrés de liberté. Puisque c'est la même procédure développée à l'étude des structures dynamiques à 2 ddl qui est appliquée aux structures à plusieurs ddl.

Ce chapitre traite les structures dynamiques de deux degrés de liberté, qui nécessitent deux coordonnées indépendantes pour décrire le mouvement. Les équations de mouvement couplées de la structure sont obtenues en utilisant la seconde loi de Newton du mouvement. En exprimant ces équations sous forme matricielle, on identifie les matrices de masse, d'amortissement et de raideur de la structure. En supposant le mouvement est harmonique de deux masses, les valeurs propres ou les fréquences naturelles de la vibration, les modes propres et les réponses de la vibration libre de la structure non amorti ont été déterminés. La méthode de combinaison des conditions initiales est également décrite. Les deux degrés de liberté des structures en torsion sont traitées de manière analogue.

3. 1. Etablissement des équations différentielles de mouvement :

Considérons une structure de 2 masses, ressorts à deux degrés de liberté, visqueusement amorti, représenté sur la Figure V.13.

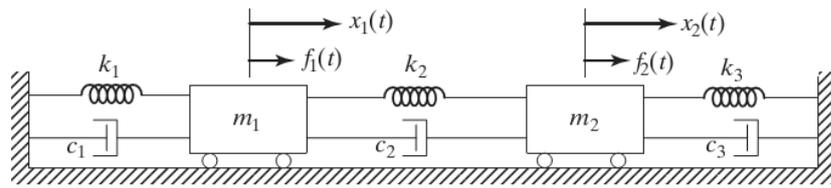


Figure V.13. Structure dynamique libre à 2 ddl constituée des masses-ressorts-amortisseurs.

Le mouvement du système est complètement décrit par les coordonnées $x_1(t)$ et $x_2(t)$, qui définissent les positions des masses m_1 et m_2 à tout instant t à partir des positions d'équilibre respectives. Les forces externes $F_1(t)$ et $F_2(t)$ agissent sur les masses m_1 et m_2 respectivement. Les diagrammes de corps libres des masses m_1 et m_2 sont montrés sur la Figure.

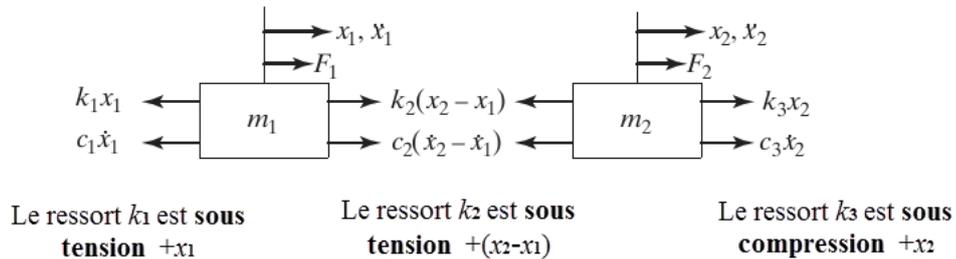


Figure V.14. Les forces agissantes sur les masses isolées de la structure.

L'application de la seconde loi du mouvement de Newton à chacune des masses donne les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (c_1 + c_2) \dot{x}_1 - c_2 \dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1 \\ m_2 \ddot{x}_2 - c_2 \dot{x}_1 + (c_2 + c_3) \dot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \end{cases} \dots\dots\dots (V.29)$$

On peut voir que la première équation contient des termes impliquant x_2 (à savoir ; $-c_2 \dot{x}_2$ et $-k_2 x_2$) alors que la deuxième équation contient des termes impliquant x_1 (à savoir ; $-c_2 \dot{x}_1$ et $-k_2 x_1$). Donc ils représentent un système de deux équations différentielles couplées de second ordre. On peut donc s'attendre à ce que le mouvement de la masse m_1 influence le mouvement de la masse m_2 et vice versa. Les équations dynamiques précédentes et peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[m] \ddot{\vec{x}}(t) + [c] \dot{\vec{x}}(t) + [k] \vec{x}(t) = \vec{f}(t) ; \dots\dots\dots (V.30)$$

Dans le cas d'une structure dynamique à 2 ddl , on trouve :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 + c_3 \end{bmatrix}; \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}; \dots\dots\dots (V.31)$$

3.2. Types de couplage :

Dans le système d'équations différentielles précédentes, on remarque que dans la matrice masse les deux déplacements (accélérations) ne s'interchangent pas les coefficients et l'existence des coefficients nuls par rapport à la diagonale de la matrice) on peut dire qu'on n'a pas un **couplage d'inertie**, mais dans la matrice de rigidité les déplacements s'interchangent avec symétrie par rapport à la diagonale, on peut dire qu'on a un **couplage élastique**. On cite l'existence d'un **couplage par amortissement** car les coefficients de la matrice d'amortissement liés aux deux vitesses s'interchangent avec une symétrie par rapport à la diagonale.

Chapitre V :

Avec : $\vec{x}(t)$ et $\vec{f}(t)$ sont appelées les vecteurs déplacements et les vecteurs forces respectivement, donnés par :

$$\vec{x}(t) = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{f}(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix} ; \dots\dots\dots(V.32)$$

De plus, les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité peuvent être considérées comme symétriques, de sorte que:

$$[m]^T=[m], \quad [c]^T=[c], \quad [k]^T=[k], \dots\dots\dots(V.33)$$

où exposant T indique la matrice transposée.

3.3. Les vibrations libres non amorties :

Pour l'analyse des vibrations libres on doit considérer : $f_1(t)=f_2(t)=0$.

En outre, si l'amortissement est ignoré ou négliger $c_1=c_2=c_3=0$.

Le système des équations différentielles devient :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = 0 \end{cases} ; \dots\dots\dots(V.34)$$

Le système d'équations peut être écrit sous forme matricielle comme suit :

$$[m]\ddot{\vec{x}}(t) + [k]\vec{x}(t) = \vec{0} ; \dots\dots\dots(V.35)$$

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}; \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix}; \dots\dots\dots(V.36)$$

3.4/ Matrice de flexibilité « de souplesse »:

La rigidité d'une structure dynamique peut être décrite par $[k]$ ou par sa flexibilité $[f]$, de façon que :

$$[f] = [k]^{-1} \dots\dots\dots(V.38)$$

Pour : $\{F\} = [k]\{x\}$ on peut utiliser : $\{x\} = [f]\{F\}$; $\dots\dots\dots(V.39)$

Des fois, si on connaît les coefficients de la matrice de flexibilité $[f]$ et puisque :

$$[f][k] = [I] ; \dots\dots\dots(V.40)$$

L'équation du mouvement des structures dynamiques en vibrations libres non amorties, s'écrit :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = 0, \quad \text{avec} : [m]\{\ddot{x}\} = -[f]^{-1}\{x\} = -\omega^2[m]\{x\} \dots\dots\dots(V.41)$$

Ce qui nous permet de l'écrire sous la forme : $([I] - \omega^2[m] [f])\{x\} = 0 \dots\dots\dots(V.42)$

afin de déterminer des pulsations propres.

Exemple :

Soit la structure suivante constituée d'une poutre sur deux appuis avec deux masses concentrées m_1 et m_2 ;

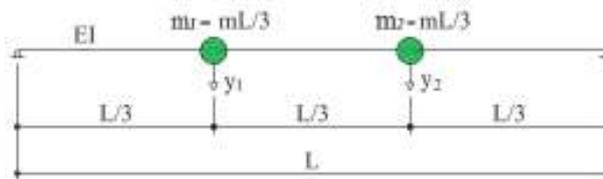


Figure .V.14. Poutre supportant deux masses.

- Donnez le système d'équations différentielles du mouvement ?

Chapitre V :

Grâce au principe des forces virtuelles, le déplacement vertical Δ à l'emplacement d dû à une force unitaire agissante à la position a peut être facilement déterminé d'après les formules développées en RDM :

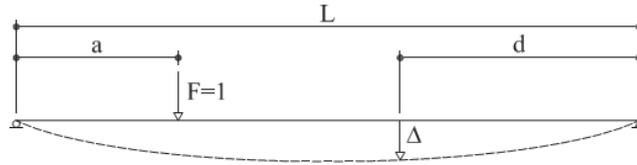


Figure V.15. Flexibilité d'une poutre supportant deux masses.

$$\Delta = -\alpha\delta(\alpha^2 + \delta^2 - 1) \cdot \frac{FL^3}{6EI} \quad \text{avec : } \alpha = \frac{a}{L} \text{ et } \delta = \frac{d}{L} ;$$

La matrice de flexibilité consiste des éléments suivants :

$$\{y\} = [f]\{F\} ;$$

C'est-à-dire :
$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

Où : f_{ij} = La flèche (le déplacement) de la coordonnée i due à une charge unitaire appliquée à la coordonnée j.

Les facteurs de f_{ij} peuvent être calculés par :

$$f_{11} = \Delta_{\alpha=\frac{1}{3}, \delta=\frac{2}{3}} = \frac{4}{243} \cdot \frac{L^3}{EI} ; f_{12} = \Delta_{\alpha=\frac{2}{3}, \delta=\frac{2}{3}} = \frac{7}{486} \cdot \frac{L^3}{EI} ; f_{21} = \Delta_{\alpha=\frac{1}{3}, \delta=\frac{1}{3}} = \frac{7}{486} \cdot \frac{L^3}{EI} ; f_{22} = \Delta_{\alpha=\frac{2}{3}, \delta=\frac{1}{3}} = \frac{4}{243} \cdot \frac{L^3}{EI} ;$$

Donc : la matrice de flexibilité sera :
$$[f] = \frac{L^3}{486EI} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

La matrice de rigidité obtenue est :
$$[k] = [f]^{-1} = \frac{162EI}{5L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} ;$$

La matrice masse est :
$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} ;$$

Le système d'équations différentielle du mouvement de la structure est :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{Bmatrix} + \frac{162EI}{5L^3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -7 \\ -7 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

a. Recherche des pulsations propres

Supposons que les deux masses possèdent des mouvements harmoniques avec la même pulsation ω et la même phase ϕ ,

$$\begin{cases} x_1(t) = X_1 \cos(\omega t + \phi) \\ x_2(t) = X_2 \cos(\omega t + \phi) \end{cases} \dots\dots\dots (V.43)$$

Où : X_1 et X_2 sont des constantes qui désignent les amplitudes maximaux de $x_1(t)$ et $x_2(t)$; par substitution, on trouve :

$$\begin{cases} [-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)]X_1 - k_2X_2 \\ [-k_2X_1 + \{-m_1\omega^2 + (k_2 + k_3)\}X_2] \end{cases} \cos(\omega t + \phi) = 0 \dots\dots\dots(V.44)$$

Où sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_1\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t + \phi) = 0 \dots\dots\dots(V.45)$$

On trouve la matrice $[D]=\begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_1\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(V.46)$

Sous forme réduite on peut écrire que : $\mathcal{D} = (-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K})$, La matrice \mathcal{D} est appelée La **matrice dynamique**.

Pour une solution non triviale, il faut que le déterminant de la matrice \mathcal{D} , c'est-à-dire : $\det(\mathcal{D})=0$;

Ou bien : il faut que les coefficients liés à X_1 et X_2 soient égale à zéro.

$$\det \begin{bmatrix} \{-m_1\omega^2 + (k_1 + k_2)\} & -k_2 \\ -k_2 & \{-m_1\omega^2 + (k_2 + k_3)\} \end{bmatrix} = 0 ; \dots(V.47)$$

Qui nous donne :

$$(m_1 m_2)\omega^4 - \{(k_1 + k_2)m_2 + (k_2 + k_3)m_1\}\omega^2 + \{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3) - k_2^2\} = 0 \dots\dots\dots(V.48)$$

Cette équation est appelée « **équation caractéristique, des pulsations** », ces racines sont :

$$\omega_1^2, \omega_2^2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\} \mp \frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{(k_1+k_2)m_2+(k_2+k_3)m_1}{m_1 m_2} \right\}^2 - 4 \left\{ \frac{(k_1+k_2)(k_2+k_3)-k_2^2}{m_1 m_2} \right\} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(V.49)$$

Ceci montre qu'il est possible pour le système d'avoir une solution harmonique non triviale de la forme quand ω est égale à ω_1 et ω_2 donnée. Nous appelons ω_1 et ω_2 les fréquences naturelles du système.

b. Recherche des modes propres

Les valeurs de X_1 et X_2 restent à déterminer. Ces valeurs dépendent des fréquences naturelles ω_1 et ω_2 . on notera les valeurs de X_1 et X_2 correspondant à ω_1 comme $X_1^{(1)}$ et $X_2^{(1)}$ et celles correspondant à ω_2 comme $X_1^{(2)}$ et $X_2^{(2)}$. De plus, puisque l'équation est homogène, seuls les rapports :

$r_1 = \{ X_2^{(1)} / X_1^{(1)} \}$ et $r_2 = \{ X_2^{(2)} / X_1^{(2)} \}$ peuvent être trouvés. Pour $\omega^2 = \omega_1^2$ et $\omega^2 = \omega_2^2$ donne:

$$r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = \frac{-m_1\omega_1^2+(k_1+k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_1^2+(k_2+k_3)} ; \dots\dots\dots(V.50)$$

$$r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = \frac{-m_1\omega_2^2+(k_1+k_2)}{k_2} = \frac{k_2}{-m_2\omega_2^2+(k_2+k_3)} \dots\dots\dots(V.51)$$

A noter que les deux rapports sont identiques. Les modes normaux de vibration correspondants à ω_1^2 et ω_2^2 peuvent être exprimé, respectivement, comme :

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ X_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \\ r_1 X_1^{(1)} \end{Bmatrix} ; \quad \vec{X}^{(2)} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ X_2^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \\ r_2 X_1^{(2)} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(V.52)$$

Chapitre V :

Les vecteurs $\vec{X}^{(1)}$ et $\vec{X}^{(2)}$, qui sont les modes normaux de vibration, sont connus comme les vecteurs modaux du système. La solution (réponse) des vibrations libres ou l'expression du mouvement dans le temps peut être :

$$\vec{X}^{(1)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)}(t) \\ X_2^{(1)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \\ r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{le premier mode,.....(V.53)}$$

$$\vec{X}^{(2)}(t) = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)}(t) \\ X_2^{(2)}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_1) \\ r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_1) \end{Bmatrix} = \text{le deuxième mode,.....(V.54)}$$

La solution générale sera la superposition linéaire des solutions des équations différentielles, c'est-à-dire :

$$\vec{X}^{(1)} = c_1 \vec{X}_1^{(1)} + c_2 \vec{X}_2^{(1)} ; \dots\dots\dots(V.55)$$

Ou c_1 et c_2 sont des constantes, puisque : $\vec{X}^{(1)}$ et $\vec{X}^{(2)}$ implique les constantes inconnues $X_1^{(1)}$ et $X_1^{(2)}$, on peut choisir $c_1=c_2=1$ sans avoir perdre la généralité. L'expression du vecteur $x(t)$ devient :

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \\ x_2(t) = x_2^{(1)}(t) + x_2^{(2)}(t) = r_1 X_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \phi_1) + r_2 X_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \phi_2) \end{cases} ; \dots\dots\dots(V.56)$$

Ou les constantes inconnues sont : $X_1^{(1)}$ et $X_1^{(2)}$, ϕ_1 et ϕ_2 qui seront déterminé à partir des conditions initiales.

c. Les conditions initiales

Positions initiales : $x_1(t = 0) = x_1(0)$, $x_2(t = 0) = x_2(0)$(V.57)

Vitesses initiales : $\dot{x}_1(t = 0) = \dot{x}_1(0)$, $\dot{x}_2(t = 0) = \dot{x}_2(0)$ (V.58)

Par substitution, on aura :

$$\begin{cases} x_1(0) = X_1^{(1)} \cos \phi_1 + X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_1(0) = -\omega_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \end{cases} \dots\dots\dots(V.59)$$

$$\begin{cases} x_2(0) = r_1 X_1^{(1)} \cos \phi_1 + r_2 X_1^{(2)} \cos \phi_2 \\ \dot{x}_2(0) = -\omega_1 r_1 X_1^{(1)} \sin \phi_1 - \omega_2 r_2 X_1^{(2)} \sin \phi_2 \end{cases} \dots\dots\dots(V.60)$$

Quatre équations algébriques avec les inconnus : $X_1^{(1)} \cos \phi_1$, $X_1^{(2)} \cos \phi_2$, $X_1^{(1)} \sin \phi_1$ et $X_1^{(2)} \sin \phi_2$; qui sont :

$$\begin{cases} X_1^{(1)} \cos \phi_1 = \left\{ \frac{r_2 x_1(0) - x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\} \\ X_1^{(1)} \sin \phi_1 = \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (r_2 - r_1)} \right\} \\ X_1^{(2)} \cos \phi_2 = \left\{ \frac{-r_1 x_1(0) + x_2(0)}{r_2 - r_1} \right\} \\ X_1^{(2)} \sin \phi_2 = \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_1 (r_2 - r_1)} \right\} \end{cases} \dots\dots\dots(V.61)$$

Alors, les solutions recherchées seront :

Pour les amplitudes :

$$\begin{cases} X_1^{(1)} = \left[\{X_1^{(1)} \cos \phi_1\}^2 + \{X_1^{(1)} \sin \phi_1\}^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} \\ X_1^{(2)} = \left[\{X_1^{(2)} \cos \phi_2\}^2 + \{X_1^{(2)} \sin \phi_2\}^2 \right]^{1/2} = \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} \end{cases} \quad (V.62)$$

Pour les phases :

$$\begin{cases} \phi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(1)} \sin \phi_1}{X_1^{(1)} \cos \phi_1} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \right\} \\ \phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{X_1^{(2)} \sin \phi_2}{X_1^{(2)} \cos \phi_2} \right\} = \tan^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [-r_1 x_1(0) - x_2(0)]} \right\} \end{cases} \dots\dots\dots (V.63)$$

Exemple 1:

Soit la structure d'un bâtiment constitué de deux étages (2 ddl) avec les données suivantes :

$m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$, On vous demande de faire l'étude dynamique de la structure ?

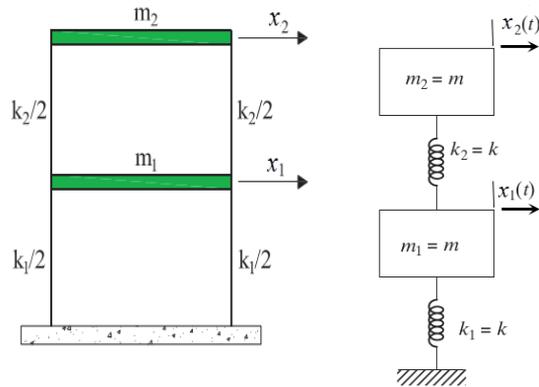


Figure V.16. La structure discrétisée d'un bâtiment de deux étages.

a. L'équation différentielle du mouvement des deux masses :

Selon la 2^{ème} loi de Newton en dynamique, on trouve :

$$m \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b. Les pulsations propres:

La matrice dynamique sera : $[D] = \begin{bmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix}$, calculons : $\det(D)=0$, nous obtenons l'équation caractéristique des pulsations :

$$(2k - m\omega^2)(k - m\omega^2) - (-k)(-k) = m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 ;$$

⇒ Les solutions de l'équation caractéristique, nous donne les pulsations propres suivantes :

$$\omega_0^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{k}{m} \rightarrow \omega_{10} = 0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\frac{rd}{s} \right] \text{ et } \omega_{20} = 1,618 \sqrt{\frac{k}{m}} \left[\frac{rd}{s} \right] ;$$

c. Les modes propres:

Par substitution de la pulsation ω_{10} dans le système d'équations :

$$[k - \omega^2 m]X = \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On trouve : $X_2^{(1)} = 1,618 X_1^{(1)}$, si $X_2^{(1)} = 1 \rightarrow X_1^{(1)} = 0,618$, la structure montre les déplacements en vibrations suivantes (de même sens) :

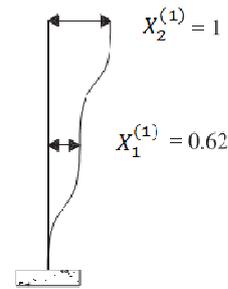


Figure V.17. La structure déformée selon le premier mode.

Par substitution de la pulsation ω_{20} dans le système d'équations :

$$[k - \omega^2 m]X = \begin{bmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & k - \omega^2 m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On trouve : $X_2^{(2)} = -0,618 X_1^{(2)}$, si $X_1^{(2)} = 1 \rightarrow X_2^{(2)} = -0,618$, la structure montre les déplacements en vibrations suivantes (de sens opposé) :

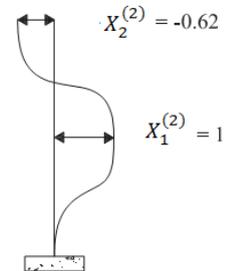


Figure V.18. La structure déformée selon le deuxième mode.

Les rapports seront : $r_1 = \frac{X_2^{(1)}}{X_1^{(1)}} = 1,618$; $r_2 = \frac{X_2^{(2)}}{X_1^{(2)}} = -0,618$;

d) Vérification de l'orthogonalité des modes propres :

- Pour la matrice de masse :

$$X_1^T m X_1 = [0,618 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,382 m, \quad X_1^T m X_2 = [0,618 \quad 1] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_2^T m X_1 = [1 \quad -0,618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 ; \quad X_2^T m X_2 = [1 \quad -0,618] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = 1,382 m.$$

- Pour la matrice de rigidité :

$$X_1^T k X_1 = [0,618 \quad 1] \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} = 1,382 k, \quad X_1^T k X_2 = [0,618 \quad 1] \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = 0$$

$$X_2^T k X_1 = [1 \quad -0,618] \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,618 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 ; \quad X_2^T k X_2 = [1 \quad -0,618] \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0,618 \end{bmatrix} = 3,618 k.$$

d. Les conditions initiales :

Prenons les conditions initiales suivantes :

$$x_1(0) = 0,618 \text{ [m]} ; \quad x_2(0) = 0,000 \text{ [m]} \quad \text{et} \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$X_1^{(1)} = \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{r_2 x_1(0) - x_2(0)\}^2 + \frac{\{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_1^2} \right]^{1/2} = 0,171[m]$$

$$X_1^{(2)} = \frac{1}{(r_2 - r_1)} \left[\{-r_1 x_1(0) + x_2(0)\}^2 + \frac{\{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)\}^2}{\omega_2^2} \right]^{1/2} = 0,447[m];$$

Pour les phases :

$$\phi_1 = \tan^{-1} \left\{ \frac{-r_2 \dot{x}_1(0) + \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [r_2 x_1(0) - x_2(0)]} \right\} = 0[rd] ; \quad \phi_2 = \tan^{-1} \left\{ \frac{r_1 \dot{x}_1(0) - \dot{x}_2(0)}{\omega_1 [-r_1 x_1(0) - x_2(0)]} \right\} = 0[rd] ;$$

Les réponses de la structure recherchée sont :

$$x_1(t) = 0,171 \cos\left(0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) + 0,447 \cos\left(1,618 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) ;$$

$$x_2(t) = 0,277 \cos\left(0,618 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) - 0,276 \cos\left(1,618 \sqrt{\frac{k}{m}} t\right) ,$$

Les réponses de la structure peuvent être représentées par les courbes suivantes :

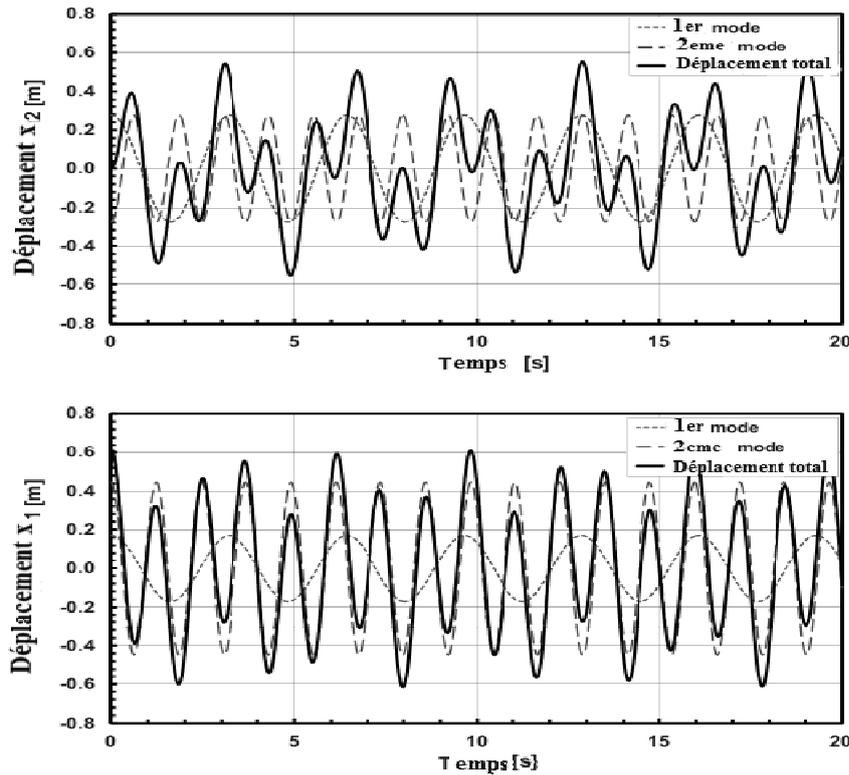


Figure .V.19. Les réponses de la structure pour des conditions initiales données.

3.5. Les vibrations de torsion :

Nous étudions maintenant, la structure montrée par la Figure .V.20. , constitué de deux volants à inerties rotatives J_{01} et J_{02} . L'extrémité de l'arbre fixée au rotor est considérée comme une extrémité fixe. le couple d'entraînement au premier volant est $M_0(t)$. Les coordonnées généralisées ϕ_1 et ϕ_2 sont utilisées pour décrire les rotations des volants autour de l'axe k à travers les centres respectifs. Les inerties des arbres sont négligées, la rigidité en torsion de l'arbre entre l'extrémité fixe et le volant le plus proche est représenté par k_{t1} et la rigidité en torsion de l'autre arbre est représentée par k_{t2} .

On suppose que les volants sont immergés dans un boîtier rempli d'huile et l'effet dissipatif correspondant est modélisé en utilisant les coefficients d'amortissement visqueux c_{t1} et c_{t2} dans les diagrammes de corps libres de la figure, les moments d'inertie $-J_{01}\ddot{\phi}_1$ et $-J_{02}\ddot{\phi}_2$ sont également montrés.

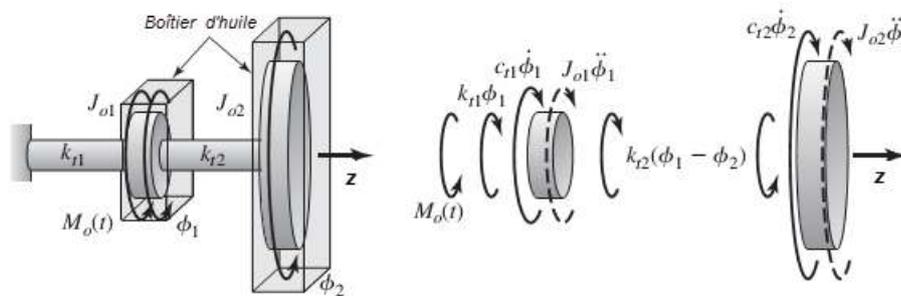


Figure .V.20. Système à deux volants entraînés par un rotor et diagrammes de corps libres montrant les moments d'inertie illustrés par des lignes brisées.

Par l'application du principe d'équilibre des moments angulaires des volants, nous obtenons les équations différentielles du mouvement, comme suit :

$$\begin{cases} J_{01}\ddot{\phi}_1 + c_{t1}\dot{\phi}_1 + k_{t1}\phi_1 + k_{t2}(\phi_1 - \phi_2) = M_0(t) \\ J_{02}\ddot{\phi}_2 + c_{t2}\dot{\phi}_2 + k_{t2}(\phi_2 - \phi_1) = 0 \end{cases} ; \dots\dots\dots(V.64)$$

Les mêmes procédures de résolution afin d'avoir les réponses des rotations des volants est similaires a celle des translations des masses, comme nous allons le constater par les exemples de vibrations libres en torsion suivants :

Exemple 1:

La propulsion d'un Bateau est assurée par un moteur marin liée à une hélice, la structure dynamique « moteur marin-hélice » est considérée en vibrations de torsion libres sans amortissement, elle est schématisée par la Figure .V.22. :

Pour : $J_1=J_0, J_2=2J_0$ et $k_{t1}=k_{t2}=k_t$,

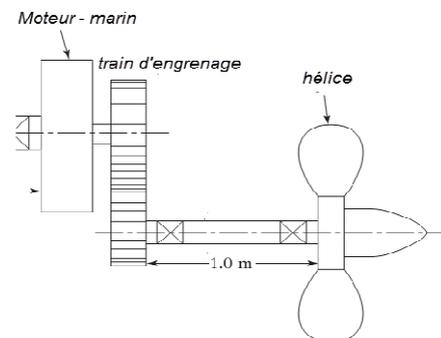


Figure .V.21. Schéma de moteur-marin connecté à l'hélice.

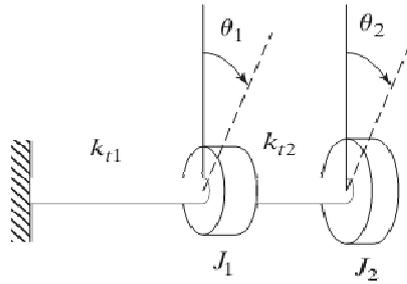


Figure .V.22. Modélisation du moteur marin d'un bateau lié à l'hélice.

Les équations différentielles du mouvement sont établies comme suit :

$$\begin{cases} J_0 \ddot{\theta}_1 + 2k_t \theta_1 - k_t \theta_2 = 0 \\ 2J_0 \ddot{\theta}_2 - k_t \theta_1 + k_t \theta_2 = 0 \end{cases}$$

La solution recherchée est de forme : $\theta_i(t) = \Theta_i \cos(\omega t + \varphi)$; $i=1,2$

Après dérivation et substitution, on obtiendra l'équation caractéristique des pulsations suivante :

$$2J_0^2 \omega^4 - 5k_t J_0 \omega^2 + k_t^2 = 0$$

Les solutions de cette équation, nous donne :

$$\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0} (5 - \sqrt{17})} \text{ et } \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_t}{4J_0} (5 + \sqrt{17})}.$$

Les rapports des modes propres sont :

$$r_1 = \frac{\Theta_2^{(1)}}{\Theta_1^{(1)}} = 2 - \frac{(5 - \sqrt{17})}{4} \text{ et } r_2 = \frac{\Theta_2^{(2)}}{\Theta_1^{(2)}} = 2 - \frac{(5 + \sqrt{17})}{4}.$$

Les réponses générales de la structure dynamique libre (principe de superposition des solutions des équations différentielles) seront:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \Theta_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_1) + \Theta_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_2) \\ \theta_2(t) = r_1 \Theta_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_1) + r_2 \Theta_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_2) \end{cases}$$

Les quatre constantes $\Theta_1, \Theta_2, \varphi_1$ et φ_2 sont à déterminer à partir des conditions initiales : $\theta_1(0), \theta_2(0), \dot{\theta}_1(0)$ et $\dot{\theta}_2(0)$.

Exemple 2 :

Un arbre régulier de longueur $4L$ [m], ayant trois appuis, deux volants sont montés sur cet arbre de masses identiques au milieu des appuis. Déterminer les pulsations critiques de cet arbre ?

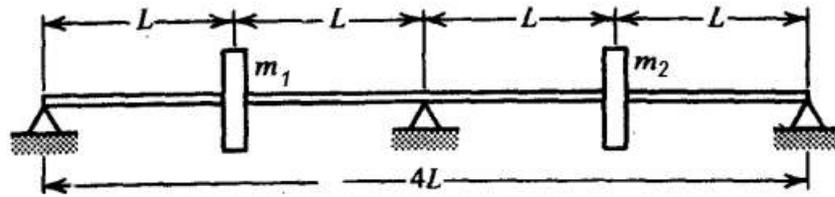


Figure .V.23. Arbre portant deux volants sur trois appuis.

Soient y_1 et y_2 , les déflexions résultantes des pulsations ω_1 et ω_2 respectivement et soient :

f_{11}, f_{12}, f_{21} et f_{22} : les coefficients d'influence (matrice de flexibilité) .

Par applications du principe de d'Alembert , on trouve:

$$\begin{cases} y_1 = -f_{11} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 - f_{12} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 \\ y_2 = -f_{21} \cdot m_1 \cdot \ddot{y}_1 - f_{22} \cdot m_2 \cdot \ddot{y}_2 \end{cases}$$

On suppose que le mouvement est périodique :

$$\begin{cases} y_1 = A \cos(\omega t + \varphi) \\ y_2 = B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}; \text{ donc : } \begin{cases} \ddot{y}_1 = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi) \\ \ddot{y}_2 = -\omega^2 B \cos(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

Par substitution, on trouve :

$$\begin{cases} (1 - f_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2)A - (f_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2) B = 0 \\ -(f_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2)A + (1 - f_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2)B = 0 \end{cases}$$

Des équations algébriques linéaires sur A et B, la solution recherchée est connue si le déterminant des coefficients de A et B est nul :

$$\begin{vmatrix} (1 - f_{11} \cdot m_1 \cdot \omega^2) & -(f_{12} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \\ -(f_{21} \cdot m_1 \cdot \omega^2) & (1 - f_{22} \cdot m_2 \cdot \omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

Ce qui nous permet d'avoir l'équation caractéristique des pulsations suivante :

$$(f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}) m_1 \cdot m_2 \cdot \omega^4 - (f_{11}m_1 + f_{22}m_2)\omega^2 + 1 = 0$$

Pour raison de symétrie du problème ...donc : $f_{11} = f_{22}$ et $f_{12} = f_{21}$

Les déflexions sont déterminées par la résistance des matériaux des poutres en flexion par :

$$f_{11} = \frac{23L^3}{192EI} \text{ et } f_{11} = \frac{-9L^3}{192EI} ;$$

Par substitution dans l'équation des pulsations, nous aboutissons à :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{6EI}{mL^3}} \left[\frac{rd}{s} \right] \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{13.9EI}{mL^3}} \left[\frac{rd}{s} \right].$$

Exemple 3: Absorbeur dynamique :

Le problème vibratoire se pose en général à la pulsation de résonance d'un premier système (Machine)(au cours d'une montée en vitesse, quand la pulsation forcée du moteur est égale à la pulsation propre de la structure) si $\bar{\omega} = \omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$ [$\frac{rd}{s}$]. Pour réduire l'amplitude des vibrations induite par la résonance, une masse m_2 est suspendue élastiquement par une raideur k_2 au premier système (la machine) constituant ainsi un système à deux ddl.

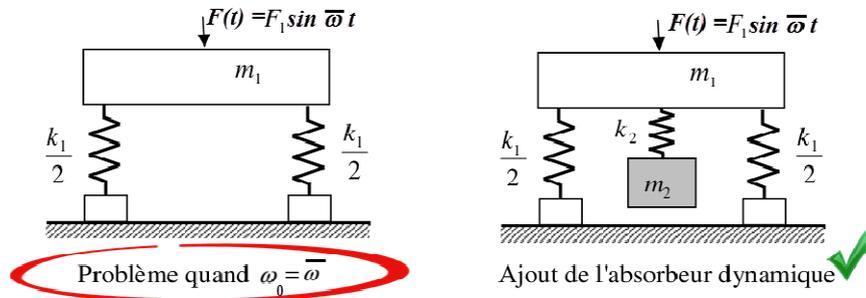


Figure .V.24. Absorbeur dynamique ajouté à une structure.

Les équations différentielles du mouvement sous forme matricielle sont :

$$\begin{bmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

Les amplitudes des déplacements des deux masses, sont :

$$\begin{cases} X_1 = \frac{F_1(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2)}{(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2)(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) - k_2^2} \\ X_2 = \frac{F_1 k_2}{(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2)(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) - k_2^2} \end{cases}$$

La pulsation qui annule les oscillations de la masse m_1 est : $\bar{\omega}^2 = \bar{\omega}^{2*} = \frac{k_2}{m_2}$, par contre la masse m_2 va oscille avec une amplitude maximale $X_2^* = -\frac{F_1}{k_2}$; c'est-à-dire que le ressort de la masse m_2 va développé une force de rappel qui va équilibrer la force excitatrice pour une valeur maximale, on peut avoir :

$$F_1 = -k_2 X_2^* .$$

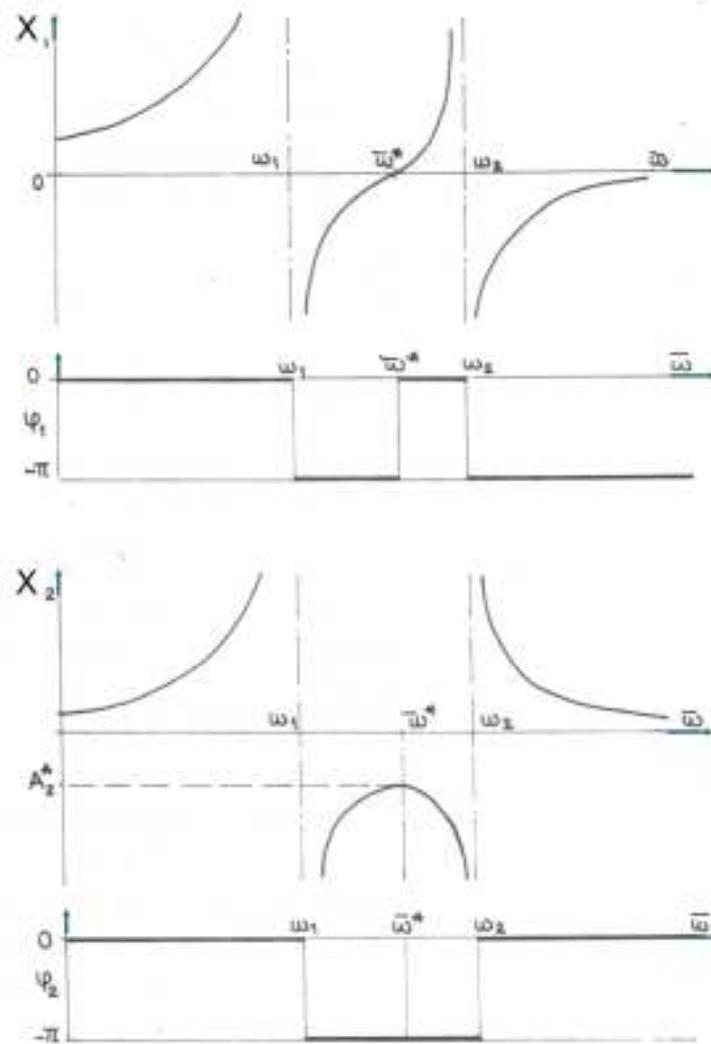


Figure .V.25. Représentation des amplitudes et des phases d'une structure forcée avec absorbeur.

3.6. Les vibrations libres amorties

Dans ce cas l'analyse des vibrations libres on doit considérer : $f_1(t)=f_2(t)=0$, et les coefficients d'amortissement sont non nuls, l'analyse est similaire aux vibrations libres non amorties, pour mieux maîtriser l'analyse et les calculs simplificatrices des exemples ont été pris en considération.

Exemple 1 :

Soit la structure dynamique suivante, en considérant cette fois que les forces excitatrices externes nulles ($f_1(t)=f_2(t)=0$). Avec $m_1=2$ [kg], $m_2=4$ [kg], $k_1=8$ [N/m], $k_2=4$ [N/m], $c=2$ [N.s/m].

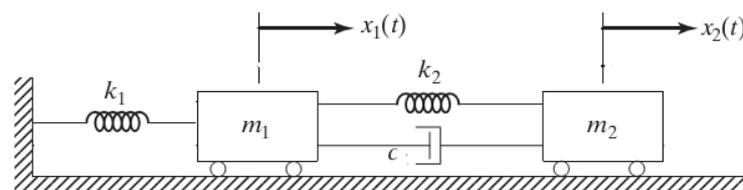


Figure .V.26. Une structure dynamique en vibrations libres avec amortissement.

Chapitre V :

Les conditions initiales sont supposées être : $x_1(0)=0$ [m], $x_2(0)=1$ [m] et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ [m/s]

On aura cette fois, le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} 2\ddot{x}_1 + 2\dot{x}_1 - 2\dot{x}_2 + 12x_1 - 4x_2 = 0 \\ 4\ddot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + 2\dot{x}_2 - 4x_1 + 4x_2 = 0 \end{cases}$$

Pour résoudre ce problème, on utilisera la méthode de transformée de Laplace :

$$\begin{cases} 2[s^2 X_1(s) + s x_1(0) - \dot{x}_1(0)] + 2[s X_1(s) - x_1(0)] - 2[s X_2(s) + x_2(0)] + 12 X_1(s) - 4 X_2(s) = 0 \\ 4[s^2 X_2(s) - s x_2(0) - \dot{x}_2(0)] - 2[s X_1(s) - x_1(0)] + 2[s X_2(s) - x_2(0)] - 4 X_1(s) + 4 X_2(s) = 0 \end{cases}$$

Pour les conditions initiales : $x_1(0)=0$ [m], $x_2(0)=1$ [m] et $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$ [m/s]

Le système devient :

$$\begin{cases} (2s^2 + 2s + 12)X_1(s) - (2s + 4)X_2(s) = -2 \\ (4s^2 + 2s + 4)X_2(s) - (2s + 4)X_1(s) = 4s + 2 \end{cases}$$

Pour résoudre le système d'équations, on utilise la méthode de résolution de Cramer, pour trouver $X_1(s)$ et $X_2(s)$:

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} -2 & 2s - 4 \\ 4s + 2 & 4s^2 + 2s + 4 \end{vmatrix} = 16s,$$

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 2s + 12 & -2 \\ -2s - 4 & 4s + 2 \end{vmatrix} = 8s^3 + 12s^2 + 48s + 16,$$

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} 2s^2 + 2s + 12 & -2 - 4 \\ -2s - 4 & 4s^2 + 2s + 4 \end{vmatrix} = 8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + 16s + 32,$$

Alors :

$$X_1(s) = \frac{D_1(s)}{D(s)} = \frac{16s}{8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + 16s + 32} = \frac{2s}{s^4 + 1.5s^3 + 7s^2 + 2s + 4};$$

$$X_2(s) = \frac{D_2(s)}{D(s)} = \frac{8s^3 + 12s^2 + 48s + 16}{8s^4 + 12s^3 + 56s^2 + 16s + 32} = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2}{s^4 + 1.5s^3 + 7s^2 + 2s + 4};$$

Pour rendre la forme du dénominateur quadratique (s^2) nous allons chercher les racines de l'équation caractéristique : $s^4 + 1.5s^3 + 7s^2 + 2s + 4 = 0$,

On utilise un programme sous MATLAB qui nous permet de trouver :

$$\begin{cases} s_{1,2} = a \pm ib = -0.6567 \pm i 2.3807 \\ s_{3,4} = c \pm id = -0.0933 \pm i 0.8044 \end{cases}$$

Les racines sont complexes (vrai pour les structures dynamiques amorties), pour trouver les fonctions inverses par les transformations de Laplace, les solutions doivent être décomposées en éléments simples :

$$X_1(s) = \frac{2s}{[(s+a)^2 + b^2][(s+c)^2 + d^2]} = \frac{C_1 b + C_2(s+a)}{[(s+a)^2 + b^2]} + \frac{C_3 d + C_4(s+c)}{[(s+c)^2 + d^2]};$$

Ou $a = 0.6567$, $b = 2.3807$, $c = 0.0933$ et $d = 0.8044$.

Par développement du numérateur et faire la comparaison, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} C_2 + C_4 = 0 \\ b C_1 + (2c + a)C_2 + d C_3 + (2a + c)C_4 = 0 \\ 2cb C_1 + (2ac + c^2 + d^2)C_2 + 2ad C_3 + (2ac + 2a^2 + b^2)C_4 = 2 \\ (bc^2 + bd^2)C_1 + (ac^2 + ad^2)C_2 + (da^2 + db^2)C_3 + (ca^2 + cb^2)C_4 = 0 \end{cases}$$

On fait recours à Matlab pour trouver :

$$\begin{cases} C_1 = -0.0945 \\ C_2 = -0.3713 \\ C_3 = 0.0196 \\ C_4 = 0.3713 \end{cases}$$

Donc, on peut écrire que :

$$X_1(s) = -0.0945 \frac{b}{[(s+a)^2 + b^2]} - 0.3713 \frac{(s+a)}{[(s+a)^2 + b^2]} + 0.0196 \frac{d}{[(s+c)^2 + d^2]} + 0.3713 \frac{(s+c)}{[(s+c)^2 + d^2]}$$

La fonction inverse de la transformation de Laplace, on trouve :

$$x_1(t) = e^{-0.6567t}(0.0945 \sin 2.3807t - 0.3713 \cos 2.3807t) + e^{-0.0933t}(0.0196 \sin 0.8044t + 0.3713 \cos 0.8044t)$$

De la même manière on trouve :

$$X_2(s) = \frac{s^3 + 1.5s^2 + 6s + 2}{[(s+a)^2 + b^2][(s+c)^2 + d^2]} = \frac{C_5 b + C_6 (s+a)}{[(s+a)^2 + b^2]} + \frac{C_7 d + C_8 (s+c)}{[(s+c)^2 + d^2]} ;$$

$$\begin{cases} C_5 = -0.0418 \\ C_6 = 0.0970 \\ C_7 = 0.3077 \\ C_8 = 0.9030 \end{cases} ;$$

Alors :

$$X_2(s) = -0.0418 \frac{b}{[(s+a)^2 + b^2]} + 0.0970 \frac{(s+a)}{[(s+a)^2 + b^2]} + 0.3077 \frac{d}{[(s+c)^2 + d^2]} + 0.9030 \frac{(s+c)}{[(s+c)^2 + d^2]} ;$$

La fonction inverse de la transformation de Laplace sera :

$$x_2(t) = e^{-0.6567t}(-0.0418 \sin 2.3807t + 0.0970 \cos 2.3807t) + e^{-0.0933t}(0.3077 \sin 0.8044t + 0.9030 \cos 0.8044t) ;$$

La structure dynamique étudiée admet les réponses suivantes pour des vibrations libres amorties qui sont :

$$\begin{cases} x_1(t) = e^{-0.6567t}(0.0945 \sin 2.3807t - 0.3713 \cos 2.3807t) + e^{-0.0933t}(0.0196 \sin 0.8044t + 0.3713 \cos 0.8044t) \\ x_2(t) = e^{-0.6567t}(-0.0418 \sin 2.3807t + 0.0970 \cos 2.3807t) + e^{-0.0933t}(0.3077 \sin 0.8044t + 0.9030 \cos 0.8044t) \end{cases}$$

Qui peuvent être représentés par les courbes suivantes :

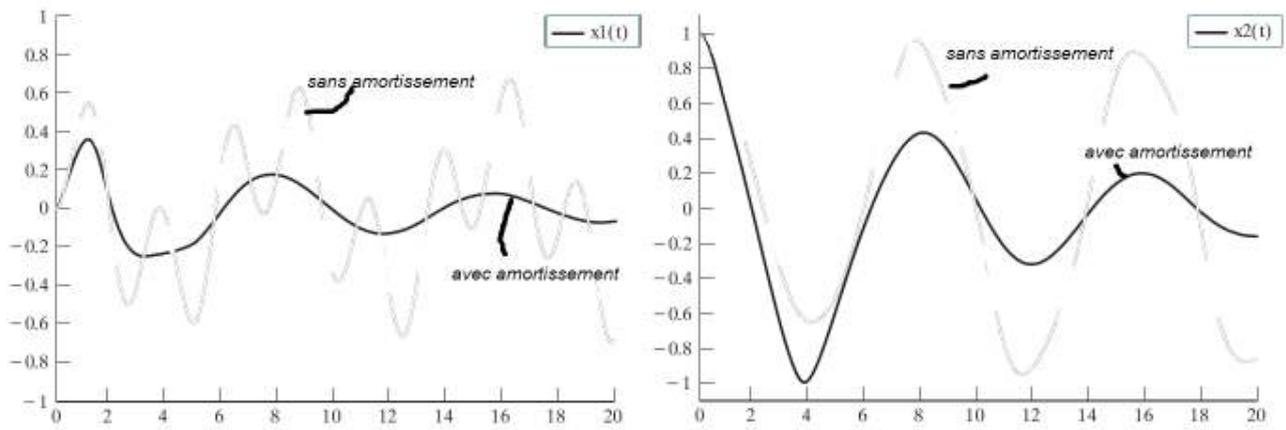


Figure .V.27. Les déplacements des masses de la structures dynamique avec amortissement.

Exemple 2 : Absorbeur dynamique amorti :

Considérons l'absorbeur dynamique ou un amortissement visqueux à été installé en parallèle avec la ressort de rigidité k , comme montrer par la Figure .V.28.

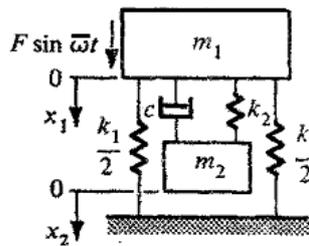


Figure .V.28. Structure dynamique avec absorbeur et amortissement.

Le système des équations différentielles est donnée sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} & -k_2 - ic\bar{\omega} \\ -k_2 - ic\bar{\omega} & k_2 - m_2 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

Avec : $\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} & -k_2 - ic\bar{\omega} \\ -k_2 - ic\bar{\omega} & k_2 - m_2 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega} \end{vmatrix} = 0,$

Alors, par utilisation de la méthode de Cramer, on peut en déduire :

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{\Delta(\omega)} (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega}) F \text{ et } \bar{X}_2 = \frac{1}{\Delta(\omega)} (k_2 + ic\bar{\omega}) F ,$$

La force transmise à la fondation \bar{F}_T à travers le ressort k_1 est : $\bar{F}_T = k_1 \bar{X}_1 = \frac{k_1}{\Delta(\omega)} (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2 + ic\bar{\omega}) F ,$

La grandeur physique de la force transmise F_T peut être calculée par le calcul de la magnitude de \bar{F}_T .

Les amplitudes recherchés X_1 et X_2 peuvent être obtenus par un calcul des magnitudes de \bar{X}_1 et \bar{X}_2 .

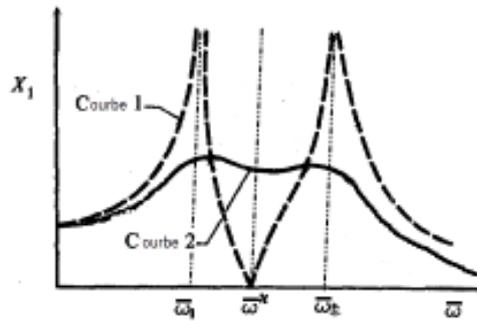


Figure .V. 29. Représentation de X_1 en fonction de $\bar{\omega}$,
courbe 1 : structure sans amortissement et coube 2 avec amortissement.

La courbe 2 représente l'amplitude de la réponse $x_1(t)$ avec la pulstaion forcée, noter l'atténuation de l'amplitude aux environs des pulsations propres $\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$ mais pour $\bar{\omega} = \bar{\omega}^*$ la courbe ne s'annule pas.

L'exemple suivant des vibrations libres en torsion avec amortissement donne plus de détails concernant la démarche de résolution.

Exemple 3 :

A) Une structure mécanique à 1 ddl, est constitué d'un disque lié à un arbre de rigidité k_{t1} , le disque est soumis à un couple d'entraînement $M(t)$, le disque oscille autour de son axe avec une pulsation $\bar{\omega}$. Si son moment d'inertie est J_1 et sa pulsation propre ω_0 est : $\omega_{01} = \sqrt{k_{t1}/J_1} [\frac{rd}{s}]$.

Trouver la relation existante entre l'amplitude de l'angle de torsion θ_1 et la pulsation forcée $\bar{\omega}$?

B) Si on fait ajouter un absorbeur dynamique des vibrations constitué d'un disque de moment d'inertie $J_2 = (1/5) \cdot J_1$ et un arbre de rigidité k_{t2} , sa pulsation propre $\omega_{02} = \sqrt{k_{t2}/J_2} [\frac{rd}{s}]$.

Définir le lien entre l'amplitude des vibrations forcées A_1 et la pulsation forcée $\bar{\omega}$?

C) On ajoute un amortisseur de coefficient \bar{c} entre les deux disques.

Déterminer le rapport entre l'amplitude des vibrations forcées A_1 et les petites valeurs de \bar{c} ?

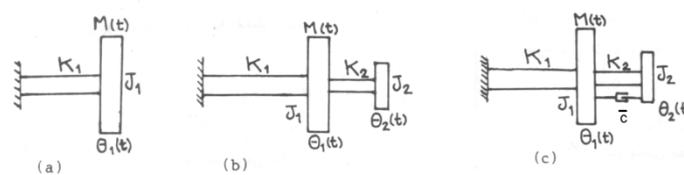


Figure .V.30. Absorbeur dynamique avec amortissement en torsion.

a) Définir la relation $\theta_1 = f(\bar{\omega})$:

L'équation différentielle du mouvement : $J_1 \ddot{\theta}_1 + k_t \theta_1 = M(t)$,

En utilisant la notation complexe : pour : $M(t) = M_0 e^{i\bar{\omega}t}$, alors : la solution recherchée sera de la forme : $\theta_1(t) = A e^{i\bar{\omega}t}$,

Par substitution et en divisant par : $e^{i\bar{\omega}t}$, on trouve :

L'amplitude de l'angle de torsion : $A = \frac{M_0}{k_{t1} - J_1 \bar{\omega}^2} = \frac{M_0}{k_{t1}} \cdot \frac{1}{(1 - \beta^2)}$ [rd] avec $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_{01}}$;

Le graphe suivant l'existence d'une seule pulsation de résonance à : $\bar{\omega} = \omega_{01} = \sqrt{k_{t1}/J_1} \left[\frac{rd}{s} \right]$:

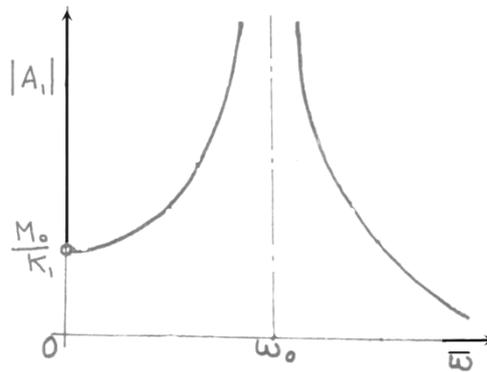


Figure .V.31. Représentation de $|A_1|=f(\bar{\omega})$.

b) Définir le lien $A_1=g(\bar{\omega})$ dans le cas d'ajout d'un absorbeur :

Les équations différentielles du mouvement deviennent :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + k_{t1} \theta_1 + k_{t2} (\theta_1 - \theta_2) = M(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + k_{t2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

Qu'on peut écrire sous forme matricielle, avec des simplifications :

$$\begin{bmatrix} ((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2) & -k_{t2} \\ -k_{t2} & (k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Avec la méthode de Cramer, on trouve les amplitudes des 2 angles de rotation :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{M_0(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2)}{((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2)(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2) - k_{t2}^2} [rd] \\ A_2 = \frac{-k_{t2} M_0}{((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2)(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2) - k_{t2}^2} [rd] \end{cases};$$

Donc pour $\omega=0 \rightarrow A_1=M_0/k_1$,

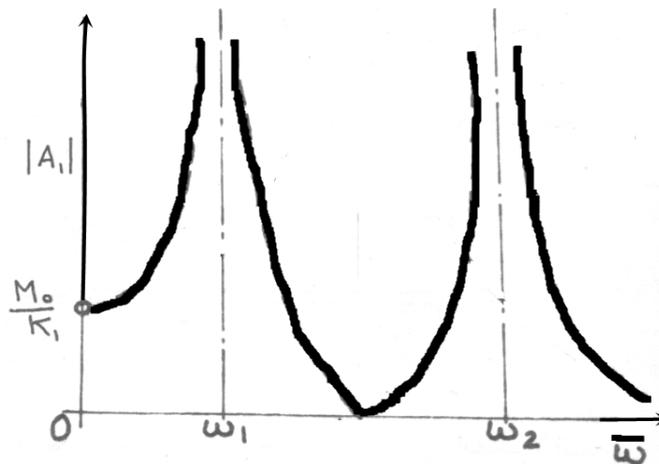


Figure .V.32. Représentation de $|A_1|=f(\bar{\omega})$ en présence de l'absorbeur.

Chapitre V :

Du graphe de l'amplitude A_1 en fonction de la pulsation forcée, montre l'existence deux pulsations de résonance, qui peuvent être déterminé à partir de l'équation caractéristique des pulsations :

$$((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2)(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2) - k_{t2}^2 = 0$$

En utilisant les relations simplificatrices suivantes : $J_2 = 0.2 J_1$ et $\omega_0^2 = \frac{k_{t1}}{J_1} = \frac{k_{t2}}{J_2}$, on trouve :

$$\bar{\omega}_1 = 0.8 \omega_0 \text{ et } \bar{\omega}_2 = 1.23 \omega_0$$

La valeur de la pulsation pour laquelle $A_1 = 0$ est : $\bar{\omega} = \sqrt{\frac{k_{t2}}{J_2}}$ et pour des valeurs $\bar{\omega} \gg \omega_0$.

c) Détermination du rapport entre A_1 et les petites valeurs de \bar{c} :

Les équations différentielles du mouvement seront :

$$\begin{cases} J_1 \ddot{\theta}_1 + \bar{c} (\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_{t1} \theta_1 + k_{t2} (\theta_1 - \theta_2) = M(t) \\ J_2 \ddot{\theta}_2 + \bar{c} (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + k_{t2} (\theta_2 - \theta_1) = 0 \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système, nous devons poser : $\theta_1(t) = A_1 e^{i(\bar{\omega}t + \varphi_1)} = B_1 e^{i\bar{\omega}t}$,

et $\theta_2(t) = A_2 e^{i(\bar{\omega}t + \varphi_2)} = B_2 e^{i\bar{\omega}t}$; avec substitution dans l'équation et en divisant par $e^{i\bar{\omega}t}$, on trouvera :

$$\begin{cases} ((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2) B_1 + i \bar{c} \bar{\omega} B_1 - k_{t2} B_2 - i \bar{c} \bar{\omega} B_2 = M_0 \\ (k_{t2} - J_1 \bar{\omega}^2) B_2 + i \bar{c} \bar{\omega} B_2 - k_{t2} B_1 - i \bar{c} \bar{\omega} B_1 = 0 \end{cases}$$

Mettant le système sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{vmatrix} ((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2 + i \bar{c} \bar{\omega}) & -(k_{t2} + i \bar{c} \bar{\omega}) \\ -(k_{t2} + i \bar{c} \bar{\omega}) & (k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2 + i \bar{c} \bar{\omega}) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_0 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

Par l'application de la méthode de Cramer, on obtiendra :

$$B_1 = \frac{M_0 (k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2 + i \bar{c} \bar{\omega})}{((k_{t1} + k_{t2}) - J_1 \bar{\omega}^2 + i \bar{c} \bar{\omega})(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2 + i \bar{c} \bar{\omega}) - (k_{t2} + i \bar{c} \bar{\omega})^2} ;$$

Pour trouver l'amplitude A_1 de l'angle de torsion ; nous devons calculer la magnitude de B_1 qui est :

$$A_1 = \frac{M_0 \sqrt{(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2)^2 + (\bar{c} \bar{\omega})^2}}{\sqrt{[(k_{t1} - J_1 \bar{\omega}^2)(k_{t2} - J_2 \bar{\omega}^2) - k_{t2} J_2 \bar{\omega}^2]^2 + [\bar{c} \bar{\omega} (k_{t1} - \bar{c} J_1 \bar{\omega}^2 - \bar{c} J_2 \bar{\omega}^2)]^2}} [rd]$$

Si $\bar{c} = 0 \left[\frac{Ns}{m} \right]$, on trouve la même amplitude précédente.

D'après le graphe de A_1 en fonction de la pulsation forcée $\bar{\omega}$, on constate que l'amortissement a réduit les amplitudes du disque dans les deux pulsations de résonance, mais l'augmente aux environs de la pulsation propre, comme montré par la Figure .V.34.

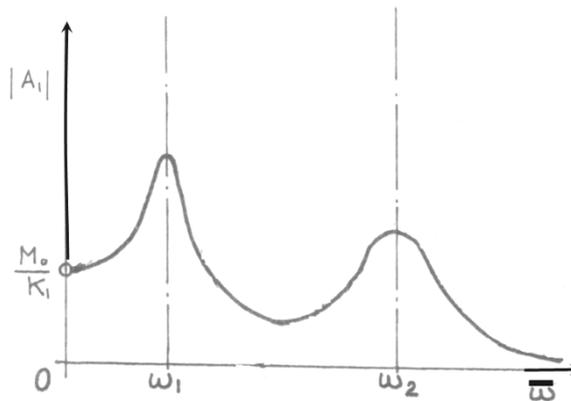


Figure .V.33. Représentation de $|A_1|=f(\bar{\omega})$ en présence de l'absorbeur et de l'amortissement.

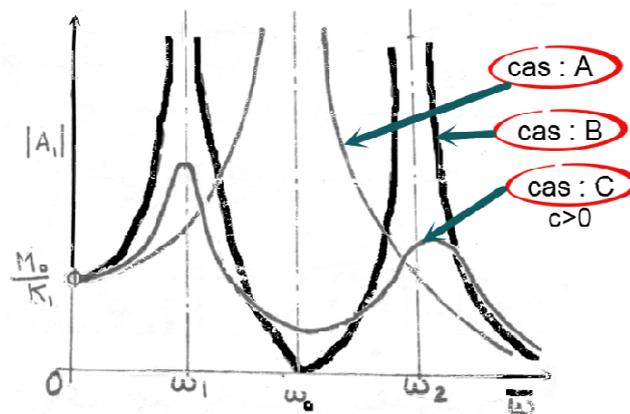


Figure .V.34. Superposition des trois cas étudiés.

3.7. Les vibrations forcées non amorties

Les forces externes sont non nulles dans ce type de vibrations, avec des coefficients d'amortissement qui sont nuls, des exemples simplificateurs ont été pris en considération pour mieux maîtriser l'analyse de ce type d'étude.

Exemple 1 :

Considérons un système constitué de deux masses et trois ressorts comme le montre la Figure V.35.

- Déterminer les réponses permanentes (stationnaires) du système quand les masses sont sujet à des forces harmoniques excitatrices avec une pulsation $\bar{\omega}$ et les amplitudes des forces sont : F_1^0 et F_2^0 , respectivement ?
- Utiliser les résultats obtenus pour évaluer la réponse du système pour : $k_1 = k_2 = k_3 = k$ et $m_1 = m_2 = m$ quand la force excitatrice $F_2 = 0$ et $F_1(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t$

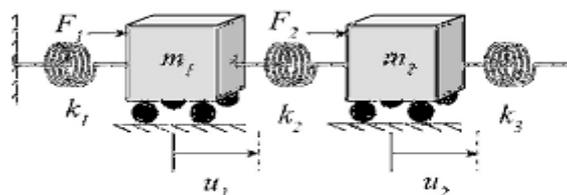


Figure .V.35. Structure de deux masses et trois ressorts.

Le système d'équations différentielles du mouvement, sous forme matricielle ; est donné par :

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix};$$

Détermination des réponses permanentes de la structure :

$$\Delta(\omega) = ((k_1 + k_2) - m_1 \bar{\omega}^2)((k_2 + k_3) - m_2 \bar{\omega}^2) - k_2^2 = 0;$$

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{(k_2 + k_3) - m_2 \omega^2 + k_2 F_2^0}{((k_1 + k_2) - m_1 \bar{\omega}^2)((k_2 + k_3) - m_2 \bar{\omega}^2) - k_2^2} e^{i\bar{\omega}t} \\ u_2(t) = \frac{k_2 F_1^0 + ((k_1 + k_2) - m_1 \omega^2) F_2^0}{((k_1 + k_2) - m_1 \bar{\omega}^2)((k_2 + k_3) - m_2 \bar{\omega}^2) - k_2^2} e^{i\bar{\omega}t} \end{cases}$$

Dans le cas ou : $k_1 = k_2 = k_3 = k$; $m_1 = m_2 = m$ et $F_2 = 0$ et $F_1(t) = F_0 \sin \bar{\omega} t$, on trouve :

$$\begin{cases} u_1(t) = \frac{F_0}{3k} \cdot \frac{[2 - (\bar{\omega}/\omega_1)^2]}{[1 - (\bar{\omega}/\omega_1)^2][1 - (\bar{\omega}/\omega_2)^2]} \sin \bar{\omega} t \\ u_2(t) = \frac{F_0}{3k} \cdot \frac{1}{[1 - (\bar{\omega}/\omega_1)^2][1 - (\bar{\omega}/\omega_2)^2]} \sin \bar{\omega} t \end{cases}$$

Avec, les valeurs des pulsations propres, comme suit : $\omega_1 = \sqrt{k/m} \left[\frac{rd}{s} \right]$ et $\omega_2 = \sqrt{3k/m} \left[\frac{rd}{s} \right]$

Exemple 2 :

Un véhicule de masse m_1 se déplace sur un parcours ondulé régulier avec une vitesse v . le véhicule transporte une caisse de masse m_2 , la masse lié au véhicule à l'aide des chaînes et des câbles d'arrimage considérés comme un ressort de rigidité k_2 , comme illustrer sur la figure., on suppose que le parcours à une longueur d'onde λ , et la grandeur verticale est $y(t)$.



Figure .V.36. Véhicule transportant une caisse.

- Ecrire les équations différentielles du mouvement ?
- Trouver l'amplitude des vibrations forcées de la masse du véhicule et l'amplitude des vibrations de la masse de la caisse, en fonction de la vitesse v du véhicule ? si on vous donne : $m_1=m_2=m$, $k_1=2k_2=k$, tracer les courbes de A_1 et A_2 en fonction de v , et spécifier les plages de vitesses pour lesquelles les masses vibrent dans le même sens ?

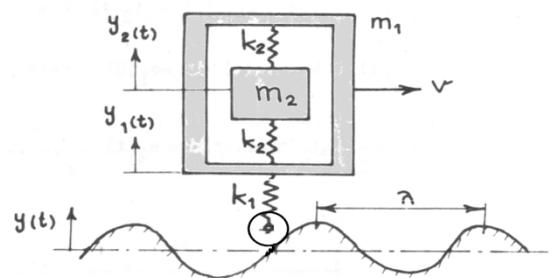


Figure .V.37. Le modèle dynamique similaire à base excitatrice.

Chapitre V :

a) Etablissement des équations différentielles du mouvement :

A l'aide du 2^{ème} principe de la dynamique de Newton et par isolation de chaque masse avec les forces qui agissent sur chacune d'elles, les équations différentielles du mouvement sont établis comme suit :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 + 2k_2(y_1 - y_2) + k_1(y_1 - y) = 0 \\ m_2 \ddot{y}_2 + 2k_2(y_2 - y_1) = 0 \end{cases}$$

b) Les amplitudes des vibrations forcées A_1 et A_2 :

La base son allure est considérée avoir la forme : $y(t) = Be^{-i\bar{\omega}t}$; donc les solutions recherchées seront :

$$y_1(t) = A_1 e^{-i\bar{\omega}t} \text{ et } y_2(t) = A_2 e^{-i\bar{\omega}t}$$

En dérivant et en substituant dans le système d'équations nous aurons :

$$\begin{cases} m \ddot{y}_1 + 2ky_1 - ky_2 = k y \\ m \ddot{y}_2 + k_2y_2 - ky_2 = 0 \end{cases}$$

Sous forme matricielle : $\begin{vmatrix} (2k - m\bar{\omega}^2) & -k \\ -k & (k - m\bar{\omega}^2) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} B \\ 0 \end{Bmatrix}$

Nous utilisons la méthode de Cramer ;

$$\begin{cases} A_1 = \frac{Bk(k - m\bar{\omega}^2)}{(m\bar{\omega}^2)^2 - 3km\bar{\omega}^2 + k^2} \\ A_2 = \frac{Bk^2}{(m\bar{\omega}^2)^2 - 3km\bar{\omega}^2 + k^2} \end{cases} ;$$

Calcul de la pulsation forcée :

$$v = \lambda \cdot f = \lambda \cdot \frac{\bar{\omega}}{2\pi} \rightarrow \bar{\omega} = v \cdot \frac{2\pi}{\lambda} ; \text{ on pose : } \frac{v}{v_0} = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{k/m}} \text{ donc : } v_0 = \frac{\lambda}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} ;$$

Par substitution dans les amplitudes A_1 et A_2 et par division sur k^2 :

$$\begin{cases} A_1 = B \frac{(1 - (\frac{v}{v_0})^2)}{1 - 3(\frac{v}{v_0})^2 + (\frac{v}{v_0})^4} \\ A_2 = B \frac{1}{1 - 3(\frac{v}{v_0})^2 + (\frac{v}{v_0})^4} \end{cases} ;$$

c) Traçage des courbes de A_1 et A_2 :

Pour $v = 0 \rightarrow A_1 = B$ et $A_2 = B$

Pour $v \gg v_0 \rightarrow A_1 = 0$ et $A_2 = 0$,

Les vitesses v pur lesquelles on aura l'une des vitesses propres, et celle pour laquelle le dénominateur nul,

$$\text{son t : } 1 - 3\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{v_0}\right)^4 = 0,$$

La première vitesse critique est : $v_1 = v_0\sqrt{0.4} = 0.63 v_0$;

La deuxième vitesse critique est : $v_2 = v_0\sqrt{2.6} = 1.6 v_0$;

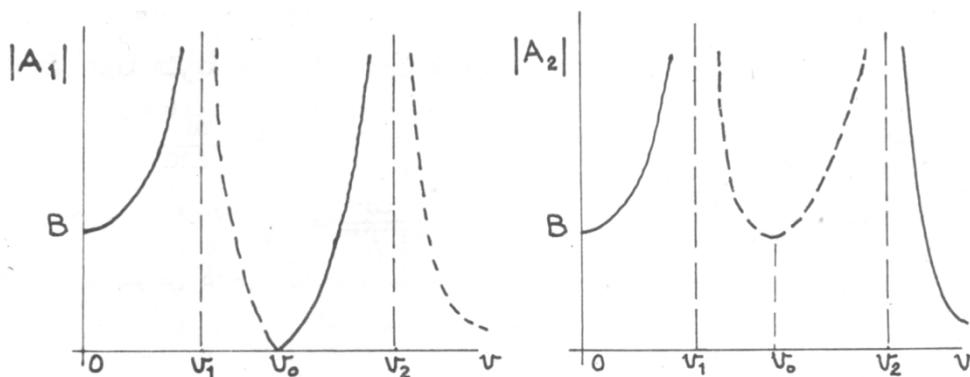


Figure .V.38. Représentation des amplitudes forcées A_1 et A_2 .

D'après les graphes des amplitudes A_1 et A_2 , on peut constater que :

- Les deux masses vibrent au même sens avec $y(t)$ pour les valeurs: $v_1 > v > 0$, (ligne continue)
- Les deux masses vibrent de le sens opposé à $y(t)$ pour les valeurs: $v_0 > v > v_1$, (ligne discontinue).

3.8. Les vibrations forcées amorties

L'analyse de ce type des vibrations forcées les forces externes et les amortissements non sont pas nuls pour mieux maîtriser l'analyse, des exemples simples ont été pris en considération.

Exemple 1 :

Nous allons étudier les vibrations forcées d'une structure dynamique composée de deux masses liés par deux ressorts et deux amortisseurs, avec une force harmonique excitatrice agissant sur la masse m_1 , comme l'indique la figure suivante :

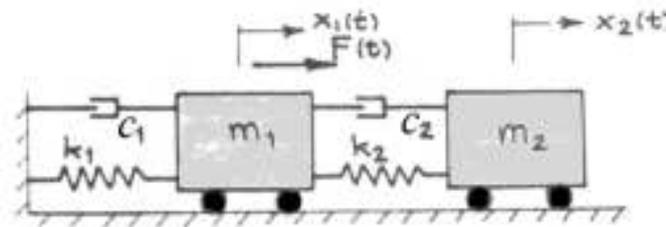


Figure .V.39. Structure dynamique forcée et amortie.

- Trouver les amplitudes des réponses forcées permanentes de la structure ?
- Tracer la courbe de l'amplitude forcée de la masse m_1 en fonction de $\bar{\omega}$?

a) Les amplitudes des réponses forcées permanentes de la structure dynamique :

Le système d'équations différentielles du mouvement est :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + c_1 \dot{x}_1 + c_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_2) = F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + c_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + k_2 (x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

On suppose que : $F(t) = F_0 e^{i \bar{\omega} t}$; les réponses forcées permanentes de la structure seront sous la forme :

$$x_1(t) = A_1 e^{i(\bar{\omega} t + \varphi_1)} = B_1 e^{i \bar{\omega} t} \quad \text{et} \quad x_2(t) = A_2 e^{i(\bar{\omega} t + \varphi_2)} = B_2 e^{i \bar{\omega} t}$$

Par dérivation, et substitution, on trouve que le système d'équations sous forme matricielle devient:

$$\begin{bmatrix} [(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) + i(c_1 + c_2) \bar{\omega}] & -(k_1 + i c_2 \bar{\omega}) \\ -(k_1 + i c_2 \bar{\omega}) & [(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) + i c_2 \bar{\omega}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Par utilisation de la méthode de Cramer, on aura :

$$\begin{cases} B_1 = \frac{F_0 (k_2 - m_2 \bar{\omega}^2 + i c_2 \bar{\omega})}{[(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) + i(c_1 + c_2) \bar{\omega}][(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) + i c_2 \bar{\omega}] - (k_1 + i c_2 \bar{\omega})^2} \\ B_2 = \frac{F_0 (k_1 + i c_2 \bar{\omega})}{[(k_1 + k_2 - m_1 \bar{\omega}^2) + i(c_1 + c_2) \bar{\omega}][(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2) + i c_2 \bar{\omega}] - (k_1 + i c_2 \bar{\omega})^2} \end{cases}$$

Par calcul des magnitudes de B_1 et B_2 , on obtiendra les amplitudes des réponses recherchées :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{F_0 \sqrt{(k_2 - m_2 \bar{\omega}^2)^2 + (c_2 \bar{\omega})^2}}{\sqrt{(m_1 m_2 \bar{\omega}^4 - m_1 k_2 \bar{\omega}^2 - m_2 k_1 \bar{\omega}^2 - m_2 k_2 \bar{\omega}^2 - c_1 c_2 \bar{\omega}^2 + k_1 k_2)^2 + (k_1 c_2 \bar{\omega} + k_2 c_1 \bar{\omega} - m_1 c_2 \bar{\omega}^3 - m_2 c_1 \bar{\omega}^3 - m_2 c_2 \bar{\omega}^3)^2}} \\ A_2 = \frac{F_0 \sqrt{k_2^2 + (c_2 \bar{\omega})^2}}{\sqrt{(m_1 m_2 \bar{\omega}^4 - m_1 k_2 \bar{\omega}^2 - m_2 k_1 \bar{\omega}^2 - m_2 k_2 \bar{\omega}^2 - c_1 c_2 \bar{\omega}^2 + k_1 k_2)^2 + (k_1 c_2 \bar{\omega} + k_2 c_1 \bar{\omega} - m_1 c_2 \bar{\omega}^3 - m_2 c_1 \bar{\omega}^3 - m_2 c_2 \bar{\omega}^3)^2}} \end{cases}$$

Dans le but de simplifier les calculs, prenons le cas où : $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$ et $c_1 = c_2 = c$.

$$\begin{cases} A_1 = \frac{F_0 \sqrt{(k - m\bar{\omega}^2)^2 + (c\bar{\omega})^2}}{\sqrt{(k^2 - 3km\bar{\omega}^2 + m^2\bar{\omega}^4 - c^2\bar{\omega}^2)^2 + (2kc\bar{\omega} - 3cm\bar{\omega}^2)^2}} \\ A_2 = \frac{F_0 \sqrt{k^2 + (c\bar{\omega})^2}}{\sqrt{(k^2 - 3km\bar{\omega}^2 + m^2\bar{\omega}^4 - c^2\bar{\omega}^2)^2 + (2kc\bar{\omega} - 3cm\bar{\omega}^2)^2}} \end{cases}$$

b) Traçage de la courbe de l'amplitude forcée A_1 de la masse m_1 en fonction de $\bar{\omega}$?

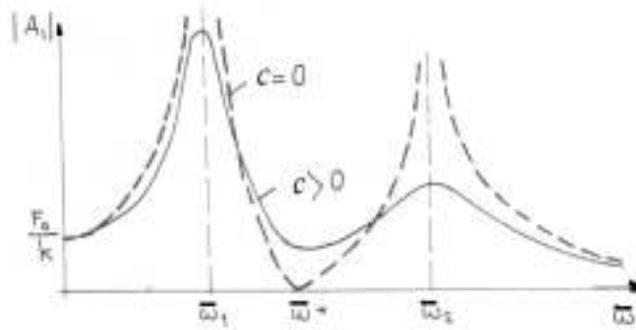


Figure .V.40. Représentation de l'amplitude de la réponse forcée $A_1 = f(\bar{\omega})$.

En faisant la comparaison de la courbe de l'amplitude de la réponse avec amortissement ($c>0$) et sans amortissement ($c=0$), quand la pulsation forcée passe par les pulsations de résonance ($\bar{\omega}_1$ et $\bar{\omega}_2$) les amplitudes prennent des valeurs limitées en présence de l'amortissement et l'amplitude ne s'annule pas pour les valeurs de la pulsation entre les pulsations de résonance et elle atteint des valeurs limitées quand la pulsation forcée sera égale à l'une des pulsations de résonance.

3.9. Les vibrations forcées impulsives non amorties

La force excitatrice externe appliquée à la structure dynamique est de type impulsif, la théorie est très vaste pour cerner tous les types d'impulsions mais pour une meilleure maîtrise de l'étude de ce type des vibrations des exemples ont été pris en considération.

Exemple 1 :

Un bâtiment constitué de deux étages, représentée sur la Figure .V.41., peut être modélisée comme un système à deux degrés de liberté représenté sur la Figure. le deuxième étage du bâtiment est soumis à une explosion qui conduit à une force de forme représentée sur la Figure. quel est le déplacement maximal de chaque étage due à l'explosion?

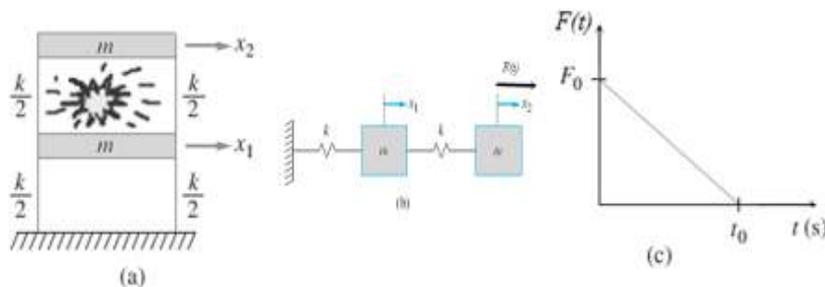


Figure .V.41. Bâtiment de deux étages, sous une charge d'explosion.

Chapitre V :

Le système d'équations différentielles est : $\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2k x_1 - k x_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 - k x_1 + kx_2 = F(t) \end{cases}$;

Faisons appel aux transformées de Laplace, des deux équations et écrivons les résultats sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} ms^2 & -k \\ -k & ms^2 + k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F(s) \end{Bmatrix} ;$$

Les solutions après simplification en tenant compte les transformées inverses de système sont :

$$G_{12}(s) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -k \\ 1 & ms^2+k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ms^2+2k & -k \\ -k & ms^2+k \end{vmatrix}} = \frac{0.447}{m} \left(\frac{1}{s^2+0.382\frac{k}{m}} - \frac{1}{s^2+2.618\frac{k}{m}} \right) ;$$

$$G_{22}(s) = \frac{\begin{vmatrix} ms^2+2k & 0 \\ -k & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ms^2+2k & -k \\ -k & ms^2+k \end{vmatrix}} = \frac{1}{m} \left(\frac{0.724}{s^2+0.382\frac{k}{m}} + \frac{0.276}{s^2+2.618\frac{k}{m}} \right) ;$$

Les transformées inverses seront :

$$L^{-1}\{G_{12}(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{0.447}{m} \left(\frac{1}{s^2+0.382\frac{k}{m}} - \frac{1}{s^2+2.618\frac{k}{m}} \right) \right\} = \frac{0.447}{m} \left[\frac{1}{0.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{1.618} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$$

$$L^{-1}\{G_{22}(s)\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{m} \left(\frac{0.724}{s^2+0.382\frac{k}{m}} - \frac{0.276}{s^2+2.618\frac{k}{m}} \right) \right\} = \frac{1}{m} \left[\frac{0.724}{0.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) + \frac{0.276}{1.618} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right]$$

La réponse forcée est un intégral de convolution de la réponse impulsive et la fonction forcée, donnée par :

$$x_1(t) = \int_0^t F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) [u(t) - u(\tau - t_0)] \cdot L^{-1}\{G_{12}(s)\} \cdot d\tau ;$$

$$x_1(t) = \int_0^t F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0} \right) [u(t) - u(\tau - t_0)] \cdot \left\{ \frac{0.447}{m} \left[\frac{1}{0.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{1.618} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \right\} \cdot d\tau$$

Après l'intégration, on trouve ;

$$\begin{aligned} x_1(t) = & -\frac{0.447}{m} \left\{ \frac{1}{0.382\frac{k}{m}} \left[t - t_0 + t_0 \cos \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{0.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \right. \\ & - \frac{1}{0.382\frac{k}{m}} \left[t - t_0 - \frac{1}{0.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] u(t - t_0) \\ & - \frac{1}{2.618\frac{k}{m}} \left[t - t_0 + t_0 \cos \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{1.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \\ & \left. + \frac{1}{2.618\frac{k}{m}} \left[t - t_0 - \frac{1}{1.618\sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] u(t - t_0) \right\} \end{aligned}$$

La réponse forcée de la masse m_2 :

$$x_2(t) = \int_0^t F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) [u(t) - u(\tau - t_0)] \cdot L^{-1}\{G_{22}(s)\} \cdot d\tau ;$$

$$x_2(t) = \int_0^t F_0 \left(1 - \frac{\tau}{t_0}\right) [u(t) - u(\tau - t_0)] \cdot \left\{ \frac{1}{m} \left[\frac{0.724}{0.618 \sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{0.2761}{1.618} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] \right\} \cdot d\tau$$

Après intégration, on aura :

$$\begin{aligned} x_2(t) = & -\frac{F_0}{m} \left\{ \frac{0.724}{0.382 \frac{k}{m}} \left[t - t_0 + t_0 \cos \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{0.618 \sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \right. \\ & - \frac{0.724}{0.382 \frac{k}{m}} \left[t - t_0 - \frac{1}{0.618 \sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(0.618 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] u(t - t_0) \\ & + \frac{0.276}{2.618 \frac{k}{m}} \left[t - t_0 + t_0 \cos \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) - \frac{1}{1.618 \sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \right] u(t) \\ & \left. - \frac{0.276}{2.618 \frac{k}{m}} \left[t - t_0 - \frac{1}{1.618 \sqrt{\frac{k}{m}}} \sin \left(1.618 \sqrt{\frac{k}{m}} (t - t_0) \right) \right] u(t - t_0) \right\} \end{aligned}$$

La représentation graphique des réponses des deux masses de la structure dynamique sont illustrées sur :

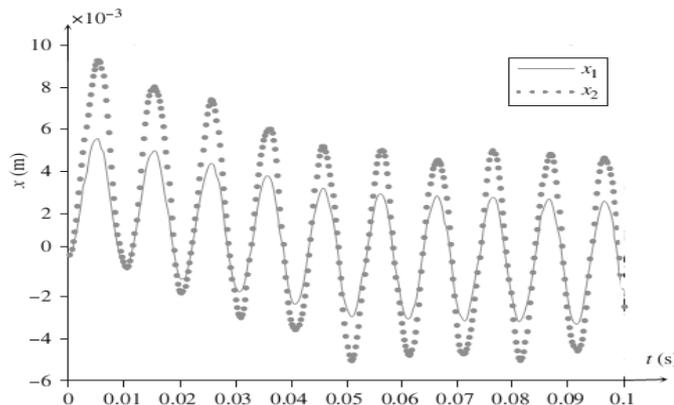


Figure .V.42. Les réponses permanentes de la structure dynamique.

V.4. Généralisation aux structures à plusieurs degrés de liberté ($n > 2$) :

Différentes méthodes peuvent être utilisées pour approcher un système continu en tant que système multi degrés de liberté. Une méthode simple consiste à remplacer la masse ou l'inertie distribuée du système par un nombre fini de masses ou de corps rigides. Les masses localisées sont supposés être reliés par des masses élastiques et des éléments amortisseurs. Les coordonnées linéaires (ou angulaires) sont utilisées pour décrire le mouvement des masses localisées (ou corps rigides). De tels modèles sont appelés paramètres localisés ou masse localisée ou systèmes de masse discrète. le nombre minimum de coordonnées nécessaires pour décrire le mouvement des masses localisées et des corps rigides définit le nombre de degrés de liberté du système. Naturellement, plus le nombre de masses localisées utilisées dans le modèle est grand, plus la précision de l'analyse résultante est élevée.

Une autre méthode populaire d'approximation du système continu en tant que système multi degrés de liberté implique de remplacer la géométrie du système par un grand nombre de petits éléments, en supposant une solution simple à l'intérieur de chaque élément, les principes de compatibilité et d'équilibre solution au système d'origine.

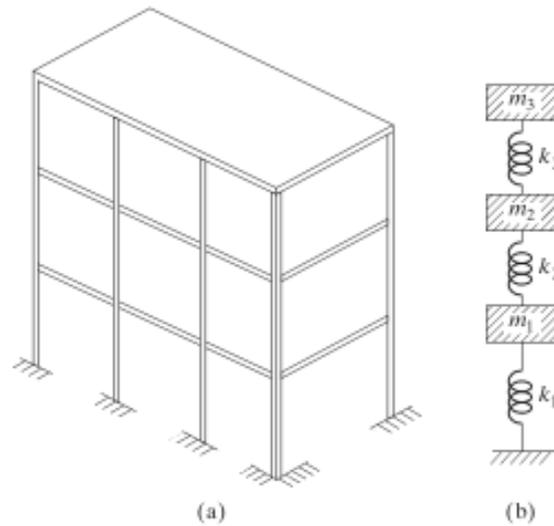


Figure .V.43. Modélisation d'un immeuble à deux étages.

a) Les coordonnées généralisées et forces généralisées :

Les équations du mouvement d'une structure vibrant peuvent être formulées dans un certain nombre de systèmes de coordonnées différents. Comme indiqué précédemment, n coordonnées indépendantes sont nécessaires pour décrire le mouvement d'un système ayant n degrés de liberté. Tout ensemble de n coordonnées indépendantes est appelé coordonnées généralisées, généralement désignées par q_1, q_2, \dots, q_n . Les coordonnées généralisées peuvent être des longueurs, des angles ou tout autre ensemble de nombres qui définissent la configuration du système à tout moment de façon unique.

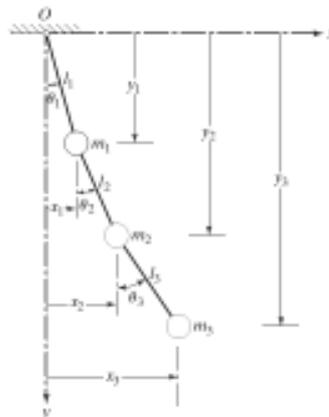


Figure .V.44. Trois pendules.

$(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ Ils sont également indépendants des conditions de contrainte.

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = l_1^2 \\ (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2, \dots \dots \dots (V.65) \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 = l_3^2 \end{cases}$$

Puisque les coordonnées $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3)$ ne sont pas indépendantes, elles ne peuvent pas être appelées coordonnées généralisées. Sans les contraintes d'équation précédente, chacune des masses m_1, m_2, m_3 sera libre d'occuper n'importe quelle position dans le plan x, y . les contraintes éliminent trois degrés de liberté des six coordonnées (deux pour chaque masse), et le système n'a donc que trois degrés de liberté. Si les déplacements angulaires $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ sont utilisés pour spécifier les emplacements des masses m_1, m_2, m_3 à

Chapitre V :

n'importe quel moment, il n'y aura pas de contraintes, ils forment donc un ensemble de coordonnées généralisées et sont notés ($q_1 = \theta_1, q_2 = \theta_2, q_3 = \theta_3$).

Lorsque des forces externes agissent sur le système, sa configuration change. La nouvelle configuration du système peut être obtenue en changeant les coordonnées généralisées q_j par $\delta q_j, j=1,2,\dots, n$; où n désigne le nombre de coordonnées q_j généralisées par la quantité δq_j , la force généralisée correspondante Q_j peut être définie comme

$$Q_j = \frac{U_j}{\delta q_j}; j = 1, 2, \dots, n, \dots \dots \dots (V.66)$$

où Q_j sera une force (moment) où q_j est un déplacement linéaire (angulaire).

b) Les vibrations forcées des systèmes non amorties : analyse modale

Lorsque des forces externes agissent sur un système multi degrés de liberté, le système subit des vibrations forcées. Pour un système avec n coordonnées ou degrés de liberté, les équations de mouvement gouvernantes sont un ensemble de n équations différentielles ordinaires couplées de second ordre.

La solution de ces équations devient plus complexe lorsque le degré de liberté du système (n) est important et / ou lorsque les fonctions de forçage sont non périodiques. Dans de tels cas, une méthode plus pratique appelée analyse modale peut être utilisée pour résoudre le problème. Dans cette méthode, le théorème d'expansion est utilisé, et les déplacements des masses sont exprimés comme une combinaison linéaire des modes normaux du système.

Cette transformation linéaire découple les équations du mouvement de sorte que nous obtenons un ensemble de n équations différentielles découplées de second ordre. La solution de ces équations, qui équivaut à la solution des équations de n systèmes à un seul degré de liberté, peut être facilement obtenue. Nous allons maintenant considérer la procédure de l'analyse modale.

4.1. Les vibrations forcées des systèmes non amortis par l'analyse modale

Le système d'équations du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté soumis à une force externe est :

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x\} = \{F\}; \dots \dots \dots (V.67)$$

Où : \vec{F} est le vecteur des forces externes arbitraires, pour résoudre le système d'équation par la méthode d'analyse modal, il faut tout d'abord résoudre le problème des valeurs propres :

$$\omega^2 [m]\{X\} = [k]\{X\}, \dots \dots \dots (V.68)$$

Et de rechercher les pulsations propres de la structure : $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ qui correspondent aux modes propres $\vec{X}^{(1)}, \vec{X}^{(2)}, \dots, \vec{X}^{(n)}$. Par le théorème d'expansion, le vecteur solution des équations peut être exprimé par une combinaison des modes propres ;

$$\vec{x}(t) = [q_1(t) \quad q_2(t) \quad \dots \quad q_n(t)] \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(n)} \end{bmatrix}; \dots \dots \dots (V.69)$$

Chapitre V :

Les coordonnées généralisées $q_1(t)$ $q_2(t)$... $q_n(t)$ sont des fonctions du temps, connues comme les coordonnées principales ou les coefficients de participation modal, en définissant la matrice colonne modale

$$[X] \text{ par : } [X] = \begin{bmatrix} \vec{X}^{(1)} \\ \vec{X}^{(2)} \\ \vdots \\ \vec{X}^{(n)} \end{bmatrix}, \text{ l'écriture précédente de l'équation devient : } \vec{x}(t) = [X]\{\vec{q}(t)\} \dots\dots\dots(\text{V.70})$$

avec:

$$\{\vec{q}(t)\} = \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{Bmatrix} \text{ ceci nous permet d'avoir : } \ddot{\vec{x}}(t) = [X]\{\ddot{\vec{q}}(t)\}; \dots\dots\dots(\text{V.71})$$

Donc par substitution dans le système d'équations différentielles :

$$[m][X]\{\ddot{\vec{q}}\} + [k][X]\{\vec{q}\} = \{\vec{F}\} \dots\dots\dots(\text{V.72})$$

Par multiplication des deux membres du système d'équations par $[X]^T$, on aura :

$$[X]^T[m][X]\{\ddot{\vec{q}}\} + [X]^T[k][X]\{\vec{q}\} = [X]^T\{\vec{F}\} \dots\dots\dots(\text{V.73})$$

Mais on sait que : $[X]^T[m][X] = [I]$ et $[X]^T[k][X] = [\omega^2][I]$,(V.74)

Reste à définir le vecteur des forces généralisées :

$$\{\vec{Q}(t)\} = [X]^T\{\vec{F}(t)\}, \dots\dots\dots(\text{V.75})$$

Alors ; le système d'équations devient :

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = Q_i(t) \quad , i=1,2,\dots,n \dots\dots\dots(\text{V.76})$$

Comme on peut le constater ce dernier système d'équations est semblable à l'équation différentielle décrivant le mouvement d'une structure à 1 ddl non amortie. Par analogie les solutions du système d'équations seront :

$$q_i(t) = q_i(0) \cos \omega_i t + \left(\frac{\dot{q}(0)}{\omega_i}\right) \sin \omega_i t + \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin \omega_i(t - \tau) d\tau \quad ; i=1,2,\dots, n \dots\dots\dots(\text{V.77})$$

Les déplacements généralisés initiales $q_i(0)$ et les vitesses généralisés initiales $\dot{q}_i(0)$ seront obtenues a partir des valeurs initiales des déplacements physique $x_i(0)$ et les vitesses physiques initiales $\dot{x}_i(0)$.

$$\vec{q}(0) = [X]^T[m]\{\vec{x}(0)\} \text{ et } \dot{\vec{q}}(0) = [X]^T[m]\{\dot{\vec{x}}(0)\} \dots\dots\dots(\text{V.78})$$

Une fois les déplacements généralisés trouvés, les déplacements physiques peuvent être trouvés.

Exemple : (Réponse aux vibrations forcées d'un marteau de forgeage) :



Figure .V.45. Le forgeage manuel et automatique, avec des pièces mécaniques forgées.

La force du marteau de forge agissante sur la pièce à fabriquer est montrée sur la figure en raison d'un impact par le marteau peut être approchée comme une impulsion rectangulaire, comme le montre la figure. Trouver la vibration résultante du système pour les données suivantes:

La masse de la pièce, enclume et cadre $m_1 = 200[Mg]$, masse du bloc de fondation $m_2 = 250[Mg]$, rigidité du tampon élastique $k_1 = 150 [MN/m]$ et raideur du sol $k_2 = 75 [MN/m]$. supposer que les déplacements initiaux et les vitesses initiales de la masse sont nuls.

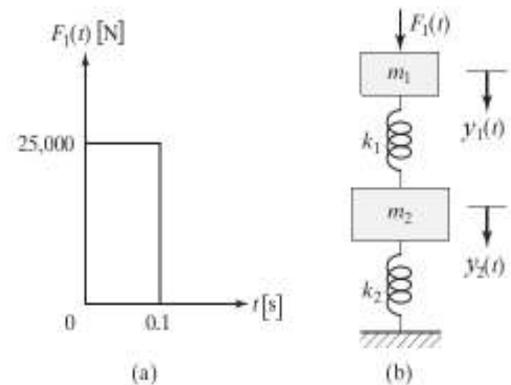


Figure .V.46. Le modèle de la structure dynamique sous impact.

Le marteau à forger peut être modélisé comme une structure à deux degrés de liberté, Figure .V.46, le système d'équations différentielles du mouvement est : $[m]\{\ddot{y}\} + [k]\{y\} = \{F\}$

Les données sont :

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 & 0 \\ 0 & 250 \end{bmatrix} [Mg], \quad [k] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \left[\frac{MN}{m}\right];$$

$$\vec{F}(t) = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix};$$

Les pulsations propres qui peuvent être déterminées par :

$$\Delta(\omega) = |-[m]\omega^2 + [k]| = \left| -\omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \times 10^5 + \begin{bmatrix} 150 & -150 \\ -150 & 225 \end{bmatrix} \times 10^6 = 0 \right|;$$

$$\Rightarrow \omega_1 = 12.2474 \left[\frac{rd}{s}\right] \text{ et } \omega_2 = 38.7298 \left[\frac{rd}{s}\right];$$

Les modes propres :

$$\vec{Y}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{Y}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ;$$

Orthonormalité des modes propres :

$$\vec{Y}^{(1)} = a \begin{Bmatrix} 1 \\ 0.8 \end{Bmatrix} \text{ et } \vec{Y}^{(2)} = b \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} ;$$

Où a et b sont des constantes qui peuvent déterminer par la normalisation de $\vec{Y}^{(1)}$ et $\vec{Y}^{(2)}$;

$$[Y]^T [m] [Y] = [I] ;$$

Cette dernière condition nous donne : $a=1.6667 \times 10^{-3}$ et $b= 1.4907 \times 10^{-3}$, ce qui nous permet de construire la matrice modale :

$$[Y] = [\vec{Y}^{(1)} \ \vec{Y}^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.4907 \\ 1.3334 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Réponses en termes de coordonnées généralisées :

Puisque les conditions initiales des deux masses m_1 et m_2 étaient au repos nulles, à $t=0$ [s] ;

$y_1(0) = y_2(0) = \dot{y}_1(0) = \dot{y}_2(0) = 0$ ce qui donne : $q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0$, donc les coordonnées généralisées sont données par la solution :

$$q_i(t) = \frac{1}{\omega_i} \int_0^t Q_i(\tau) \sin(t - \tau) d\tau, \quad i=1,2.$$

Les forces généralisées :

$$\vec{Q}(t) = [Y]^T \vec{F}(t),$$

$$\text{Alors : } \begin{Bmatrix} \vec{Q}_1(t) \\ \vec{Q}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.3334 \\ 1.4907 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6667 \times 10^{-3} F_1(t) \\ 1.4907 \times 10^{-3} F_1(t) \end{Bmatrix},$$

Les données numériques : $F_1(t) = 25.000$ for $0 \leq t \leq 0.1$ [s] et $F_1(t) = 0$, pour $t > 0.1$ [s].

Avec :

$$q_1(t) = \frac{1}{\omega_1} \int_0^t Q_1(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = 3.4021 \int_0^t \sin 12.2474 (t - \tau) d\tau = 0.2778 (1 - \cos 12.2474 t)$$

$$\text{Et } q_2(t) = \frac{1}{\omega_2} \int_0^t Q_2(\tau) \sin(t - \tau) d\tau = 0.9622 \int_0^t \sin 38.7298 (t - \tau) d\tau = 0.02484 (1 - \cos 38.7298 t)$$

Les réponses forcées des masses de la structure sont :

$$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = [X] \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.6667 & 1.4907 \\ 1.3334 & -1.4907 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.6667 q_1(t) + 1.4907 q_2(t) \\ 1.3334 q_1(t) - 1.4907 q_2(t) \end{Bmatrix} \times 10^{-3} [m].$$

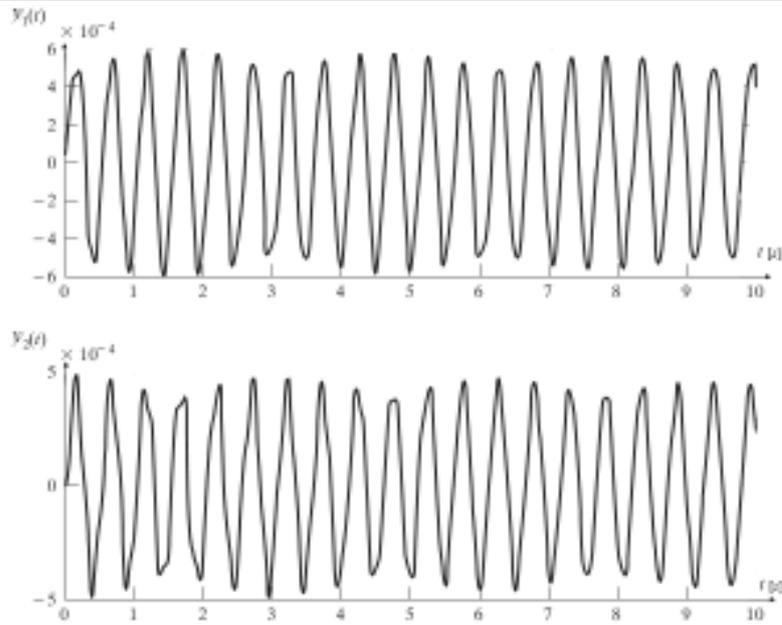


Figure .V.47. Représentation des réponses des vibrations forcées de la structure.

4.2. Les vibrations forcées des structures amorties (amortissement de Rayleigh) par l'analyse modale

Dans de nombreux cas, l'influence de l'amortissement sur la présence d'un système vibratoire est mineure et peut être négligée. Cependant, il faut considérer si la réponse du système est requise pendant une période de temps relativement longue par rapport aux périodes naturelles du système.

De plus, si la fréquence d'excitation (dans le cas d'une force périodique) est à ou près de l'une des fréquences propres du système, l'amortissement est d'une importance primordiale et doit être pris en compte. En général, puisque les effets ne sont pas connus à l'avance, l'amortissement doit être pris en compte dans l'analyse des vibrations de tout système.

Dans cette section, nous considérerons les équations du mouvement d'un système à plusieurs degrés de liberté et leur solution en utilisant les équations de Lagrange. Si le système a un amortissement visqueux, son mouvement sera contraint par une force dont la grandeur est proportionnelle à celle de la vitesse mais dans la direction opposée.

Il convient d'introduire une fonction R, connue sous le nom de fonction de dissipation de Rayleigh, pour dériver les équations du mouvement au moyen des équations de Lagrange. Cette fonction est définie comme:

$$R = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}^T [c] \dot{\vec{x}} \dots \dots \dots (V.79)$$

où la matrice [c] est appelée la matrice d'amortissement et est définie positive, comme les matrices de masse et de rigidité. Les équations de Lagrange, dans ce cas, peuvent être écrites comme:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{x}_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = F_i ; i=1,2,\dots,n \dots \dots \dots (V.80)$$

T : énergie cinétique, V : énergie potentielle.

où F_i est la force appliquée à la masse m_i , en substituant l'équation, on obtient l'équation du mouvement du système multi degré de liberté amorti sous forme matricielle:

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F} \dots \dots \dots (V.81)$$

Pour simplifier, nous allons considérer un système spécial pour lequel la matrice d'amortissement de Rayleigh qui est exprimée comme une combinaison linéaire de $[m]$ et $[k]$. En substituant en équation, on obtient:

$$[c] = \alpha[m] + \beta[k] ; \dots\dots\dots(V.82)$$

où α et β sont des constantes.

Il est appelé « amortissement proportionnel » car $[c]$ est proportionnel à une combinaison linéaire de $[m]$ et $[k]$.

Par substitution dans le système d'équations, on aura : $[m]\ddot{\vec{x}} + (\alpha[m] + \beta[k])\dot{\vec{x}} + [k]\vec{x} = \vec{F} \dots\dots\dots(V.83)$

En exprimant le vecteur de solution \vec{x} comme une combinaison linéaire des modes propres du système non amorti, comme dans le cas de l'équation:

$$\vec{x}(t) = [X]\vec{q} \dots\dots\dots(V.84)$$

Le système d'équations peut être réécrit comme:

$$[m][X]\ddot{\vec{q}} + (\alpha[m] + \beta[k])[X]\dot{\vec{q}} + [k][X]\vec{q} = \vec{F} \dots\dots\dots(V.85)$$

Le pré multiplication du système d'équations par $[X]^T$ cela conduit à:

$$[X]^T[m][X]\ddot{\vec{q}} + (\alpha[X]^T[m][X] + \beta[X]^T[k][X])\dot{\vec{q}} + [X]^T[k][X]\vec{q} = [X]^T\vec{F} \dots\dots\dots(V.86)$$

Si les vecteurs propres $\vec{X}^{(i)}$ $i=1,2,\dots,n$ sont normalisés, l'équation est réduite à:

$$\ddot{\vec{q}}(t) + (\alpha + \omega_i^2\beta)\dot{\vec{q}}(t) + \omega_i^2\vec{q}(t) = Q_i(t) \quad \text{ou, } i=1,2,\dots,n \dots\dots\dots(V.87)$$

où ω_i est la $i^{\text{ème}}$ fréquence naturelle du système non amorti et :

$$\vec{Q}(t) = [X]^T\vec{F}(t) \dots\dots\dots(V.88)$$

En écrivant: $\alpha + \omega_i^2\beta = 2\xi_i\omega_i$, où ξ_i est appelé le rapport d'amortissement modal pour le $i^{\text{ème}}$ mode normal, l'équation est réécrite comme suit:

$$\ddot{\vec{q}}(t) + 2\xi_i\omega_i\dot{\vec{q}}(t) + \omega_i^2\vec{q}(t) = Q_i(t) \quad \text{ou, } i=1,2,\dots,n \dots\dots\dots(V.89)$$

On peut voir que chacune des n équations représentées par cette expression est découplée de toutes les autres. Par conséquent, nous pouvons trouver la réponse du $i^{\text{ème}}$ mode de la même manière que celle d'un système à un seul degré de liberté visqueusement amorti.

La solution d'équations quand $\xi_i < 1$, peut être exprimée comme:

$$q_i(t) = e^{-\xi_i\omega_i t} \left\{ \cos \omega_{di} t + \frac{\xi_i}{\sqrt{1-\xi_i^2}} \sin \omega_{di} t \right\} q_i(0) + \left\{ \frac{1}{\omega_{di}} e^{-\xi_i\omega_i t} \sin \omega_{di} t \right\} \dot{q}_0(0) + \frac{1}{\omega_{di}} \int_0^t Q_i(\tau) e^{-\xi_i\omega_i(t-\tau)} \sin \omega_{di}(t-\tau) d\tau ,$$

$$i=1,2,\dots,n \dots\dots\dots(V.90)$$

$$\text{où: } \omega_{di} = \omega_i \sqrt{1 - \xi_i^2} \left[\frac{rd}{s} \right] \dots\dots\dots(V.91)$$

Notez les aspects suivants de ces structures:

1. L'identification de la source et de l'amplitude de l'amortissement est difficile dans la plupart des problèmes pratiques. Plus d'un type d'amortissement: Coulomb, visqueux et hystérétique peuvent être présents dans le système. En outre, la nature exacte de l'amortissement, telle que le type de variation linéaire, quadratique, cubique ou autre, n'est pas connue, l'obtention de l'amplitude précise est très difficile. Pour certains systèmes pratiques, des valeurs d'amortissement déterminées expérimentalement peuvent être disponibles pour l'analyse vibratoire. Un certain amortissement, sous la forme d'un amortissement structural, est présent dans les structures automobiles, aérospatiales et mécaniques. L'amortissement est introduit délibérément dans certaines applications pratiques telles que les systèmes de suspension des véhicules, les trains d'atterrissage d'aéronefs et les systèmes d'isolation des machines. Parce que l'analyse des systèmes amortis implique de longues manipulations mathématiques, dans de nombreuses études sur les vibrations, qu'elles soient négligées ou supposées proportionnelles.

2. la condition nécessaire est que la transformation qui diagonalise la matrice d'amortissement aussi découpler les équations couplées du mouvement. Cette condition est moins restrictive et couvre plus de possibilités.

3. Dans le cas général de l'amortissement, la matrice d'amortissement ne peut pas être diagonalisée simultanément avec les matrices de masse et de rigidité. Dans ce cas, les valeurs propres du système sont réelles et négatives ou complexes avec des parties réelles négatives. Les valeurs propres complexes existent en tant que paires conjuguées: les vecteurs propres associés sont également constitués de paires complexes conjuguées. Une procédure courante pour trouver la solution du problème de valeur propre d'un système amorti implique la transformation des n équations de mouvement du second ordre couplées en 2n équations du premier ordre non couplées.

Exemple :

Soit la structure dynamique excitée par trois forces harmoniques, elle est composée de trois masses, trois ressorts et cinq amortisseurs, comme représenté par la figure suivante :

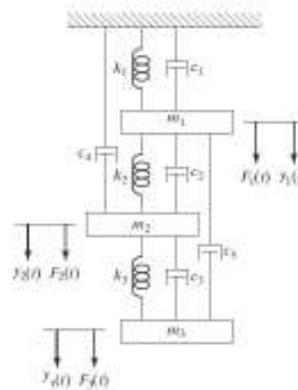


Figure .V.48. Structure dynamique à trois degrés de liberté.

Dans le cas où : les masses sont soumises à des forces harmoniques : $F_1 = F_2 = F_3 = F_0 \cos \bar{\omega}t$ avec : $\bar{\omega} = 1.75 \sqrt{k/m} \left[\frac{rd}{s} \right]$, supposer que : $m_1=m_2=m_3=m$; $k_1=k_2=k_3=k$; $c_4=c_5=0$. Et le pourcentage d'amortissement pour chaque mode normal est donnée par : $\xi_i = 0.01, i=1,2,3$.

-Trouvez les réponses stationnaires de la structure ?

L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}(m_1\dot{y}_1^2 + m_2\dot{y}_2^2 + m_3\dot{y}_3^2)$

L'énergie potentielle : $V = \frac{1}{2}(k_1y_1^2 + k_2(y_2 - y_1)^2 + k_3(y_2 - y_1)^2)$

L'énergie de dissipation de Rayleigh : $R = \frac{1}{2}(c_1\dot{y}_1^2 + c_2(\dot{y}_2 - \dot{y}_1)^2 + c_3(\dot{y}_3 - \dot{y}_2)^2 + c_4\dot{y}_2^2 + c_5(\dot{y}_3 - \dot{y}_1)^2)$

L'équation de Lagrange sera :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{y}_i} + \frac{\partial V}{\partial y} = F_i ; i=1, 2, 3.$$

Ce qui permet d'avoir le système d'équations différentielles du mouvement :

$$[m]\ddot{\vec{y}} + [c]\dot{\vec{y}} + [k]\vec{y} = \vec{F} ,$$

$$\text{Avec : } [m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}, [c] = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 + c_5 & -c_2 & -c_5 \\ -c_2 & c_2 + c_3 + c_4 & -c_3 \\ -c_5 & -c_3 & c_3 + c_5 \end{bmatrix},$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix};$$

Les pulsations propres de la structures non amrties sont :

$$\omega_1 = 0.44504 \sqrt{\frac{k}{m}} [rd.s] , \omega_2 = 1.2471 \sqrt{\frac{k}{m}} [rd.s] ; \omega_3 = 1.8025 \sqrt{\frac{k}{m}} [rd.s].$$

Les modes propres orthonormaux sont :

$$\vec{X}^{(1)} = \frac{0.3280}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.8019 \\ 2.2470 \end{pmatrix}; \vec{X}^{(2)} = \frac{0.7370}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1.0 \\ 1.4450 \\ -0.8020 \end{pmatrix}; \vec{X}^{(3)} = \frac{0.5911}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} 1.0 \\ -1.2468 \\ 0.5544 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur modal peut être exprimer par :

$$[X] = [\vec{X}^{(1)} \ \vec{X}^{(2)} \ \vec{X}^{(3)}] = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.3280 & 0.7370 & 0.5911 \\ 0.5911 & 0.3280 & -0.7370 \\ 0.7370 & -0.5911 & 0.3280 \end{bmatrix};$$

Le vecteur des forces généralisées :

$$\vec{Q}(t) = [X]^T \vec{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.3280 & 0.5911 & 0.7370 \\ 0.7370 & 0.3280 & -0.5911 \\ 0.5911 & -0.7370 & 0.3280 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} F_0 \\ F_0 \\ F_0 \end{pmatrix} \cos \bar{\omega} t$$

$$\vec{Q}(t) = \begin{pmatrix} 1.6561 \frac{F_0}{\sqrt{m}} \\ 0.4739 \frac{F_0}{\sqrt{m}} \\ 0.1821 \frac{F_0}{\sqrt{m}} \end{pmatrix} \cos \bar{\omega} t$$

Chapitre V :

Si les coordonnées généralisées des facteurs de participation modale pour les trois modes principaux sont notées $q_1(t)$, $q_2(t)$ et $q_3(t)$; les équations du mouvement peuvent être exprimées comme:

$$\ddot{\vec{q}}(t) + 2 \xi_i \omega_i \dot{\vec{q}}(t) + \omega_i^2 \vec{q}(t) = Q_i(t) \quad \text{ou, } i=1, 2, 3.$$

Les réponses permanentes peuvent être écrites comme ;

$$q_i(t) = q_{i0} \cos(\bar{\omega}t - \phi_i) \quad , i=1, 2, 3.$$

Où :

$$q_{i0} = \frac{Q_{i0}}{\omega_i^2} \cdot \frac{1}{\left[\left\{ 1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \right)^2 \right\}^2 + \left\{ 2 \xi_i \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \right) \right\}^2 \right]^{1/2}} \quad \text{et} \quad \phi_i = \tan^{-1} \left\{ \frac{2 \xi_i \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \right)}{1 - \left(\frac{\bar{\omega}}{\omega_i} \right)^2} \right\}$$

Par substitution les valeurs, on obtient :

$$q_{10} = 0.57815 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_1 = \tan^{-1}(-0.00544)$$

$$q_{20} = 0.31429 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_2 = \tan^{-1}(-0.02988)$$

$$q_{30} = 0.92493 \frac{F_0 \sqrt{m}}{k}, \quad \phi_3 = \tan^{-1}(0.33827)$$

Enfin, les réponses en régime permanent peuvent être trouvées en utilisant:

$$\vec{x}(t) = [X] \vec{q}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{bmatrix} 0.3280 & 0.7370 & 0.5911 \\ 0.5911 & 0.3280 & -0.7370 \\ 0.7370 & -0.5911 & 0.3280 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{Bmatrix} [m]$$

Partie III : Les structures dynamiques continues

Chapitre VIII :

Les structures dynamiques continues

Les vibrations libres & forcées

VI.1. Introduction

C'est une extension des systèmes à n degré de liberté avec $n \rightarrow \infty$. Dans le cas des structures dynamique ayant une distribution continue de la masse et de la rigidité et de géométrie simple telle qu'une barre ou une poutre homogène avec des conditions aux limites simples, on peut utiliser des solutions analytiques pour le calcul des pulsations et des modes propres ou des réponses vibratoires à une excitation. Dans le cas contraire, on ne peut se passer des méthodes numériques (Rayleigh, Rayleigh- Ritz, modale, Eléments Finis...). Nous résumons dans ce qui suit les équations du mouvement vibratoire de poutres sollicitées en traction compression (vibrations longitudinales des barres), torsion (Vibrations de torsion des arbres) et en flexion (vibrations transversales des poutres), afin d'accéder aux pulsations et aux modes propres des structures libres ou avec des sollicitations extérieurs appliquées.

Les méthodes utilisées dans ce chapitre sont analogues à celles utilisées pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté. La méthode de séparation des variables utilisée pour déterminer les fréquences naturelles est analogue à la solution en mode normal utilisée au chapitre précédent. La méthode utilisée pour l'analyse des vibrations forcées est le résultat direct d'un théorème d'expansion et est directement analogue à analyse modale.

La méthode générale pour déterminer les solutions libres et forcées aux problèmes de vibrations continues est présentée. Elle est appliquée aux structures qui sont régis par des équations aux dérivées partielles dont la dérivée spatiale de plus haut ordre est de second ordre (systèmes du second ordre), en considérant que les matériaux constituant la structure sont homogènes, possèdent des propriétés unis et soumises à la loi de Hooke.

Des exemples de telles structures sont les chaînes, les barres et les arbres. Elle est ensuite appliquée aux structures qui sont régis par des équations aux dérivées partielles dont la dérivée spatiale de premier ordre est de quatrième ordre (systèmes de quatrième ordre). Un exemple de système de quatrième ordre est une poutre.

Afin de montrer l'influence de la masse distribuée de la poutre sur la pulsation propre d'une structure dynamique, considérons par exemple, la poutre en porte-à-faux de la figure suivante avec une masse concentrée à sa fin. La Figure .VI.1. montre la pulsation propre la plus basse non dimensionnelle en fonction du rapport de la masse concentrée à la masse de la poutre. La Figure .VI.2. montre les pulsations naturelles calculées en utilisant jusqu'à six degrés de liberté, ainsi qu'une approximation à un degré de liberté.



Figure .VI.1. Structure dynamique constituée d'une poutre avec une masse concentrée à sa fin, l'approximation discrète fonctionne bien quand m est grand par rapport à la masse de la poutre.

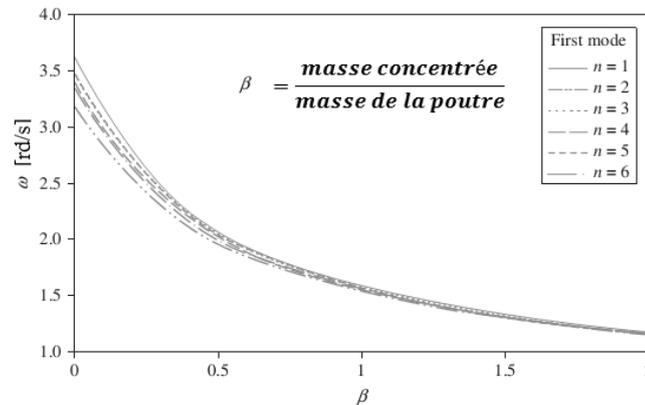


Figure .VI.2. Courbe de $\beta=f(\omega)$, au fur et à mesure que le rapport de la masse concentrée à la masse de la poutre augmente, l'approximation de la pulsation propre la plus basse en utilisant un modèle discret à n degrés de liberté s'améliore.

VI.2. Les vibrations libres des structures dynamiques continues

2.1. Les vibrations longitudinales des barres

Le mouvement longitudinal correspondant à des oscillations de traction-compression des bars qui peut être représenté par (Figure VI.3):

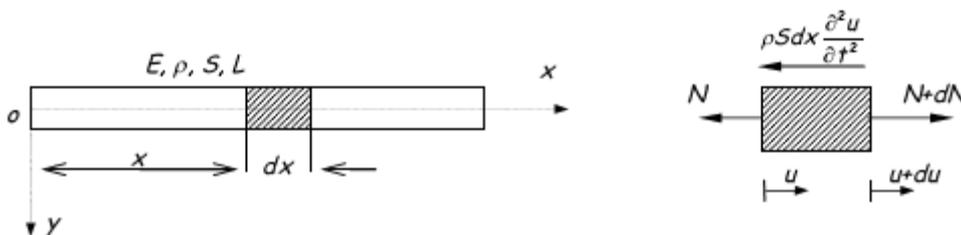


Figure .VI.3. Vibrations longitudinales d'une barre.

Où : $u(x,t)$: le déplacement longitudinale de l'élément barre dx ,

N : La force longitudinale agissant sur la section droite S de l'élément barre dx ,

$dN = \frac{\partial N}{\partial x} dx$: l'accroissement de la force longitudinale,

$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$: l'accroissement du déplacement,

$\rho S dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$: La force d'inertie de l'élément barre dx .

Chapitre VI :

Par application du théorème de la résultante cinétique et la loi de Hooke ($\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{\partial u}{\partial x}$) à un élément de longueur dx , on obtient l'équation (de d'Alembert) du mouvement longitudinale libre dans le cas d'une section constante qui s'écrit :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \dots\dots\dots (VI.1)$$

Avec :

E : module d'élasticité longitudinale du matériau (module d'Young), et ρ : la masse volumique du matériau.

Pour la détermination des pulsations et les modes propres et résoudre l'équation différentielle aux dérivées partielles de type hyperbolique, on utilise la méthode de séparation des variables en posant :

$$u(x, t) = u(x) \cdot T(t) ; \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = u''(x) \cdot T(t) ; \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = u(x) \cdot T''(t) \dots\dots\dots (VI.2)$$

Par substitution dans l'équation différentielle aux dérivées partielles (EDP), on aura le système d'équations :

$$\frac{E}{\rho} \cdot \frac{u''(x)}{u(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x^2} + \omega^2 \cdot \frac{\rho}{E} u(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases} \text{ (équations de vibrations libres non amorties) (VI.3)}$$

Dont les solutions sont :

$$\begin{cases} T(x) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ u(x) = C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x + D \cos \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} x \end{cases} \dots\dots\dots (VI.4)$$

Les conditions aux limites :

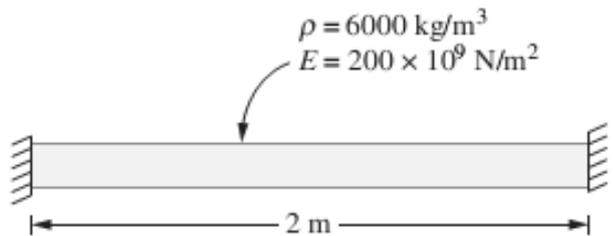


Figure .VI.4. Poutre encastree-encastree.

Dans le cas d'une poutre encastree-encastree, à tout instant on aura :

$$u(0, t) = u(0) \cdot T(t) = 0 \quad \text{et} \quad u(L, t) = u(L) \cdot T(t) = 0,$$

$$\text{ceci nous donne : } D = 0 \quad \text{et} \quad C \sin \omega \sqrt{\frac{\rho}{E}} L = 0 \dots\dots\dots (VI.5)$$

$$\text{Les pulsations propres sont donc : } \omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \dots\dots\dots (VI.6)$$

$$\text{et les modes propres : } U_n(x) = C \sin \frac{n\pi x}{L} \dots\dots\dots (VI.7)$$

La réponse du mouvement sera :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \dots \dots \dots (VI.8)$$

2.2. Les vibrations transversales :

2. 2.1. Les vibrations transversales des cordes et des câbles (équation d'onde)

Considérons une corde ou un câble de longueur L et une masse par unité de longueur $m = \rho A$. En outre, la corde est sous une tension uniforme $N(x,t)$ et $P(x, t)$: une force externe distribuée axialement. La mesure de déplacement est le déplacement transversal $w(x, t)$, (Figure VI.5)

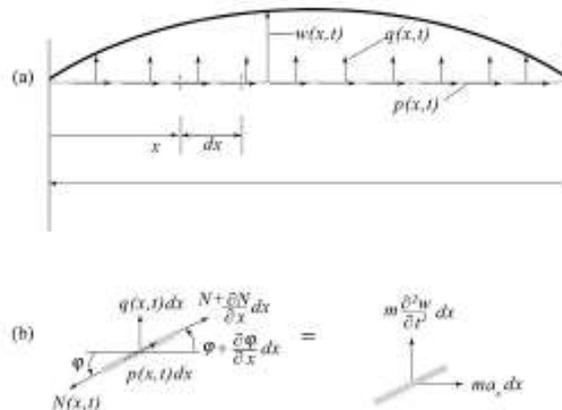


Figure .VI.5. Mouvement transversal d'une corde: (a) déformation et chargement, (b) diagramme cinétique de l'élément différentiel.

L'équation dynamique du mouvement transversale d'une corde est donnée par :

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q(x, t) \dots \dots \dots (VI.9)$$

Où : m : masse par unité de longueur,

w (x,t): le déplacement transversale de la corde,

N (x,t): la tension interne agissnate sur la section transversale,

q(x, t) : une force externe répartie linéairement (force par unité de longueur),

P(x, t) : une force externe distribuée axialement.

Dans le cas des vibrations libres tel le cas :

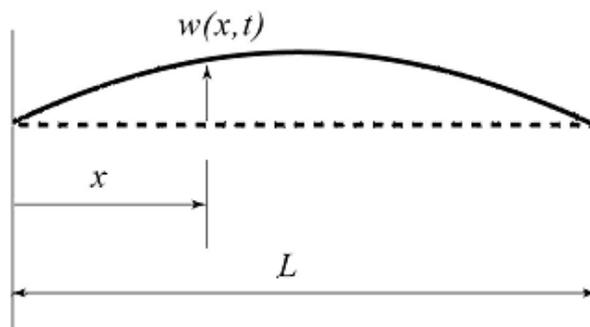


Figure .VI.6. Vibrations transversales d'une corde.

L'équation de mouvement sera :

$$m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - N_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \dots\dots\dots(\text{VI.10})$$

Où : N_0 : une tension uniforme dans la corde,

La vitesse d'onde d'une perturbation transversale se propageant sur la longueur de la corde.:

$$c_0^2 = \frac{N_0}{m} ; \dots\dots\dots(\text{VI.11})$$

Par la méthode de séparation des variables, on trouve que :

$$w(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$$

Les conditions initiales : dans notre cas : $w(0,t) = w(L,t) = 0$, $\rightarrow w(0) = w(L) = 0 \dots\dots\dots(\text{VI.12})$

Ce qui conduit à : $\sin \beta L = 0$, $\rightarrow \beta L = \lambda_n = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) $\dots\dots\dots(\text{VI.13})$

Les pulsations propres seront :

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{N_0}{mL^2}} \left[\frac{rd}{s} \right] \quad (n = 1, 2, \dots), \dots\dots\dots(\text{VI.14})$$

Les modes propres :

$$\phi_n(x) = \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad , (n = 1, 2, \dots) \text{ en posant } B=1 \text{ (unité)}. \dots\dots\dots(\text{VI.15})$$

Par substitution et en adoptant le principe de superposition des solutions, donc la réponse vibratoire sera :

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \cos(n\pi \sqrt{N_0/mL^2} t - \varphi_n) \dots\dots\dots(\text{VI.16})$$

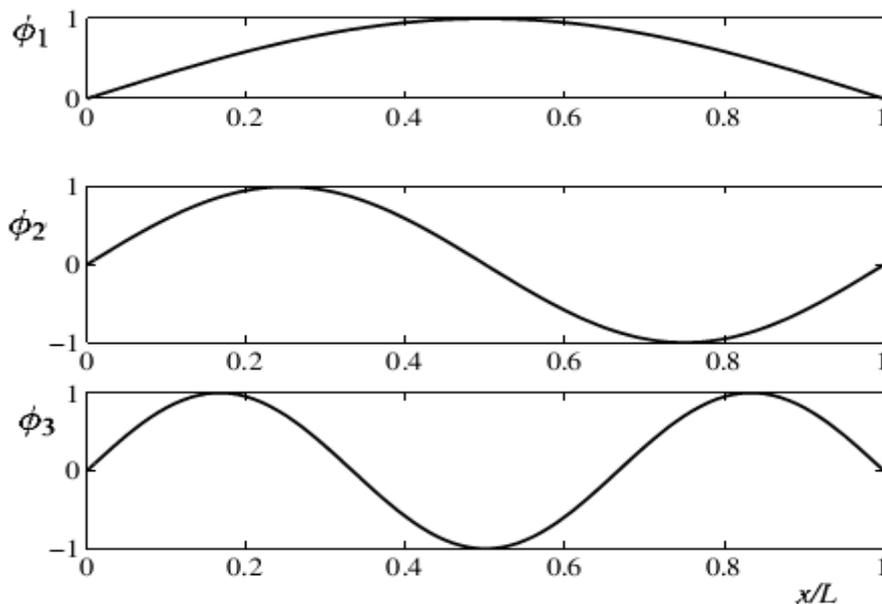


Figure .VI.7. Les trois premiers modes d'une chaîne fixée aux deux extrémités.

2.2.2. Les vibrations transversales des poutres (poutres d'Euler Bernoulli)

Le mouvement de flexion d'une poutre peut être représenté par:

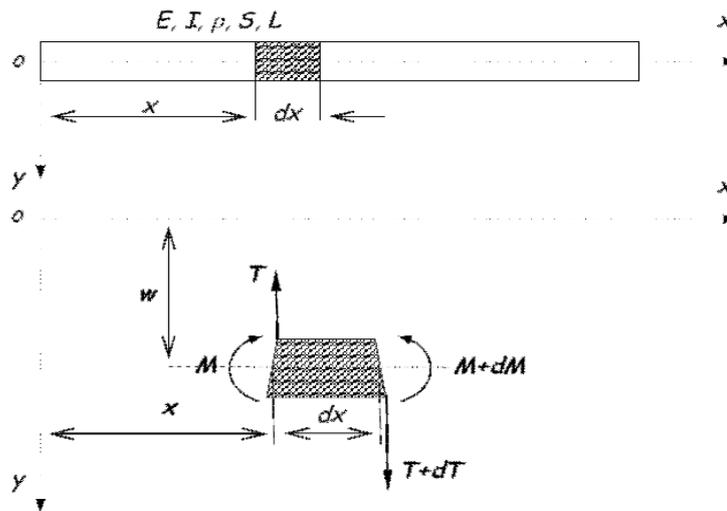


Figure .VI.8. Vibrations de flexion d'une poutre.

Où : $w(x,t)$: le déplacement vertical (flèche) de l'élément de poutre dx ,

T : l'effort tranchant,

M : le moment fléchissant,

$dT = \frac{\partial T}{\partial x} dx$: l'accroissement de l'effort tranchant,

$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$: l'accroissement du moment fléchissant,

$\rho S dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$: La force d'inertie de l'élément poutre dx ,

Par application des théorèmes généraux de la dynamique et des relations classiques de la résistance des matériaux , sans les effets secondaires (cisaillement et inertie de rotation, « torsion ») :

$$EI \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} = -T \text{ et } \psi - \frac{T}{aSG} = \frac{\partial w}{\partial x} \dots\dots\dots(VI.17)$$

Où :

I : inertie de la section,

G : module d'élasticité transversale (module de Coulomb- de cisaillement),

ψ : pente due au moment fléchissant,

a : facteur de forme (≈ 1 pour des sections usuelles).

On aboutit à l'équation du mouvement libre, dans une section constante :

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho S} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \dots\dots\dots(VI.18)$$

Chapitre VI :

Pour la détermination des pulsations et les modes propres et résoudre l'équation différentielle aux dérivées partielles de type hyperbolique, on utilise la méthode de séparation des variables en posant :

$$w(x, t) = w(x).T(t) \dots\dots\dots(VI.19)$$

Après dérivation et substitution dans l'équation, on aura le système d'équations :

$$\frac{EI}{\rho S} \cdot \frac{w''''(x)}{w(x)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = \omega^2 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \omega^2 \cdot \frac{\rho S}{EI} w(x) = 0 \\ \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} + \omega^2 T(t) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots(VI.20)$$

Dont les solutions sont :

$$\begin{cases} T(x) = A \sin \omega t + B \cos \omega t \\ w(x) = C \sin \omega \beta x + D \cos \omega \beta x + E \text{ Sinh } \beta + F \text{ cosh } \beta \end{cases} \dots\dots\dots(VI.21)$$

Avec :

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{\rho S \omega^2}{EI}} \dots\dots\dots(VI.22)$$

Les conditions aux limites permettent de déterminer les pulsations et les modes propres :

Dans le cas d'une poutre sur deux appuis, à tout instant ; on aura :

$$w(0, t) = 0; \frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = 0 \text{ et } w(L, t) = 0; \frac{\partial w(L, t)}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(VI.23)$$

$$\text{Ce qui conduit à : } \sin \beta L = 0, \rightarrow \beta L = \lambda_n = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots), \dots\dots\dots(VI.24)$$

Les pulsations propres seront :

$$\omega_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho S}} \left[\frac{rd}{s} \right] \dots\dots\dots(VI.25)$$

$$\text{et les modes propres seront : } w_n(x) = \phi_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L} \dots\dots\dots(VI.26)$$

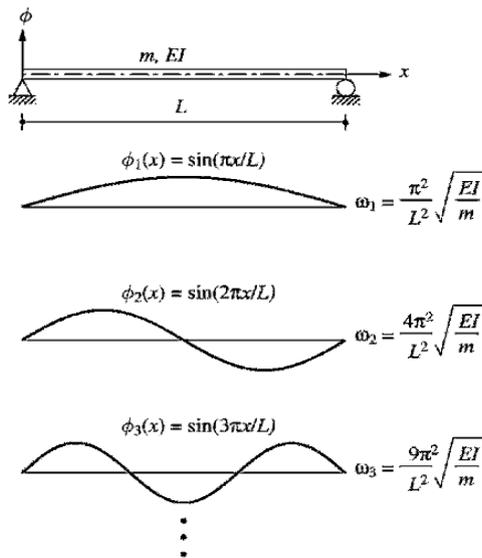


Figure .VI.9. Les modes et les pulsations propres d'une poutre sur deux appuis.

Exemple :

Un nanotube de carbone est un nouveau matériau d'ingénierie qui est fabriqué à partir d'une feuille de graphène roulée pour former un tube comme le montre la Figure VI.10. Cependant, le rayon du tube est le rayon de plusieurs atomes de carbone. Le rayon de 1 atome de carbone est de 0,34 [nm]. Si le nanotube est assez long, l'hypothèse du continuum peut être utilisée et le tube peut être modélisé comme une poutre. Déterminer les cinq pulsations propres les plus basses et leurs modes correspondants du nanotube de carbone avec un rayon moyen de 2 [nm] et une longueur de 100 [nm] ?

Le module d'élasticité d'un nanotube de carbone est de 1 [GPa] et sa masse volumique est de 2,3 [g/cm³]. Supposons que le tube est une poutre fixée à une extrémité et libre de l'autre.

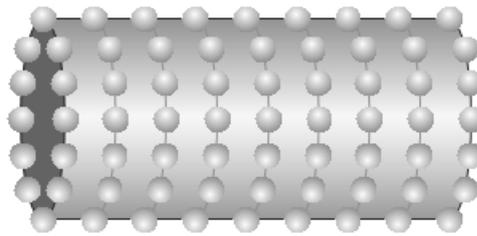


Figure .VI.10. Nanotube de Carbone.

L'équation caractéristique pour une poutre fixée libre (voir Annexe1) est donnée par :

$$\cosh \lambda^{1/4} \cos \lambda^{1/4} + 1 = 0$$

Les pulsations propres non dimensionnelles sont les racines carrées des solutions de cette équation. Si ω_k est une pulsation propre non dimensionnelle, la pulsation propre dimensionnelle correspondante est :

$$\bar{\omega}_k = \omega_k \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

$$\text{Alors : } \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}} = \sqrt{\frac{(1 \times 10^{12} \frac{N}{m^2}) \frac{\pi}{4} [(2 \times 10^{-9} [m])^4 - (1.66 \times 10^{-9} [m])^4]}{(2.3 \frac{g}{cm^3}) (\frac{1 [kg]}{1000 [g]}) (\frac{100 cm}{m})^3 \pi [(2 \times 10^{-9} [m])^2 - (1.66 \times 10^{-9} [m])^2] (100 \times 10^{-9} [m])^4}} = 2.71 \times 10^9 [s^{-1}]$$

Les cinq plus basses pulsations propres non dimensionnelles sont tirées du tableau A.1. de l'annexe, qui seront :

$$\bar{\omega}_1 = 3.51(2.71 \times 10^9 [s^{-1}]) = 9.51 \times 10^9 [\frac{rd}{s}],$$

$$\bar{\omega}_2 = 22.03(2.71 \times 10^9 [s^{-1}]) = 5.97 \times 10^{10} [\frac{rd}{s}],$$

$$\bar{\omega}_3 = 61.70(2.71 \times 10^9 [s^{-1}]) = 1.67 \times 10^{11} [\frac{rd}{s}];$$

$$\bar{\omega}_4 = 120.9(2.71 \times 10^9 [s^{-1}]) = 3.28 \times 10^{11} [\frac{rd}{s}];$$

$$\bar{\omega}_5 = 199.9(2.71 \times 10^9 [s^{-1}]) = 5.41 \times 10^{11} [\frac{rd}{s}].$$

Les modes propres correspondants pour une poutre fixée-libre, sont données par:

$$X_k(x) = C_k [\cosh \lambda^{1/4} x - \cos \lambda^{1/4} x - \alpha_k (\sinh \lambda^{1/4} x - \sin \lambda^{1/4} x)]$$

Chapitre VI :

Où :

$$\alpha_k = \frac{\cos \lambda^{1/4} + \cosh \lambda^{1/4}}{\sin \lambda^{1/4} + \sinh \lambda^{1/4}} \text{ et } \lambda_k = \sqrt{\omega_k}$$

Les modes propres non dimensionnels seront :

$$X_1(x) = C_1[\cosh 1.87x - \cos 1.87x - 0.73(\sinh 1.87x - \sin 1.87x)];$$

$$X_2(x) = C_2[\cosh 4.69x - \cos 4.69x - 1.02(\sinh 4.69x - \sin 4.69x)];$$

$$X_3(x) = C_3[\cosh 7.86x - \cos 7.86x - 0.999(\sinh 7.86x - \sin 7.86x)];$$

$$X_4(x) = C_4[\cosh 11.0x - \cos 11.0x - \sinh 11.0x + \sin 11.0x];$$

$$X_5(x) = C_4[\cosh 14.14x - \cos 14.14x - \sinh 14.14x + \sin 14.14x].$$

La normalisation des modes propres avec respect au produit scalaire énergétique, nous donne :

$$C_i = \frac{1}{\sqrt{\int_0^1 [\cosh \lambda_i x + \cos \lambda_i x - \alpha_i (\sinh \lambda_i x - \sin \lambda_i x)]^2 dx}};$$

Ce qui donne aussi : $C_1 = 1.003, C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 1$.

Les modes propres normalisés sont illustrés sur la Figure .VI.11.

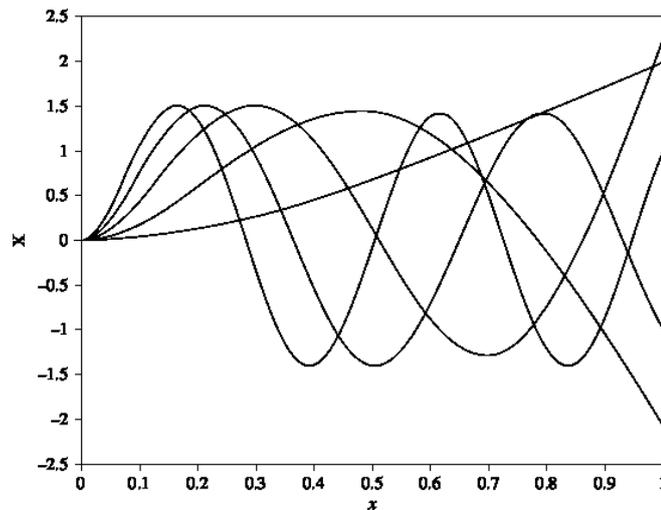


Figure .VI.11. Les cinq modes propres les plus bas.

VI.3. Les vibrations de torsion des arbres

Le mouvement de torsion peut être modélisé de la même façon que le mouvement longitudinal. La Figure .VI.12. représente le mouvement de torsion d'une poutre circulaire.

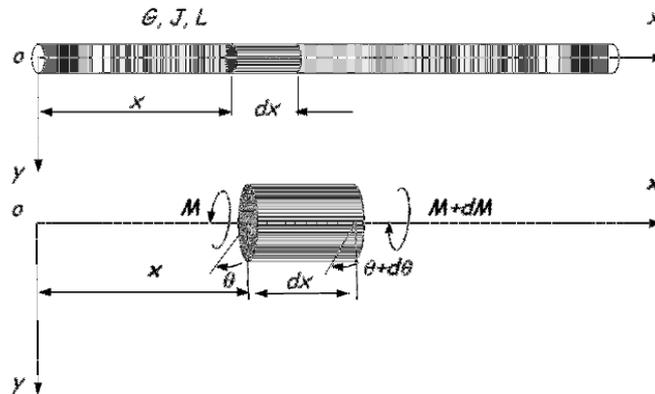


Figure .VI.12. Vibrations de torsion dans un arbre.

Où : $\theta(x,t)$: Le déplacement angulaire (angle de torsion) de l'élément de l'arbre de longueur dx,

$$d\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x} dx : \text{L'accroissement de l'angle de torsion,}$$

M : le couple de torsion appliquée à la section transversale d'abscisse x,

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx : \text{L'accroissement du couple de torsion,}$$

De la résistance des matériaux, le couple et l'angle de torsion sont liés par : $M = GJ \frac{\partial\theta}{\partial x}$,.....(VI.27)

Où : G Module d'élasticité en torsion (module de Coulomb) et J est le moment polaire de la section transversale.

L'équilibre dynamique en rotation de l'élément de l'arbre de longueur dx est réalisé par :

$$I_{\theta} \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = GJ \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} \dots\dots\dots(VI.28)$$

I_{θ} est l'inertie de masse par rapport à l'axe de rotation par unité de longueur (inertie géométrique), dans le cas d'une section circulaire constante : $I_{\theta} = J_p$.

L'équation du mouvement en torsion est similaire à celle du mouvement longitudinale, donc les étapes de résolution sont les mêmes pour la recherche des pulsations et les modes propres.

VI.4. Méthodes énergétiques pour déterminer les pulsations propres des structures continues

Il existe plusieurs méthodes pour la détermination des pulsations propres des structures continues, parmi eux la méthode de Rayleigh, Rayleigh-Ritz, Gallerkin...etc.

a/La méthode de Rayleigh :

Qui est une méthode qui se base sur les énergies a été rencontrer dans les structures dynamiques discrètes à plusieurs ddl, mais nous allons l'appliquer maintenant, sur une structure dynamique continue.

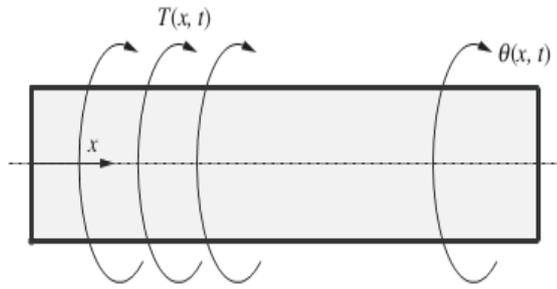


Figure .VI.13. Arbre circulaire soumis à une charge de torsion $T(x, t)$, $\theta(x, t)$ mesure un déplacement angulaire de l'arbre.

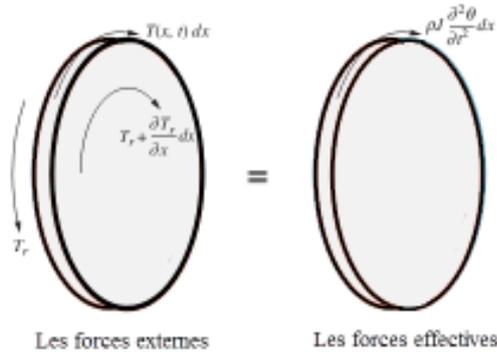


Figure .VI.14. Diagramme de corps libre de l'élément différentiel de l'arbre à un instant arbitraire T (x, t) est le couple résistant dans l'arbre.

Considérons un élément d'un arbre en torsion ; l'arbre a une densité volumique ρ ($7850 \left[\frac{kg}{m^3} \right]$), un module d'élasticité transversale G ($80 \times 10^9 \left[\frac{N}{m^2} \right]$) et une section transversale A , alors une contrainte de cisaillement est développée et égale à :

$$\tau = \frac{T(x,y).r}{J} \dots \dots \dots (VI.29)$$

Où : $T(x,t)$: est le moment résistant dans la section transversale de l'arbre, r : rayon de l'arbre,

$$J : \text{moment polaire } (J = \int_A r^2 dA), \dots \dots \dots (VI.30)$$

$$\text{L'énergie potentielle totale sera : } V = \frac{1}{2} \int_0^L JG \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx, \dots \dots \dots (VI.31)$$

$$\text{Et l'énergie cinétique totale sera : } T = \frac{1}{2} \int_0^L \rho J \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx, \dots \dots \dots (VI.32)$$

Donc, le rapport :

$$R(w) = \omega^2 = \frac{\int_0^L JG \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx}{\int_0^L \rho J \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 dx} \dots \dots \dots (VI.33)$$

Il est appelé « Rapport de Rayleigh » pour déterminer la pulsation basse de la structure continue.

Exemple :

A l'aide du rapport Rayleigh, déterminer la pulsation propre basse de la structure :

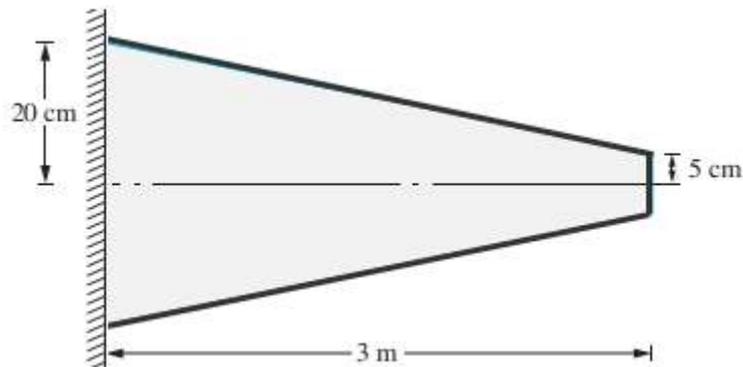


Figure .VI.15. Arbre circulaire conique.

Le moment polaire de l'arbre qui varie le long de l'arbre, est :

$$J(x) = \frac{\pi}{2} (0.2 - 0.05x)^4$$

Une fonction de forme qui satisfait les conditions aux limites : $w(0) = 0$ et $\frac{dw}{dx} \Big|_{x=3m} = 0$ est de la forme :

$$w(x) = \sin \frac{\pi}{6} x$$

La pulsation propre de l'arbre sera :

$$R(w) = \omega^2 = \frac{80 \times 10^9 \left[\frac{N}{m^2} \right] \int_0^3 (0.2 - 0.05x)^4 \left(\frac{\pi}{6} \right)^2 \cos^2 \frac{\pi}{6} x dx}{7850 \left[\frac{kg}{m^3} \right] \int_0^3 (0.2 - 0.05x)^4 \sin^2 \frac{\pi}{6} x dx} ;$$

$$\omega_1 \leq [R(\omega)]^{1/2} = 3767 \left[\frac{rd}{s} \right].$$

b/ La méthode de Rayleigh-Ritz :

La méthode de Rayleigh-Ritz, se base sur le rapport-Rayleigh, est utilisée pour l'approximation d'un nombre fini des pulsations propres basses d'une structure continue.

Posons u_i sont des fonctions linéairement indépendants, chacune d'elles satisfait les conditions aux limites pour une structure dynamique continue et spécifique. Une approximation de la réponse de la structure continue dans le cas des vibrations libres est supposée être:

$$w(x) = \sum_{i=1}^n c_i u_i(x) \dots \dots \dots (VI.34)$$

Par substitution dans le rapport de Rayleigh, qui sera ré écrit comme :

$$R(w)(w, w)_T = (w, w)_v \dots \dots \dots (VI.35)$$

Où : (w, w) : est le produit scalaire des énergies.

Puisque $R(w)$ est stationnaire au voisinage de mode propre, la meilleure approximation aux pulsations propres et les modes en utilisant les fonctions $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$, est obtenue en posant :

$$\frac{\partial R}{\partial c_1} = \frac{\partial R}{\partial c_2} = \dots = \frac{\partial R}{\partial c_n} = 0, \dots \dots \dots (VI.36)$$

Chapitre VI :

Par dérivation de l'équation (VI.35) par rapport à c_k pour tout $k=1,2, \dots, n$ et utilisant l'équation (VI.36), on aura :

$$R(w) \frac{\partial(w,w)_T}{\partial c_k} = \frac{\partial(w,w)_V}{\partial c_k}, \dots\dots\dots (VI.37)$$

Par développement de l'équation pour tout $k=1,2, \dots, n$, conduit à une équation linéaire homogène à résoudre pour c_1, c_2, \dots, c_n en termes du paramètre $R(w)$. Puisque les équations sont homogènes, une solution non triviale est disponible si et seulement si le déterminant est égal à zéro, ce qui donne une équation polynomiale d'ordre n pour $R(w)$. Les racines du polynôme sont le carré des approximations aux pulsations naturelles (propres) les plus basses. Des approximations pour les modes propres peuvent être obtenues en revenant aux équations homogènes. La méthode est illustrée par l'exemple suivant.

Exemple :

Utiliser la méthode de Rayleigh-Ritz pour approximer les deux pulsations propres basses de l'arbre en torsion, Figure .VI.16.

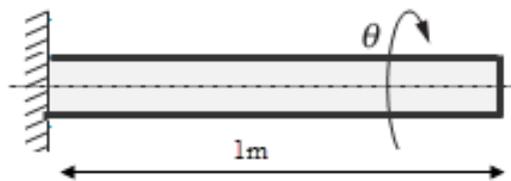


Figure .VI.16. Arbre en torsion.

Les deux polynômes qui satisfont les conditions aux limites sont :

$$u_1(x) = 2x - x^2 \quad \text{et} \quad u_2(x) = 3x - x^3$$

La forme du mode propre approximé est :

$$w(x) = c_1(2x - x^2) + c_2(3x - x^3)$$

Les produits scalaires énergétiques seront :

$$(w, w)_T = \int_0^1 [c_1(2x - x^2) + c_2(3x - x^3)]^2 dx = \frac{8}{15} c_1^2 + \frac{61}{30} c_1 c_2 + \frac{204}{105} c_2^2,$$

$$(w, w)_V = \int_0^1 [c_1(2 - 2x) + c_2(3 - 3x^2)]^2 dx = \frac{4}{3} c_1^2 + 5 c_1 c_2 + \frac{24}{5} c_2^2,$$

Par application de l'équation (VI.37), nous aurons :

$$\left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}R\right) c_1 + \left(5 - \frac{61}{30}R\right) c_2 = 0 ;$$

$$\left(5 - \frac{61}{30}R\right) c_1 + \left(\frac{48}{5} - \frac{136}{35}R\right) c_2 = 0 .$$

Une solution non triviale du système si le déterminant est égale à zéro, donc :

$$\det \begin{bmatrix} \left(\frac{8}{3} - \frac{16}{15}R\right) & \left(5 - \frac{61}{30}R\right) \\ \left(5 - \frac{61}{30}R\right) & \left(\frac{48}{5} - \frac{136}{35}R\right) \end{bmatrix} = 0$$

Chapitre VI :

Nous obtenons l'équation caractéristique suivante : $9.24 R^2 - 241.0 R + 538.0 = 0$

Dont, ces racines sont :

$$R = 2.467, 23.610.$$

Alors, les pulsations propres de la structure dynamique continue, sont :

$$\omega_1 \approx 1.571 \left[\frac{rd}{s} \right] \text{ et } \omega_2 \approx 4.859 \left[\frac{rd}{s} \right],$$

L'approximation des basses pulsations propres est excellente avec une erreur de 3.3% en plus que la valeur de la solution exacte.

Les approximations des modes propres sont obtenues en résolvant pour c_2 en terme de c_1 pour chaque R , puis en substituant dans l'expression pour $w(x)$ avec c_1 restant arbitraire. cela conduit à :

$$w_1(x) = 7.58 x - x^2 - 1.86 x^3, \quad w_2(x) = 0.4295 x - x^2 + 0.5235 x^3$$

Les modes propres rapprochés sont présentés sur la Figure .VI.17., ils ont été normalisés de telle sorte que

$$w_i(1) = 1.$$

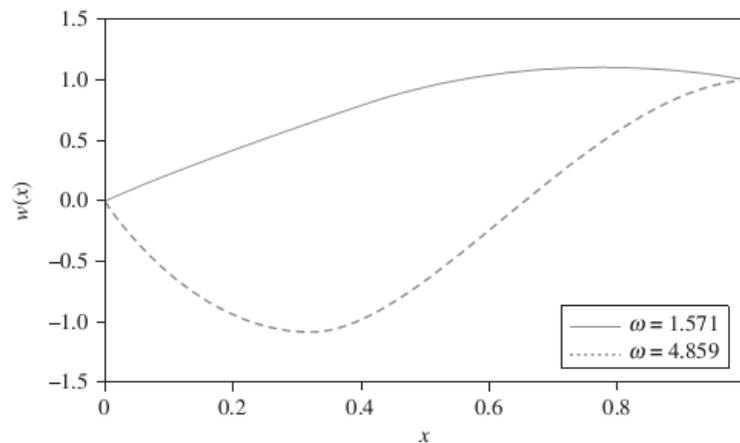


Figure .VI.17. La méthode de Rayleigh-Ritz donne des approximations aux deux modes propres correspondants aux deux pulsations propres les plus basses d'un arbre en torsion à extrémités libre-fixe.

VI.5 . Orthogonalité des modes propres

Les fonctions modales d'une structure dynamique donnée correspondent à des mouvements fondamentaux qui constituent la réponse de cette structure. Il est évident que tout mouvement, forcé ou libre, peut être décrit comme une combinaison linéaire des fonctions modales. Pour établir cela, nous devons d'abord établir l'orthogonalité mutuelle.

Les propriétés les plus importantes des modes normaux sont celles de l'orthogonalité. C'est cette propriété qui permet le découplage des équations du mouvement. Pour deux pulsations différentes $\omega_n \neq \omega_m$, les modes normaux doivent satisfaire :

$$\int_0^L m(x) \phi_n(x) \phi_m(x) dx = 0, \quad \text{pour } n \neq m ;$$

$$\text{Pour } n=m ; \int_0^L m(x) \phi_n^2(x) dx = M_n, \dots\dots\dots(VI.38)$$

Où : M_n est appelée la « masse généralisée » à la $n^{\text{ième}}$ mode.

Exemple :(vibrations longitudinales)

Considérons la barre de longueur L , de rigidité axiale EA et de masse m , encastrée d'un côté et attachée à un bloque de l'autre côté, ce bloque possède une masse $M=\alpha mL$, α coefficient sans dimension.

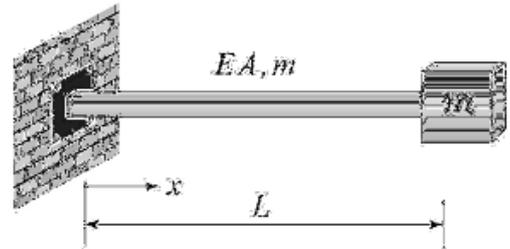


Figure.VI.18. Barre attaché à un bloc.

- Déterminer l'équation de la pulsation et la forme générale du mode de la structure correspondant ?
- Evaluer les trois premières pulsations de la structure pour $\alpha=2$?

- Evaluer la réponse générale des vibrations libres de la barre de la structure ($\alpha=2$) ?

(a). La solution du côté de déplacement x sera $u(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$

Les conditions aux limites de la barre :

- * du côté encastrée : $u(0,t)= U(0)= 0$;
- * du côté attachée à la masse M :

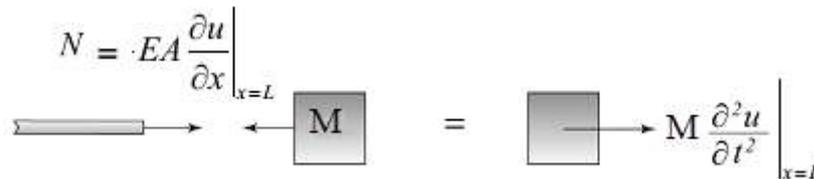


Figure .VI.19. Diagramme cinétique.

D'après la Figure VI.19., la condition sera :

$$-EA \frac{\partial U}{\partial x} \Big|_{x=L} = M \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \Big|_{x=L} \rightarrow -EA U'(L)e^{i\omega t} = -M\omega^2 U(L)e^{i\omega t}$$

$$\text{Enfin : } U'(L)e^{i\omega t} - \frac{M}{m}\beta^2 U(L) = 0$$

Maintenant les conditions aux limites sont établis, la première condition, nous donne : $U(0)=0 \rightarrow A=0$

En substituant dans la solution : $U(x) = A \cos \beta x + B \sin \beta x$, on aura : $U(x) = B \sin \beta x$

$$\text{La deuxième condition, nous donne : } \beta B \left[\cos \beta L - \beta \frac{M}{m} \sin \beta L \right] = 0$$

Les racines de cette équation peut être déterminé numériquement pour une valeur donnée du rapport massique α . Les modes propres correspondants sont alors de la forme :

$$U^n(x) = B^n \sin \beta_n x \quad (n = 1,2, \dots),$$

où β_n correspond à la $n^{\text{ième}}$ racine de l'équation. Puisque B^n est arbitraire, on doit le mettre égal à un, rendant la fonction modale de la barre à la forme :

$$U^n(x) = \sin \beta_n x \quad (n = 1,2, \dots)$$

(b). Les trois premières racines de l'équation, pour $\alpha = 2$ sont obtenues en utilisant le programme MATLAB "fzero".

$$\beta L = 0.6533, 3.292, 6.362, \dots$$

Chapitre VI :

Les pulsations propres seront :

$$\omega_n = \beta_n L \sqrt{EA/mL^2},$$

De laquelle, on obtient : $\omega_1 = 0.6533 \omega_0$, $\omega_2 = 3.292 \omega_0$; $\omega_3 = 6.362 \omega_0$

Avec : $\omega_0 = \sqrt{EA/mL^2}$

(c). La réponse générale des vibrations libres est donnée par :

$$u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} U^j(x) A^j \cos(\omega_j t - \phi_j) \rightarrow u(x, t) = \sum_{j=1}^{\infty} A^j \sin \beta_j x \cos(\omega_j t - \phi_j),$$

$$u(x, t) = A^1 \sin(0.6536 \omega_0 x/L) \cos(0.6536 \omega_0 t - \phi_1) + A^2 \sin(3.292 \omega_0 x/L) \cos(3.292 \omega_0 t - \phi_2) + A^3 \sin(6.362 \omega_0 x/L) \cos(6.362 \omega_0 t - \phi_3) + \dots$$

Où : A^j et ϕ_j ($j=1,2,\dots$) sont déterminées à partir des conditions initiales.

Vérification de l'orthogonalité des modes :

Pour établir l'orthogonalité des fonctions modales, nous devons prendre les termes entre crochets de l'équation :

$$[\hat{N}^{(n)}(L)U^{(n)}(L) - \hat{N}^{(n)}(L)U^{(n)}(L)] - [\hat{N}^{(n)}(0)U^{(n)}(0) - \hat{N}^{(n)}(0)U^{(n)}(0)] = 0 \quad (**)$$

La somme égale à zéro. Pour la condition de support donnée ;

$$U(0)=0,$$

Donc, la deuxième expression entre crochets de l'équation 10.111 est vue disparaître identiquement. Si nous considérons que la masse concentrée fait partie de la tige. l'opérateur de masse et la distribution sont donnés par l'équation des structures continus avec un ou plusieurs points de masse concentrés

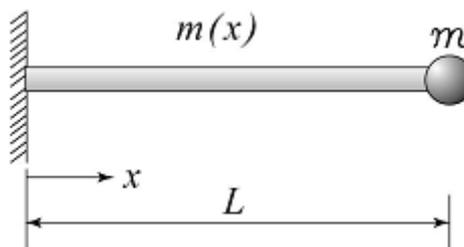


Figure .VI.20. Structure lisse avec masse attachée.

Dans ce cas: $m(x) = m(x) + m \delta(x - L)$

Pour ($x = L$) alors la condition limite à la droite de la masse ponctuelle (en $x = L$) est alors:

$$\hat{N}(L^+) = 0$$

La première expression entre parenthèses de l'équation (**), vu pour disparaître aussi bien. Les fonctions modales sont donc orthogonales entre elles par rapport à la masse du sens de l'équation ;

$$\int_0^L U^n m(x) U^n dx = \int_0^L U^n m(x) U^n dx + U^n(L) m U^n(L) = 0$$

et sont donc orthogonaux par rapport à l'opérateur de raideur dans ce sens également.

VI.6. Les vibrations non amorties forcées des structures dynamiques continues

Le traitement et les étapes à suivre pour la résolution des problèmes de vibrations forcées sont présentés par des exemples de vibrations de torsion et transversales.

6.1. Les vibrations de torsion :

L'application de coefficients non dimensionnels pour les excitations harmoniques est illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple :

Un disque mince de la Figure VI.21. est soumis à un couple harmonique $T(t) = T_0 \sin \omega t$.

Déterminer la réponse à l'état stationnaire de la structure ?

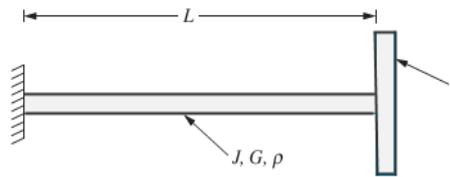


Figure .VI.21. Disque en torsion harmonique forcé.

L'équation du mouvement est donnée par :

$$T(x, t) + JG \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

Considérons l'équation homogène sans dimension : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ avec

Les conditions aux limites $\theta(0, t) = 0$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x}(1, t) = -\beta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}(1, t) + \frac{T_0 L}{JG} \sin \bar{\omega} t$

Où : $\bar{\omega} = L \sqrt{\frac{\rho}{G}} \omega$.

Le moment externe appliqué est harmonique alors la réponse stationnaire sera de la forme :

$$\theta(x, t) = u(x) \sin \bar{\omega} t,$$

La substitution de la réponse dans l'équation homogène nous donne :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} \sin \bar{\omega} t = -\bar{\omega}^2 u \sin \bar{\omega} t \text{ ou : } \frac{d^2 u}{dx^2} + \bar{\omega}^2 u = 0 .$$

Par substitution de la réponse dans les conditions aux limites, nous aurons ;

$$u(0)=0 \text{ et } \frac{du}{dx}(1) - \beta \bar{\omega}^2 u(1) = \frac{T_0 L}{JG}$$

La réponse sear :

$$u(x) = \frac{T_0 L}{(\bar{\omega} \cos \bar{\omega} - \beta \bar{\omega}^2 \sin \bar{\omega}) JG} \sin \bar{\omega} t.$$

6.2. Les vibrations transversales des poutres :

Exemple :

Une machine de masse de 150 [kg] est fixée à l'extrémité de la poutre en porte-à-faux de la Figure .VI.22. La machine fonctionne à 2000 [tr / min] et a un balourd tournant de 0,965[kg.m].

Quelle est l'amplitude de la vibration de l'extrémité de la poutre en régime permanent?

L'équation fondamentale nondimensionnelle qui régit le modèle est :

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

Ou les conditions aux limites sont :

$$w(0, t) = 0, \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) = 0, \frac{\partial w}{\partial x}(1, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(1, t) = -\beta \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(1, t) + \alpha \sin \bar{\omega} t$$

$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{\rho AL^4}{EI}} = \left(2000 \left[\frac{tr}{min}\right]\right) * \frac{2\pi \left[\frac{rd}{s}\right]}{60 \left[\frac{s}{s}\right]} \sqrt{\frac{(280 \text{ [kg]})(3 \text{ [m]})^3}{(210 \times 10^9 \left[\frac{N}{m^2}\right]) (1.2 \times 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]})}} = 3.63$$

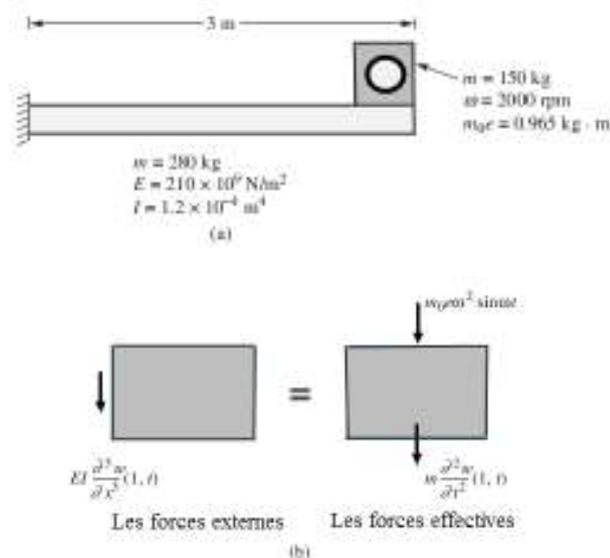


Figure .VI.22. (a) Poutre à extrémités fixe-libre avec une machine tournante à balourd à son extrémité libre, (b) diagramme du corps libre de la machine à instant arbitraire pour décrire les conditions aux limites.

$$\beta = \frac{m}{\rho AL} = \frac{150 \text{ [kg]}}{280 \text{ [kg]}} = 0.536,$$

Et :

$$\alpha = \frac{m_0 e \omega^2 L^2}{EI} = \frac{(0.965 \text{ [kg.m]}) \left(209.4 \left[\frac{rd}{s}\right]\right)^2 (3 \text{ [m]})^2}{(210 \times 10^9 \left[\frac{N}{m^2}\right]) (1.2 \times 10^{-4} \text{ [m}^4\text{]})} = 0.010,$$

D'après les conditions aux limites, et l'équation caractéristique homogène de la poutre avec une masse concentrée à son extrémité est :

$$\lambda^{\frac{1}{4}}(1 + \cos \lambda^{\frac{1}{4}} \cosh \lambda^{\frac{1}{4}}) + \beta(\cos \lambda^{\frac{1}{4}} \sin \lambda^{\frac{1}{4}} - \cosh \lambda^{\frac{1}{4}} \sinh \lambda^{\frac{1}{4}}) = 0$$

Et le mode propre correspondant est :

$$X_k(x) = C_k \left[\cos \lambda^{\frac{1}{4}} x - \cosh \lambda^{\frac{1}{4}} x + \frac{\cos \lambda^{\frac{1}{4}} + \cosh \lambda^{\frac{1}{4}}}{\sin \lambda^{\frac{1}{4}} + \sinh \lambda^{\frac{1}{4}}} (\sinh \lambda^{\frac{1}{4}} x - \sin \lambda^{\frac{1}{4}} x) \right]$$

Où C_k est choisi pour normaliser le mode propre par rapport au produit scalaire défini par :

$$(X_j(x), X_k(x)) = \int_0^1 X_j(x), X_k(x) dx + \beta X_j(1), X_k(1).$$

Ce qui permet d'avoir la réponse stationnaire :

$$w(x, t) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha X_k(1)}{\lambda_k - \bar{\omega}^2} X_k(x) \right] \sin \bar{\omega} t,$$

L'amplitude en régime permanent non dimensionnelle de l'extrémité libre de la poutre est :

$$\frac{\alpha X_k(1)}{\lambda_k - \bar{\omega}^2} = 1.67 \times 10^{-4}$$

L'amplitude dimensionnelle peut être obtenue en utilisant la relation :

$$x = x^* L = (1.67 \times 10^{-4}) \times (3[m]) = 4.0 [mm].$$

VI.7. Récapitulatif :

La solution des problèmes de vibrations libres :

$$w(x, t) = X(x)T(t)$$

La séparation des équations :

$$\begin{cases} \frac{d^2 T}{dt^2} + \lambda T = 0 \\ L_x X + \lambda X = 0 \end{cases};$$

Les modes propres normalisés :

$$(X_i, X_j)_T = 1$$

Théorème d'expansion :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, X_k)_T X_k(x)$$

La solution générale des vibrations libres :

$$w(x) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)T_k(t)$$

La solution des problèmes des vibrations forcées avec La fonction force $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t)X_k(x)$$

$$C_k(t) = (f(x, t), X_k(x))$$

Les solutions des équations séparées dans le cas des vibrations libres d'une poutre uniforme sont :

$$T(t) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sin \sqrt{\lambda} x,$$

$$X(x) = C_1 \cos \lambda^{1/4} x + C_2 \sin \lambda^{1/4} x + C_3 \cosh \lambda^{1/4} x + C_4 \sinh \lambda^{1/4} x.$$

Rapport de Rayleigh :

$$R(w) = \frac{(w, w)_V}{(w, w)_T}$$

Méthode de Rayleigh-Ritz :

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$$

Les équations à résoudre pour les coefficients de Rayleigh-Ritz : $R(w) \frac{\partial (w, w)_T}{\partial c_k} = \frac{\partial (w, w)_V}{\partial c_k}$.

Chapitre VIII :

Contrôle des vibrations des structures dynamiques

VII.1. Les techniques de réduction des vibrations des structures dynamiques :

Trois types de technique de réduction des vibrations des structures dynamiques peuvent être utilisés pour limiter les vibrations structurales qui peuvent causer des problèmes (fatigue, le bruit dû au rayonnement sonore, etc...), qui sont :

- Par production d'une source de bruit secondaire émettant le négatif du bruit primaire pour avoir une annulation (suppression) des deux sources, c'est la première technique,
- Eviter la transmission des vibrations par utilisation des absorbeurs, c'est la seconde technique dite d'isolation,
- Diminuer l'amplitude des vibrations structurales dont les fréquences sont proches des fréquences propres de la structure, c'est la technique d'atténuation.

Qui peuvent être classés en trois groupes principaux :

- Les techniques passives : qui utilisent l'ajout de matériaux possédant des propriétés amortissantes, couplés à la structure pour amortir les vibrations de la structure passivement.
- Les techniques actives : qui permettent de contrôler à chaque instant par des actionneurs qui agissent sur la structure selon une loi de commande conçue pour minimiser une mesure quelconque de l'intensité des vibrations indésirables, c'est le principe du contrôle actif des vibrations.
- Les techniques hybrides « passives-actives » : utilisant les matériaux viscoélastique (passif) [On peut distinguer deux grandes classes de matériaux viscoélastiques : les polymères (élastomères, plastiques...) et les céramiques (verre, vernis...)] et piézoélectrique (actif) [les matériaux piézoélectriques les plus importants technologiquement sont les céramiques ferroélectriques de structure pérovskite à base de plomb comme les zirco-nitane de plomb (PZT)]. Le premier assure la fiabilité et la robustesse et le second améliore les performances du système pour les très basses fréquences. Ils agissent en complémentarité.

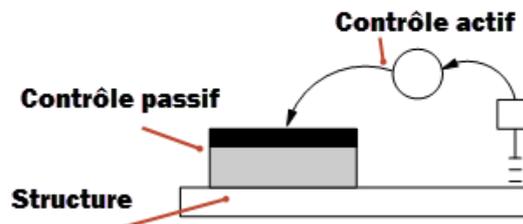


Figure .VII.1. Exemple d'une configuration de contrôle hybride passif-actif.

La conception d'un système de contrôle est très dépendante du choix et de l'emplacement relatif des actionnaires et des capteurs, son efficacité (temps de réponse) est liée au modèle « algorithme » mathématique utilisé.

Parmi ces algorithmes optimaux, du type « LQR » (Linear Quadratic Regulator), appliqué aux revêtements hybrides, ou de type « LQG » (Linear Quadratic Gaussien) [Trindade, 2000].

Exemple de la technique d'isolation (Contrôle passif):

Un climatiseur pèse 110 [Kg] et est entraîné par un moteur à 500 [tr / min]. Quelle est la flèche statique requise d'un isolateur non amorti pour obtenir une isolation de 80%?

La solution :

80% d'isolation demande un rapport de transmissibilité de 0,2,

Pour une structure sans amortissement, le rapport vaut :

$$0,2 = \sqrt{\frac{1}{(1-r^2)^2}};$$

Puisque r doit satisfaire la condition $r > \sqrt{2}$ pour obtenir l'isolation, et doit être requis, la forme appropriée de l'équation précédente après que la racine carrée est prise est :

$$0,2 = \frac{1}{r^2-1};$$

Qui nous donne $r=2,45$.

La fréquence maximale du climatiseur-isolateur avec 80% d'isolation est calculée comme suit :

$$\omega_0 = \frac{\bar{\omega}}{r} = \frac{(500.2\pi)}{(60.2,45)} = 21,4 \text{ [rd/s]}.$$

La flèche statique déduite est :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{\Delta_{st}}} \text{ [rd/s]},$$

Alors, la flèche est : $\Delta_{st} = \frac{g}{\omega_0^2} = \frac{9,81}{(21,4)^2} = 2,1 \cdot 10^{-2} \text{ [m] [kelly, 2000]}.$

Chapitre VIII I:

Les vibrations des structures dynamiques
par la Méthode des Eléments Finis

VIII.1. Introduction

Les modèles mathématiques des sciences et des techniques se présentent très souvent sous forme de systèmes d'équations différentielles qui lient des fonctions inconnues à leurs dérivées partielles. Des conditions initiales et des conditions aux limites sont en général requises pour compléter le modèle.

La solution peut être parfois obtenue analytiquement. Toutefois, dans la plupart des cas, cela n'est possible que de calculer une fonction approchée au moyen des méthodes numériques. L'idée de base consiste à rechercher les valeurs inconnues d'une fonction en un grand nombre de points : il s'agit de discrétisation. Au lieu de résoudre un problème différentiel ou continu, on résout un grand système d'équations algébriques qu'on appelle le problème discret.

Ces les méthodes numériques telle les éléments finis qui permettent d'avoir un problème discret et sont à la base de nombreux logiciels utilisés pour la simulation des réponses fréquentielles des structures dynamiques.

La méthode des éléments finis peut être envisagée comme procédure particulière d'application de la méthode de Rayleigh-Ritz. Elle consiste à subdiviser le corps déformable ou la structure en un certain nombre d'éléments finis de géométrie simple (segment de droite unidirectionnel, triangle ou quadrangle bidimensionnel tétraèdre ou hexaèdre tridimensionnel) et de fonction structurale bien identifiée (barre, poutre, membrane, plaque, coque,...).

Les fonctions de déplacement sont choisies pour satisfaire les conditions aux limites géométriques (c'est-à-dire, les déplacements et les pentes) et de sorte que la continuité nécessaire soit atteinte entre les éléments. Il suffit d'exiger la continuité du déplacement pour les barres, tandis que les déplacements et les pentes doivent être continus à travers les limites des éléments pour les poutres.

Les effets de l'inertie d'une structure deviennent non négligeables si elle est soumise à une excitation de fréquence supérieure à un tiers de sa première fréquence naturelle. Dans ce cas l'analyse statique n'est plus suffisante. Il devient nécessaire de déterminer les fréquences naturelles et les modes de vibration d'une structure afin de déterminer le type d'analyse : quasi-statique, ou dynamique, c'est-à-dire temporelle. La recherche des fréquences et des modes naturels d'une structure s'appelle l'analyse modale.

VIII.2. les concepts des éléments finis :

Nous présentons le concept des modes de vibration par l'intermédiaire du modèle dynamique élémentaire, en utilisant les concepts des éléments finis.

2.1. L'élément ressort :

Un ressort élastique est un dispositif mécanique capable de soutenir l'effort axial. L'élongation ou la contraction du ressort est directement proportionnelle à la charge axiale appliquée. La rigidité du ressort notée k .

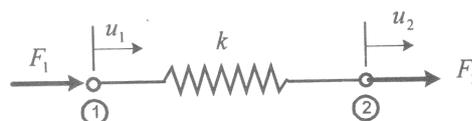


Figure VIII.1. Caractéristique d'un élément ressort.

Chapitre VIII :

A l'attention de la Figure VIII.1 ; les extrémités du ressort sont les nœuds (l'extrémité du nœud 1 est supposée fixe « encastrée » alors que l'autre extrémité libre peut déplacer, on aura 1 seul degré de liberté le nœud 2 = 1 degré de liberté = l'ordre du système d'équation différentielle de mouvement = une seule pulsation et un seul mode propres) et les déplacements nodaux notés u_1 et u_2 et sont montrés en sens positif. Si ces déplacements nodaux sont connus, toute élongation ou contraction du ressort sera connue de même que la force dans le ressort.

Puisque, en équilibre (statique) :

$$F_1 + F_2 = 0 ; \text{ ou } : F_1 = -F_2 \dots \dots \dots \text{(VIII.1)}$$

$$\text{Donc } : F_1 = -k(u_2 - u_1) \text{ alors } : F_2 = -k(u_2 - u_1) \dots \dots \dots \text{(VIII.2)}$$

On peut les exprimer sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \dots \dots \dots \text{(VIII.3)}$$

$$\text{Ou sous forme réduite } : \{F\} = [K]\{u\} \dots \dots \dots \text{(VIII.4)}$$

Il apparait que la matrice de raideur de l'élément ressort est :

$$[K] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(VIII.5)}$$

Exemple :

a) Les vibrations libres non amorties :

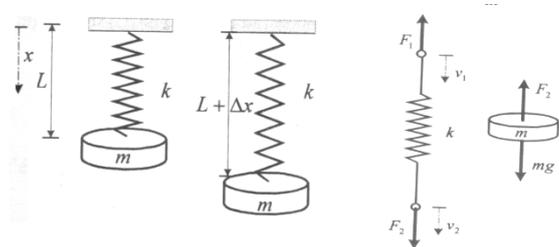


Figure VIII.2. Système masse-ressort.

Si la masse m est attirée de sa position d'équilibre, d'après la 2^{ème} loi de Newton, on obtient :

$$\sum F_{/x} = m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta x) ;$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0 ;$$

$$\Rightarrow \text{La pulsation propre sera } : \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ [rd/s] ;}$$

La réponse de la masse prend la forme : $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \varphi) ;$

Les constantes C et φ sont à déterminer à partir des conditions initiales.

Les efforts aux nœuds avec les déplacements nodaux peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{Bmatrix}$$

Avec la force de réaction $F_1 = R = k(x_1 - x_2)$ et l'effort : $F_2 = mg$

$$\text{Puisque } : \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix} = -\omega^2 \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Le système précédent peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Ou bien :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix}$$

Ceci peut permettre de déterminer les pulsations propres.

b) Les vibrations forcées non amorties :

Le système simple masse-ressort lié à un mécanisme externe qui provoque la réponse dynamique qui est la charge $F(t)$ variable dans le temps.

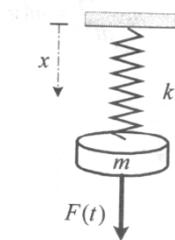


Figure VIII.3. Système sollicité à une charge externe.

Les équations du système peuvent être déduites comme suit :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ mg + F(t) \end{Bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \end{Bmatrix};$$

L'équation de la force de réaction au nœud 1 est inchangée, l'équation du mouvement se réduit à l'équation pour le mouvement au nœud 2 est :

$$mg + F(t) = m\ddot{v}_2 + kv_2$$

La solution particulière doit satisfaire à : $\ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = \frac{F(t)}{m}$;

L'importance particulière dans l'analyse dynamique structurale est le cas quand les forces externes produisent une variation sinusoïdale dans le temps.

Par conséquent, nous considérons le cas dans le quel : $F(t) = F_0 \sin(\bar{\omega}t)$; ou F_0 est l'amplitude ou la valeur maximum de la force, et $\bar{\omega}$ est la pulsation forcée, l'équation devient :

$$\ddot{v}_2 + \omega^2 v_2 = \frac{F_0}{m} \cdot \sin(\bar{\omega}t) ;$$

Nous assumons une solution particulière de la forme : $v_2(t) = C \sin(\bar{\omega}t)$

Ou C est une constante à déterminer. Par dérivation et substitution à l'équation on obtient :

$$C = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \bar{\omega}^2)} ;$$

La réponse particulière prend la forme suivante :

$$v_2(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \bar{\omega}^2)} \sin(\bar{\omega}t)$$

Qui représente la réponse forcée, dans tous les cas on peut écrire :

$$[K]\{x\} + [m]\{\ddot{x}\} = \{F(t)\} ;$$

Ou : $[k]$ est la matrice de rigidité, $[m]$ la matrice masse, $\{x\}$ le vecteur nodal des déplacements et des rotations, $\{\ddot{x}\}$ le vecteur des accélérations, et $\{F(t)\}$ le vecteur des fonctions des forces externes appliquées à la structure.

2.2. Assemblage des éléments ressorts dans le système des coordonnées globales :

Les équations nodales d'équilibre peuvent être obtenues plus efficacement en considérant l'effet de chaque élément séparément et en ajoutant la contribution de force d'élément à chaque équation nodale. Le processus est décrit comme un assemblage.

Pour illustrer tout ça prenons un exemple simple :

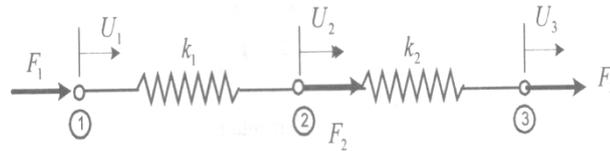


Figure VIII.4. Système à deux ressorts.

Assumant le système des deux éléments de ressorts pour être en équilibre, pour le premier élément ressort, nous aurons :

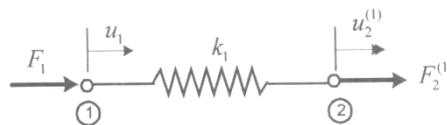


Figure VIII.5. Représentation des forces et des déplacements dans le premier élément ressort.

Le système d'équation :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2^{(1)} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VIII.6})$$

Et pour le deuxième élément ressort :



Figure VIII.6. Représentation des forces et des déplacements dans le deuxième élément ressort.

Qui nous donne le système :

$$\begin{Bmatrix} F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^{(2)} \\ u_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VIII.7})$$

Pour assembler les équations d'équilibre décrivant le comportement du système de deux ressorts les conditions de compatibilité de déplacement, qui relie des déplacements des éléments aux déplacements du système, sont écrites : $u_1 = U_1$; $u_2^{(1)} = U_2$; $u_2^{(2)} = U_2$; et $u_3 = U_3$(VIII.8)

La continuité de déplacement de l'élément (1) vers l'élément (2) est imposée aux raccords nodaux.

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = F_2^{(1)} + F_2^{(2)} \\ F_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VIII.9})$$

Sous forme matricielle réduite : $\{F\} = [K]\{U\}$, par comparaison directe de condition d'équilibre, nous obtenons la matrice de rigidité du système :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots \text{(VIII.10)}$$

Exemple :

a) Les vibrations libres non amorties :

Soit un système de deux éléments ressorts ayant suspendu deux masses attachées aux nœuds 2 et 3. Le système est soumis à la pesanteur et le premier ressort est fixé à un appui encastré au nœud 1.

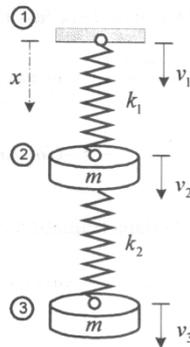


Figure VIII.7. Système masse-ressort à 2 ddl.

Nous déterminons aisément la matrice de rigidité des ressorts

$$[k]_{1-2} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } [k]_{2-3} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ;$$

Les masses étant concentrées aux nœuds 2 et 3, nous définissons les matrices de la masse des éléments ressorts :

$$[m]_{1-2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \text{ et } [m]_{2-3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} ;$$

La matrice de rigidité globale :

$$[K] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} ;$$

La matrice masse du système sera :

$$[m] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} ;$$

Les équations du mouvement peuvent être exprimées par :

$$[K] \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + [m] \begin{Bmatrix} \ddot{v}_1 \\ \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 = mg \\ F_3 = mg \end{Bmatrix}$$

Où F_1 est la réaction dynamique du nœud 1.

Chapitre VIII :

Sachant qu'à l'extrémité encastree, les déplacements sont nuls ($v_1=0$) et puisque les forces de gravité représentent l'état d'équilibre statique, celles-ci sont négligées (tendent vers zéros par le faite des élongations initiales des ressorts pour l'état équilibre statique), il en résulte que les équations du mouvement se réduisent à :

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_2 \\ \ddot{v}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

Le système des équations de second ordre, linéaires, ordinaires, homogènes représente la réponse vibratoire du système libre de deux degrés de liberté, qui peut être sous la forme du mouvement harmonique :

$$\begin{cases} v_2(t) = C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ v_3(t) = C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{cases}; \text{ sachant que : } \begin{cases} \ddot{v}_1(t) = -\omega^2 v_1(t) \\ \ddot{v}_2(t) = -\omega^2 v_2(t) \end{cases}$$

Où C_2 et C_3 sont les amplitudes de vibration des nœuds 2 et 3 (les masses sont attachées aux nœuds 2 et 3).

ω est la pulsation propre du mouvement et φ est l'angle de phase.

Nous déduisons :

$$\sin(\omega t + \varphi) \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le système de deux équations algébriques homogènes, qui n'aura de solution que seulement si :

$$\begin{vmatrix} (k_1 + k_2) - m\omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

Pour simplifier les calculs prenons le cas où : $k_1 = k_2 = k$, le système devient :

$$\begin{vmatrix} 2k - m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{dont la seule inconnue est } \omega \text{ qui peut être déterminer par la résolution de}$$

l'équation caractéristique suivante : $m^2\omega^4 - 3km\omega^2 - k^2 = 0$,

Ceci nous donne par la suite les valeurs suivantes pour ω :

$$\omega_1^2 = \frac{3km - \sqrt{5}km}{2m^2} = 0,382 \left(\frac{k}{m}\right);$$

$$\omega_2^2 = \frac{3km + \sqrt{5}km}{2m^2} = 2,62 \left(\frac{k}{m}\right).$$

L'existence de quatre racines, dont deux négatives qui sont à rejeter car y'a pas une signification physique, reste à déterminer les modes C_2 et C_3 :

Pour substitution de la première valeur : $\omega_1^2 = 0,382 \left(\frac{k}{m}\right)$ dans le système suivant :

$$\begin{bmatrix} 2k - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)k & -k \\ -k & k - \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Chapitre VIII :

Système avec deux équations et deux inconnus, à noter qu'on peut utiliser plusieurs méthodes pour la résolution et on arrive à :

$$C_3 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} C_2 = 1,62 C_2$$

Qui veut dire, que si le système dynamique vibre avec la première pulsation $\omega_1^2 = 0,382 \left(\frac{k}{m}\right)$, l'amplitude des vibrations de la masse suspendue au nœud 3 est de 1,62 fois de celle de la masse suspendue au nœud 2.

Les réponses des deux masses sont alors :

$$\begin{cases} v_2(t) = C_2^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \\ v_3(t) = 1,62 C_2^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases} ;$$

Da la même manière, par substitution de la deuxième pulsation : $\omega_2^2 = \frac{3km + \sqrt{5}km}{2m^2} = 2,62 \left(\frac{k}{m}\right)$ dans le système :

$$\begin{bmatrix} 2k - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)k & -k \\ -k & k - \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Qui permet d'avoir :

$$C_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} C_2 = -0,62 C_2$$

Dans ce cas, les deux masses se déplacent (vibrent) dans des directions opposées.

Les réponses des deux masses dans ce cas seront :

$$\begin{cases} v_2(t) = C_2^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ v_3(t) = -0,62 C_2^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} ;$$

Par conséquent, les réponses générales des deux masses du système dynamique de deux degrés de liberté et en utilisant le principe de superposition des solutions des équations différentielles sont donnée par :

$$\begin{cases} v_2(t) = C_2^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ v_3(t) = 1,62 C_2^1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) - 0,62 C_2^2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases} ;$$

Les quatre constantes C_2^1 , C_2^2 , φ_1 et φ_2 sont à déterminer à partir des conditions initiales.

2.3. L'élément ressort spiral :

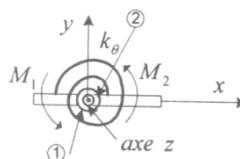


Figure VIII.8. Caractéristique de l'élément ressort spirale.

Les relations de comportement de ce ressort spiral sont :

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_\theta & -k_\theta \\ -k_\theta & k_\theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow [K] = k_\theta \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \dots\dots\dots(VIII.11)$$

2. 4. L'élément barre élastique :

Est particulièrement très utile en analyse des structures dynamiques bidimensionnels et tridimensionnels. On s'intéresse à un problème de résistance des matériaux où n'intervient que la traction-compression, on dit alors qu'on a un problème de barre élastique.

Fondé sur les hypothèses suivantes : la barre doit être droite en géométrie, obéissante à la loi de Hooke, les forces sont appliquées aux extrémités et qu'elle soutient uniquement l'effort axial (la déformation est unidirectionnelle).

Soit une barre élastique de longueur L à laquelle appartient un système de coordonnées globale ox avec son origine placé à l'extrémité gauche.

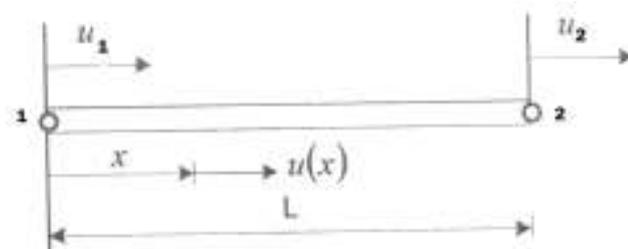


Figure VIII.9. Géométrie de l'élément barre.

La fonction $u(x)$ de déplacement axial qui est variable à n'importe quelle position (x) sur la longueur de la barre.

Les nœuds 1 et 2 se trouvent aux extrémités de la barre élastique avec des déplacements u_1 et u_2 préalablement connus.

On cherche la fonction $u(x)$ qui définit le déplacement de chaque point se trouvant à une distance x de la barre élastique, pour cela ; les mathématiciens nous propose une fonction approximative en termes des deux déplacements u_1 et u_2 , par :

$$u(x) = N_1(x) \cdot u_1 + N_2(x) \cdot u_2 \dots\dots\dots(VIII.12)$$

Ou les fonctions $N_1(x)$ et $N_2(x)$ sont des fonctions d'interpolation également connues sous le nom des fonctions de forme.

Les fonctions de forme sont des fonctions qui relient les déplacements d'un point quelconque intérieure à un élément aux déplacements nodaux sont les degrés de liberté. Il existe pour un élément autant de fonctions de forme que de degrés de liberté, le choix est limiter à celles qui répondent aux conditions aux limites.

Les fonctions de forme doivent être choisies de telle sorte que nous obtenions les bons déplacements nodaux. L'approche la plus simple pour décrire le comportement d'un élément consiste à représenter son champ de déplacement interne par des développements polynomiaux (Triangle de Pascal).

Dans le cas unidirectionnel, pour l'élément barre, dit de premier ordre (degré). L'approximation des fonctions de forme du premier ordre sur l'élément est linéaire et s'écrit :

$$N(x) = ax + b ; \dots\dots\dots(VIII.13)$$

Les fonctions de déplacements à choisir doivent satisfaire les conditions suivantes :

Lorsque : $x=0 \rightarrow u(0)=u_1, \dots\dots\dots(VIII.14)$

Quand : $x=L \rightarrow u(L)=u_2, \dots\dots\dots(VIII.15)$

Par analogie les fonctions de forme doivent satisfaire les conditions dites de frontières suivants :

$$N_1(0) = 1 \quad N_2(0) = 0 \quad \text{et} \quad N_1(L) = 0 \quad N_2(L) = 1, \dots\dots\dots(VIII.16)$$

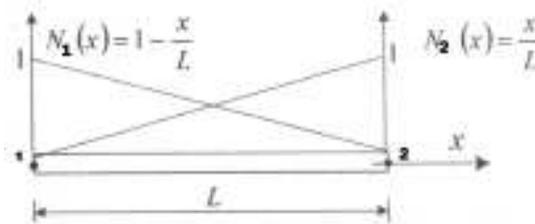


Figure VIII.10. Fonctions de forme.

Pour la détermination des constantes (a_1, a_2, b_1, b_2) des polynômes de forme, prenons :

$$N_1(x) = a_1x + b_1 ; N_2(x) = a_2x + b_2 ; \dots\dots\dots(VIII.17)$$

Par application des conditions de frontières précédentes, on aboutit à :

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad \text{et} \quad N_2(x) = \frac{x}{L} ; \dots\dots\dots(VIII.18)$$

Tandis que la fonction continue de déplacement est représentée par la discrétisation suivante :

$$u(x) = N_1(x).u_1 + N_2(x).u_2 = \left(1 - \frac{x}{L}\right).u_1 + \left(\frac{x}{L}\right).u_2 ; \dots\dots\dots(VIII.19)$$

Sous la forme matricielle, on peut écrire :

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [N]\{u\} ; \dots\dots\dots(VIII.20)$$

Ou $[N]$ est la matrice ligne des fonctions d'interpolation et $\{u\}$ est le vecteur des déplacements nodaux.

Une fois les déplacements connus en tout point intérieur de l'élément, on peut calculer les déformations en chaque point : $\varepsilon = S.u \dots\dots\dots(VIII.21)$

Ou S est un opérateur de dérivation linéaire, la déformation ε peut être approchée par : $\varepsilon = [B]\{\delta\}$, tel que :

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \text{ le vecteur des déplacements nodaux et } [B] = S[N] = \begin{bmatrix} \frac{\delta N_1}{\delta x} & \frac{\delta N_2}{\delta x} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(VIII.22)$$

Pour obtenir les équations d'équilibre reliant les déplacements aux forces appliquées, nous procédons à partir du déplacement vers la déformation, de la déformation à la contrainte et finalement de la contrainte à la force appliquée.

$$\text{Dans le chargement uni axial, on a : } \varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \left(\frac{x}{L}\right)u_2 \right], \dots\dots\dots(VIII.23)$$

Chapitre VIII :

ce qui donne : $\varepsilon = \frac{u_2 - u_1}{L}$,(VIII.24)

Si on désigne par E le module d'élasticité longitudinal du matériau avec lequel est faite la barre, la loi de Hooke nous donne la contrainte axiale : $\sigma_x = E \cdot \varepsilon_x = E \cdot \left(\frac{u_2 - u_1}{L}\right)$;(VIII.25)

La force axiale associée est : $F = \sigma_x A = \frac{E \cdot A}{L} (u_2 - u_1)$ (VIII.26)

où : A : est la section de l'élément barre.

Ceci permet de relier les forces nodales appliquées F₁ et F₂ aux déplacements nodaux u₁ et u₂.

L'élément est sollicité à la tension de la force nodale F₂ qui doit être dans la direction positive des abscisses tandis que la force nodale F₁ qui doit être égale et opposée pour l'équilibre de la barre donc :

$$\begin{cases} F_1 = -\frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \\ F_2 = \frac{EA}{L}(u_2 - u_1) \end{cases} ; \dots\dots\dots(VIII.27)$$

Sous forme matricielle, on aura :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \text{ Puisque : } \{F\} = [k]\{\delta\} \dots\dots\dots(VIII.28)$$

Par déduction on aura la matrice de rigidité pour l'élément barre :

$$[k] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} ; \dots\dots\dots(VIII.29)$$

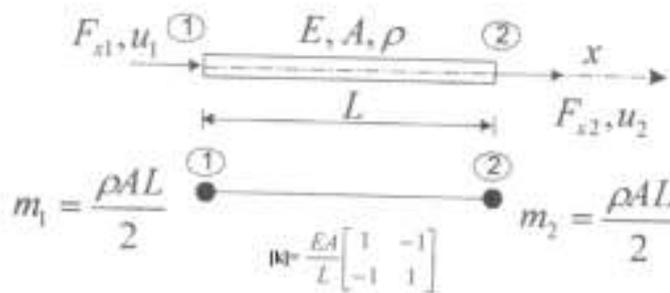


Figure VIII.11. Discrétisation de l'élément barre.

Procédé formel :

La méthode directe peut produire une matrice de rigidité seulement pour les éléments simples, où les formules des mécanismes des matériaux fournissent des relations entre les déplacements nodaux et les charges nodales associées. Pour la plupart des éléments une formule générale de la matrice de rigidité [k] et de la matrice masse [m] doivent être employés, la formule générale est :

$$[k] = \int [B]^T \cdot E \cdot [B] dV ; \dots\dots\dots(VIII.30)$$

Où [B] est la matrice du gradient du déplacement, E est la matrice des propriétés du matériau, et le dV set un incrément du volume V (dV=Adx).....(VIII.31)

Pour obtenir la matrice [B] pour l'élément barre que nous commençons en écrivant une expression pour le déplacement axial u(x) d'un point arbitraire sur la barre, dans l'équation d'interpolation linéaire du déplacement, par :

$$u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) \cdot u_2 \dots \dots \dots \text{(VIII.32)}$$

La déformation axiale ϵ_x et le gradient du déplacement axial seront :

$$\epsilon_x = \frac{du}{dx} = \left[\frac{dN}{dx}\right] \{\delta\}; \text{ ou : } [B] = \left[\frac{-1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]; \dots \dots \dots \text{(VIII.33)}$$

La matrice de rigidité calculée par intégration, sera :

$$[k] = \int_0^L \begin{bmatrix} -1 \\ L \\ 1 \\ L \end{bmatrix} E \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ L & L \end{bmatrix} A dx = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \dots \dots \dots \text{(VIII.34)}$$

Dans le cas d'une barre ou la masse de la barre est pris en considération-élément continu-, alors :

La matrice masse se calcul par :

$$[m] = \int_0^L \rho A \begin{bmatrix} N_1^2 & N_1 N_2 \\ N_1 N_2 & N_2^2 \end{bmatrix} dx; \dots \dots \dots \text{(VIII.35)}$$

Exemple :

a) Les vibration libre non amorties d'une barre élastique :

Soient le module d'élasticité E et ρ la masse volumique du matériau d'une barre circulaire pleine est encastree dans une extrémite et libre dans l'autre. En utilisant deux éléments barre de longueur identique, déterminer les pulsations propres ?

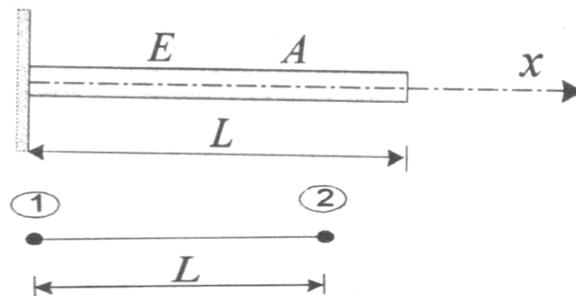


Figure VIII.12. Barre circulaire pleine.

• **Un seul élément**

La discrétisation de la barre à un seul élément (2 nœuds) :

Nous avons : $[k]\{u\} + [m]\{\ddot{u}\} = \{F\}$

$$\leftrightarrow \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix};$$

Au niveau de l'encastrement, le déplacement est nul $u_1=0$, ainsi nous assumons les réponses sinusoïdales suivantes : $u_2 = C_2 \sin(\omega t + \varphi)$ et $\ddot{u}_2 = -C_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi)$

La force $F_{x2} = 0$

Alors, on aura :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ C_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ -C_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} = 0 \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{matrix} F_{x1} = ? \text{ (réaction)} \\ F_{x2} = 0 \end{matrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow C_2 \left[\frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{2} \omega^2 \right] \sin(\omega t + \varphi) = 0 ;$$

$$\Leftrightarrow \text{Danc on peut détermine la pulsation propre : } \omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{2E}{\rho}} = \frac{1.414}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [rd/s] ;}$$

$$\text{La solution exacte par intégration nous donne la pulsation propre : } \omega = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1.571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [rd/s] ;}$$

La solution calculée par la méthode des éléments finis est inférieure de 10% par rapport à la solution exacte.

- Si on introduit dans la procédure du calcul la matrice masse avec distribution de la masse sur les deux nœuds, on obtient :

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ C_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ -C_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} = 0 \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{matrix} F_{x1} = ? \text{ (réaction)} \\ F_{x2} = 0 \end{matrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow C_2 \left[\frac{EA}{L} - \frac{\rho AL}{3} \omega^2 \right] \sin(\omega t + \varphi) = 0 ;$$

$$\Leftrightarrow \text{Ce qui donne la pulsation propre : } \omega = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{3E}{\rho}} = \frac{1.732}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [rd/s] ;}$$

La deuxième méthode des éléments finis nous donne une erreur de 10,25% supérieure à la solution exacte.

• Deux éléments

La discrétisation de la barre en deux éléments (3 nœuds) ;

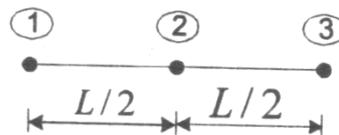


Figure VIII.13. Barre avec deux éléments.

Le système d'équation différentielle du mouvement est : $[K]\{u\} + [m]\{\ddot{u}\} = \{F\}$

La superposition des éléments :

$$\Leftrightarrow \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \end{Bmatrix} ;$$

Les conditions aux limites ;

- au niveau de l'encastrement, le déplacement est nul $u_1=0$,
- au niveau des forces : $F_{x2}=F_{x3}=0$ (pas de forces externes appliquées aux nœuds 2 et 3)

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{4} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_1 \\ -C_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ -C_3 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \end{Bmatrix} \quad \left(\begin{matrix} F_{x1} = ? \text{ (réaction)} \\ F_{x2} \\ F_{x3} \end{matrix} \right)$$

Qui peut ce réduire à :

$$\left(\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{4} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

La solution du système par :

$$\left| \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho Al}{4} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0$$

Pour simplifier les calculs posons : $\xi = \frac{\rho Al \omega^2 / 4}{2EA/L} = \frac{\rho L^2}{8E} \omega^2$;

$$\text{Le système devient : } \left| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \xi \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-2\xi & -1 \\ -1 & 1-\xi \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\xi^2 - 4\xi + 1 = 0 ;$$

On obtient deux solutions : $\xi_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{2} = 0,293$ et $\xi_2 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} = 1,707$

Les pulsations propres s'obtiennent :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\rho L^2}{8E} \omega_1^2 \\ \xi_2 = \frac{\rho L^2}{8E} \omega_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{2\sqrt{2}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho} \xi_1} = \frac{1,531}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \omega_2 = \frac{2\sqrt{2}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho} \xi_2} = \frac{3,695}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \text{ [rd/s] :}$$

Les pulsations exactes obtenues par intégration, sont :

$$\omega_{e1} = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{1,571}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [rd/s]} \quad \text{et} \quad \omega_{e2} = \frac{3\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \frac{4,712}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \text{ [rd/s]}$$

Remarque :

Les pulsations calculées par la méthode des éléments finis sont inférieures de 2,54% pour la première pulsation et 21,6% pour la deuxième pulsation.

- Par utilisation de la méthode de la distribution de la masse, il en découle :

$$\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} C_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ C_2 \sin(\omega t + \varphi) \\ C_3 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} + \frac{\rho AL}{12} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -C_2 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \\ -C_3 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x1}=? \\ F_{x2} \\ F_{x3} \end{Bmatrix}$$

Qui se limitera à :

$$\left(\frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{12} \omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{Bmatrix} \sin(\omega t + \varphi) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left| \frac{2EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{12} \omega^2 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

On posant :

$$\xi = \frac{\rho AL \omega^2 / 12}{2EA/L} = \frac{\rho L^2}{24E} \omega^2 ;$$

$$\text{Le système devient : } \left| \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \xi \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 2-4\xi & -1-\xi \\ -1-\xi & 1-2\xi \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7\xi^2 - 10\xi + 1 = 0 ;$$

On aura deux solutions : $\xi_1 = \frac{5-3\sqrt{2}}{7} = 0,108$ et $\xi_2 = \frac{5+3\sqrt{2}}{7} = 1,32$

Les pulsations propres seront :

$$\begin{cases} \xi_1 = \frac{\rho L^2}{24E} \omega_1^2 \\ \xi_2 = \frac{\rho L^2}{24E} \omega_2^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \frac{2\sqrt{6}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \xi_1 = \frac{1,61}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \\ \omega_2 = \frac{2\sqrt{6}}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \xi_2 = \frac{5,628}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \end{cases} \text{ [rd/s]} :$$

Les pulsations propres obtenues par la méthode des éléments finis sont supérieures de 2,482 % et 17,317% .

Constatation :

La première méthode où il n’y pas distribution de masse, la solution des pulsations propres converge à partir des valeurs plus basses vers la solution exacte de valeur supérieure.

Dans la deuxième méthode où la distribution de la masse est prise en considération la solution converge à partir des valeurs plus élevées vers la solution exacte de valeur inférieure.

Le recours aux méthodes des éléments finis parce que y’a pas dans les problèmes rencontrés de vibration souvent une méthode analytique (mathématique) d’intégration a appliqué directement pour avoir les solutions des équations différentielles d’ordre supérieure, mais permet le transfert des équations différentielles en équations algébriques programmables.

2.5. Charges externes variables :

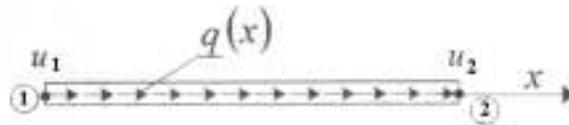


Figure VIII.14. Elément barre avec charge externe répartie.

Dans les cas précédents, les charges ont été considéré concentrées mais avec des charges variables, les forces équivalentes appliquées aux nœuds se calcul par :

$$F_{\acute{e}q1} = \int_0^L q(x) \cdot N_1(x) dx = \int_0^L q(x) \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) dx ; \dots \dots \dots \text{(VIII.36)}$$

$$F_{\acute{e}q2} = \int_0^L q(x) \cdot N_2(x) dx = \int_0^L q(x) \cdot \left(\frac{x}{L}\right) dx \dots \dots \dots \text{(VIII.37)}$$

2.6. Charges thermiques :

Si une structure est en matériau homogène et élastique isotrope est uniformément chargé à une température ou à un champ de température et le corps non restreint par les appuis externes, si la structure est initialement non chargée, elle reste non chargée, mais elle se déforme.

Plus souvent, le gradient de température est plus compliqué, et les contraintes thermiques surgissent avec ou sans appuis externes.

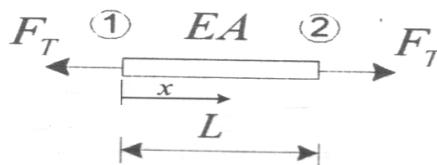


Figure VIII.15. Les charges thermiques appliquées aux nœuds.

$$\{F\} + \{F_T\} = [K]\{\delta\}; \dots\dots\dots(\text{VIII.38})$$

Où : $F_T = \alpha EA \cdot \Delta T \dots\dots\dots(\text{VIII.39})$

F_T est la force due à la dilatation de la barre une fois la température atteint une quantité ΔT .

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -F_T \\ F_T \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}; \dots\dots\dots(\text{VIII.40})$$

2.7. L'élément barré orienté :

Dans les structures treillis, qui sont des structures constituées de plusieurs barres éléments assemblés avec différents angles par rapport à un repère global comme montré par la figure suivante :

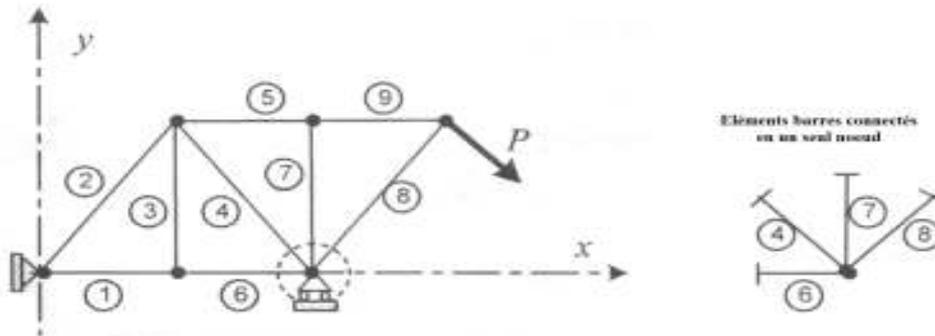


Figure VIII.16. Treillis en éléments barres connectés.

La liaison physique et la variation de l'orientation géométriques des éléments imposent les conditions suivantes :

- le déplacement nodal des éléments connectés en un seul nœud doit être identique au déplacement du nœud de rattachement dans le système global.
- Les caractéristiques physiques de chaque élément (la matrice de rigidité et le vecteur forces appliquées à l'élément) doivent être transformées, au repère global pour représenter les propriétés structurales dans le système global.
- Les paramètres individuels de l'élément (effort axial,...) sont déterminés après la solution du problème dans le système global.

La matrice de transformation :

Pour transformer les déplacements et les forces nodaux de l'élément barre du repère local vers le système des coordonnées global on a recourt à la matrice de transformation.

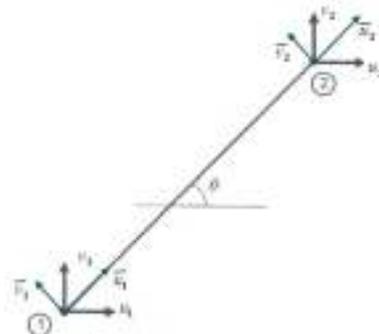


Figure VIII.17. Les déplacements aux nœuds du barre, (\bar{u}, \bar{v}) au systèmes de coordonnées local et (u, v) dans le système de coordonnées global.

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = u_1 \cos \theta + v_1 \sin \theta \\ \bar{v}_1 = -u_1 \sin \theta + v_1 \cos \theta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{u}_2 = u_2 \cos \theta + v_2 \sin \theta \\ \bar{v}_2 = -u_2 \sin \theta + v_2 \cos \theta \end{cases}; \dots\dots\dots(\text{VIII.41})$$

Sous forme matricielle et en posant : $\lambda = \cos \theta$, $\mu = \sin \theta$, on écrit :

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & -\mu & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VIII.42})$$

La matrice : $[T] = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(\text{VIII.43})$

La matrice dans ce cas est appelée matrice de transformation ou de passage entre les deux systèmes de coordonnées local et global.

Pour la transformation des déplacements on peut écrire sous forme réduite :

$$\{\bar{\delta}\} = [T]\{\delta\}; \dots\dots\dots(\text{VIII.44})$$

$\{\bar{\delta}\}$: Vecteur des déplacements dans le repère local,

$\{\delta\}$: Vecteur des déplacements dans le repère global,

La matrice de transformation possède une propriété importante qui est : son inverse est égal à sa transposée,

$$\rightarrow [T]^{-1} = [T]^t \dots\dots\dots(\text{VIII.45})$$

La transformation du vecteur des forces appliquées aux différents nœuds sera :

$$\{\bar{F}\} = [T]\{F\}; \dots\dots\dots(\text{VIII.46})$$

Et puisque : $\{\bar{F}\} = [\bar{k}]\{\bar{\delta}\}$

$$\{\bar{F}\} = [T]\{F\} = [\bar{k}]\{\bar{\delta}\} \dots\dots\dots(\text{VIII.47})$$

Multipliant les membres de l'équation par la matrice inverse de la matrice de transformation $[T]^{-1}$, on aura

$$[T]^{-1}[T]\{F\} = [T]^t[\bar{k}]\{\bar{\delta}\}; \text{ avec } [T]^{-1}[T] = [I] \dots\dots\dots(\text{VIII.48})$$

On aura finalement : $[k] = [T]^t[\bar{k}][T] \dots\dots\dots(\text{VIII.49})$

Dans le cas ou la distribution des masses est prise en considération, on applique :

$$[m] = [T]^t[\bar{m}][T] \dots\dots\dots(\text{VIII.50})$$

Les forces axiales de l'élément barre peuvent être obtenues par :

$$\{F\} = [K]\{\delta\};$$

L'effort normal correspondant à la force nodale à l'extrémité (2) sera :

$$N = [\lambda \quad \mu]\{F\}$$

Si on trouve que N est positif alors on constate l'existence d'une traction et une compression dans le cas négatif.

Allongement dû aux forces axiales : $\Delta l = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$

2.8. L'élément poutre en flexion :

Cet élément est la base de la formulation par éléments finis en utilisant la théorie élémentaire de flexion d'une poutre. La formulation de l'élément de flexion a pris en considération les déplacements et les rotations. Pour chaque élément poutre de longueur L possède deux nœuds et chaque nœud a deux degrés de liberté, un déplacement transversal v et une rotation θ autour de l'axe z . En plus, pour éviter l'ambiguïté potentielle des déplacements, l'inclusion des rotations nodales de l'élément de flexion assure la compatibilité des rotations aux liaisons nodales entre les éléments.



Figure VIII.18. Élément poutre en présence des déplacements et des rotations.

Le nombre de degrés de liberté de l'élément poutre égal au produit du nombre de nœuds par le nombre de degré de liberté correspondant à chaque nœud.

Les nœuds 1 et 2 de l'élément poutre sont situés aux extrémités, et les variables nodales sont les déplacements transversaux v_1 et v_2 ainsi les rotations θ_1 et θ_2 correspondants.

Le vecteur déplacement est discrétisé par :

Les conditions aux limites, qui sont connues :

Déplacement au nœud 1 $v_1(x=0)=v_1$ et la rotation $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \theta_1$.

Déplacement au nœud 2 $v_2(x=L)=v_2$ et la rotation $\left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=L} = \theta_2$.

D'après les conditions de frontière et la nature unidimensionnelle de l'élément en termes de variable indépendante, la fonction de déplacement satisfaisante prend la forme ci-après :

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

Sous la forme réduite le vecteur déplacement s'écrit :

$$v(x) = N_1(x)v_1 + N_2(x)\theta_1 + N_3(x)v_2 + N_4(x)\theta_2$$

Ou sous la forme matricielle :

$$v(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x) \quad N_4(x)] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} ;$$

Par application des conditions aux limites et substitution, on trouve :

$$N_1(x) = \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right); \quad N_2(x) = \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2}\right);$$

$$N_3(x) = \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right); \quad N_4(x) = \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right);$$

Par application de la formule : $[k] = \int [B]^T E [B] dV$, où avec E et I des constantes:

$$[k] = EI \int_0^L \frac{d^2 N_i}{dx^2} \frac{d^2 N_j}{dx^2} dx \text{ avec } i,j=1,4.$$

On aboutit à la matrice de rigidité de l'élément poutre, comme suit :

$$[k] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}; \text{ et puisque : } [m] = \rho A \int_0^L [N]^T [N] dx \text{ avec } \rho \text{ et } A \text{ des constantes :}$$

$$[m] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix},$$

Les conditions de frontière pour les poutres :

Les conditions de frontière pour les poutres impliquent des spécifications de déplacement v ou de ses trois premières dérivées en fonction de x.

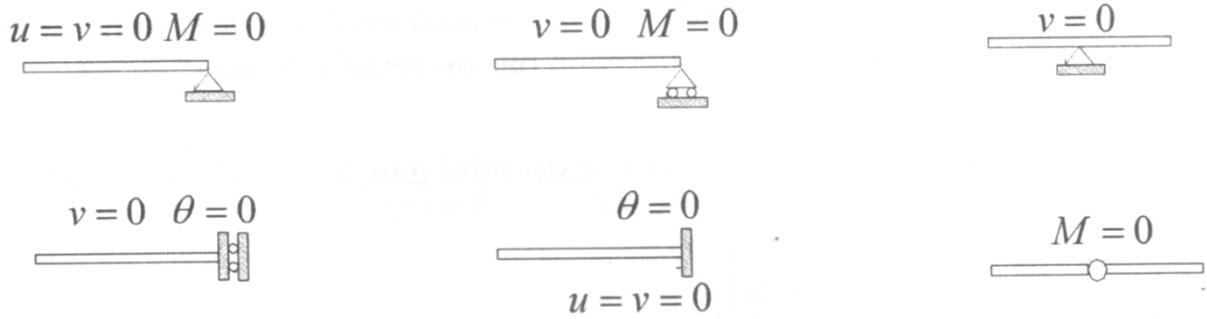


Figure VIII.19. Conditions de frontières typiques de poutre.

| Conditions | A gauche de x0 | A droite de x0 |
|--------------|--|--|
| Déplacement | $v(x_0) = v_{10}$ | $v(x_0) = v_{20}$ |
| Rotation | $\theta(x_0) = \frac{\partial v(x_0)}{\partial x} = \theta_{10}$ | $\theta(x_0) = \frac{\partial v(x_0)}{\partial x} = \theta_{20}$ |
| Moment | $-EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = M_{10}$ | $EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = M_{20}$ |
| Cisaillement | $EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = F_{10}$ | $-EI \frac{\partial^2 v(x_0)}{\partial x^2} = F_{20}$ |

D'autres conditions de frontières plus compliquées sont possibles quand les poutres sont soutenues par d'autres éléments élastiques tels les ressorts linéaires ou spirales. La force développée dans le ressort support de la structure doit être équilibré par le cisaillement à l'appui.

L'état de frontière dans ce cas est exprimé par la condition :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right] - kv = 0$$

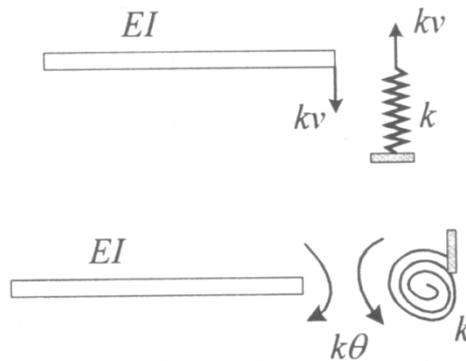


Figure VIII.20. Conditions de frontières avec des ressorts.

Le vecteur forces- moments nodales peuvent être obtenus à partir de l'énergie de déformation, pour EI constantes :

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^L \left(\frac{d^2 N_1(x)}{dx^2} v_1 + \frac{d^2 N_2(x)}{dx^2} \theta_1 + \frac{d^2 N_3(x)}{dx^2} v_2 + \frac{d^2 N_4(x)}{dx^2} \theta_2 \right)^2 dx ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1 = \frac{\partial U}{\partial v_1} \\ M_1 = \frac{\partial U}{\partial \theta_1} \\ F_2 = \frac{\partial U}{\partial v_2} \\ M_2 = \frac{\partial U}{\partial \theta_2} \end{array} \right.$$

Exemple :

Soit la poutre continue, formée de 3 éléments et quatre nœuds sollicitée à une charge concentrée localisée à une distance L par rapport à l'appui 3.

- Déterminer la matrice de rigidité globale ?
- Déterminer les déplacements nodaux et les rotations nodales ?
- Déterminer les efforts tranchants, les moments fléchissant et tracer leurs diagrammes ?
- Calculer les réactions d'appuis ?

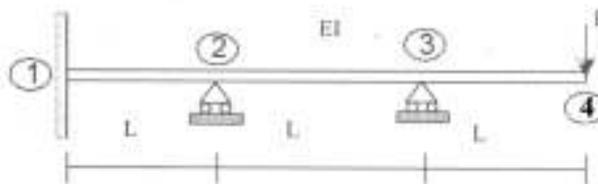


Figure VIII.21. Poutre à une extrémité encastrée et une charge en surplomb.

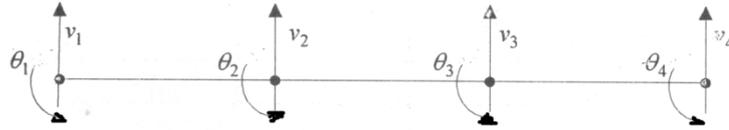


Figure VIII.22. Discrétisation de la poutre totale en quatre poutres élémentaires en flexion.

- Détermination de la matrice de rigidité globale :
- 1/ La matrice de rigidité pour chaque élément est :

Élément (1) constitué des nœuds 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix};$$

Élément (2) constitué des nœuds 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix};$$

Élément (3) constitué des nœuds 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

- 2/ Assemblage des matrices de rigidité élémentaires :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

- 3/ Les conditions aux limites :
- Côté : déplacements : $v_1 = \theta_1 = v_2 = v_3 = 0$
- Côté : moments externes appliqués aux nœuds : $M_2 = M_3 = M_4 = 0$
- Côté les forces externes appliquées aux nœuds : $F_4 = -P$

La matrice de rigidité globale de taille 8x8 se réduit à une matrice de 4x4, après application des conditions aux limites, il vient :

$$\begin{Bmatrix} F_1 = ? \text{ (réaction)} \\ M_1 = 0 \\ F_2 = ? \text{ (réaction)} \\ M_2 = 0 \\ F_3 = ? \text{ (réaction)} \\ M_3 = 0 \\ F_4 = -P \\ M_4 = 0 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 = 0 \text{ (encastrement)} \\ \theta_1 = 0 \text{ (encastrement)} \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

Le système se réduit à :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 8L^2 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 2L^2 & 8L^2 & -6L^2 & 2L^2 \\ 0 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

On résout le système d'équation ci-dessous, puis on détermine les déplacements et les rotations de la poutre :

- Détermination des déplacements nodaux et les rotations nodales de la poutre :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{EI} \begin{pmatrix} \frac{13L}{21} \\ \frac{11}{14} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \frac{PL^2}{EI} \begin{pmatrix} \frac{1}{14} \\ -\frac{2}{7} \end{pmatrix};$$

- Détermination des efforts tranchants et les moments fléchissants :

On procède à remplacer les déplacements et les rotations dans les matrices élémentaires :

Elément (1) :

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{PL^2}{14EI} \end{pmatrix} = \frac{P}{7} \begin{pmatrix} 3 \\ L \\ -3 \\ 2L \end{pmatrix};$$

Elément (2) :

$$\begin{pmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{PL^2}{14EI} \\ 0 \\ -\frac{PL^2}{7EI} \end{pmatrix} = \frac{P}{7} \begin{pmatrix} -9 \\ -2L \\ 9 \\ -7 \end{pmatrix};$$

Elément (3) :

$$\begin{pmatrix} F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ PL \\ -P \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les diagrammes des efforts tranchant et les moments fléchissants, sont établis comme suit :

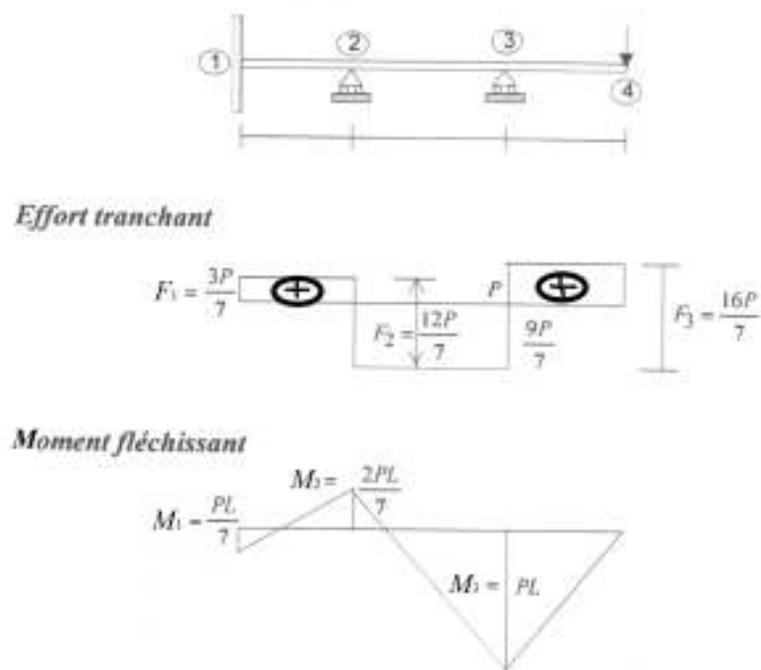


Figure VIII.23. Représentation des efforts tranchants et les moments fléchissants.

- Détermination des réactions d'appuis :

Lire directement les valeurs de F_1 , F_2 et F_3 des matrices précédentes (dans la matrice de rigidité globale, elles ont été mentionnées par « réaction ») :

$$F_1 = \frac{EI}{L^3}(6L\theta_2) = \frac{3}{7}P ; F_2 = \frac{EI}{L^3}(6L\theta_3) = -\frac{12}{7}P \text{ et } F_3 = \frac{EI}{L^3}(-6L\theta_2 + 12v_2 + 6L\theta_4) = \frac{16}{7}P.$$

2.9. Poutre avec charge répartie :

La formulation des éléments finis transforme la charge répartie en charges équivalentes et des moments aux nœuds. Nous savons que les charges concentrées sont appliquées aux nœuds de l'élément de flexion, alors que les charges réparties sont réparties le long de la longueur de l'élément. Il faut remplacer ces charges réparties par des forces et des moments nodaux tels que leur travail mécanique effectué soit équivalent à celui des charges réparties.

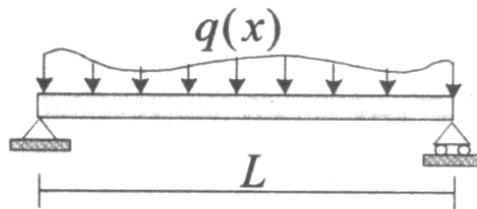


Figure VIII.24. Elément poutre sollicité avec une charge répartie.

$$W = \int_0^L q(x)v(x)dx = F_{\acute{e}q1}v_1 + M_{\acute{e}q1}\theta_1 + F_{\acute{e}q2}v_2 + M_{\acute{e}q2}\theta_2$$

Où : $F_{\acute{e}q1}$ et $F_{\acute{e}q2}$ sont respectivement les forces équivalentes aux nœuds 1 et 2, tandis que $M_{\acute{e}q1}$ et $M_{\acute{e}q2}$ sont les moments nodaux équivalents, ce qui permet d'avoir :

$$F_{\acute{e}q1} = \int_0^L q(x)[N_1(x)]dx ; M_{\acute{e}q1} = \int_0^L q(x)[N_2(x)]dx ;$$

$$F_{\acute{e}q2} = \int_0^L q(x)[N_3(x)]dx ; M_{\acute{e}q2} = \int_0^L q(x)[N_4(x)]dx.$$

Dans le cas d'une charge uniformément constante, ($q(x)=q$), on aura :

$$F_{\acute{e}q1} = q \int_0^L \left(1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}\right) dx = \frac{qL}{2} ;$$

$$M_{\acute{e}q1} = q \int_0^L \left(x - \frac{2x^2}{L} + \frac{2x^3}{L^2}\right) dx = \frac{qL^2}{12} ;$$

$$F_{\acute{e}q2} = q \int_0^L \left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) dx = \frac{qL}{2} ;$$

$$M_{\acute{e}q2} = q \int_0^L \left(\frac{x^3}{L^2} - \frac{x^2}{L}\right) dx = -\frac{qL^2}{12} ;$$

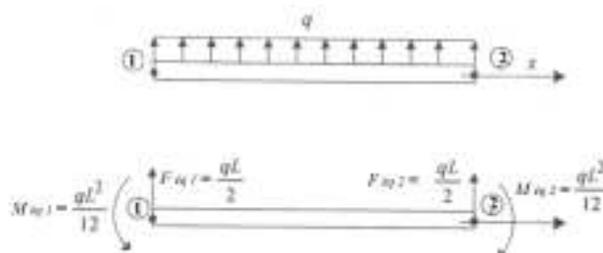


Figure VIII.25. Représentation des forces et des moments équivalents dans le cas d'une charge uniforme constante.

Exemple :

Soit une poutre encadrée de l'extrémité (1) et en appui simple à l'autre extrémité (4). Au nœud (2), elle est sollicitée à un moment de flexion et sur le tronçon 3-4, elle est sollicitée à une charge uniforme répartie .

- Déterminer la matrice de rigidité globale ?
- Déterminer Les déplacements nodaux et les rotations nodales ?
- Calculer les réactions d'appuis ?

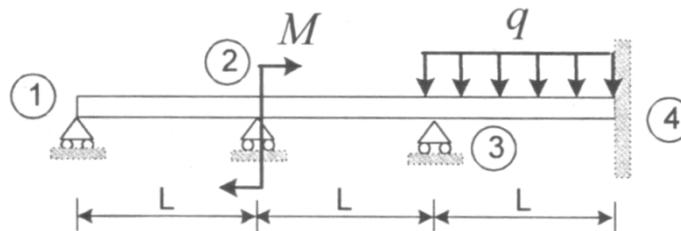


Figure VIII.26. Poutre à une extrémité encadrée avec une charge répartie et un moment de flexion.

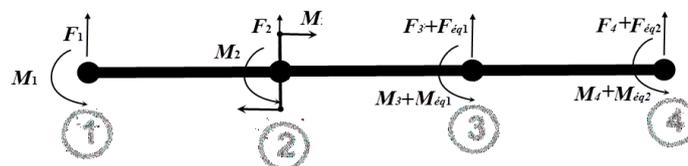


Figure VIII.27. Discrétisation de la poutre totale en trois poutres élémentaires en flexion.

- Détermination de la matrice de rigidité globale
- Détermination de la matrice de rigidité pour chaque élément :

Elément (1) constitué des nœuds 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix},$$

Elément (2) constitué des nœuds 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix},$$

Elément (3) constitué des nœuds 3-4 :

$$\begin{Bmatrix} F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix},$$

- Assemblage : (la matrice de rigidité globale) :

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \\ F_3 \\ M_3 \\ F_4 \\ M_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \\ v_4 \\ \theta_4 \end{Bmatrix}$$

- Les conditions aux limites :
- Côté des déplacements et des rotations : $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$; $\theta_4 = 0$;
- Côté des moments externes appliqués aux nœuds : $M_1 = M_3 = 0, M_2 = -M$.

Après introduction des conditions aux limites, on aura :

$$\begin{Bmatrix} F_1=?(réaction) \\ M_1 \\ F_2=?(réaction) \\ M_2 \\ F_3?(réaction) \\ M_3 \\ F_4?(réaction) \\ M_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{2} \\ -\frac{qL^2}{12} \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 0 & 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1=0 \\ \theta_1 \\ v_2=0 \\ \theta_2 \\ v_3=0 \\ \theta_3 \\ v_4=0(Encastrement) \\ \theta_4=0(Encastrement) \end{Bmatrix}$$

Le système se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -qL^2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 4L^2 & 2L^2 & 0 \\ 2L^2 & 8L^2 & 2L^2 \\ 0 & 2L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} ;$$

Les rotations de la poutre peuvent être calculées après simplification :

$$\theta_1 = \frac{47qL^3}{624 EI} , \theta_2 = \frac{47qL^3}{312 EI} \text{ et } \theta_3 = \frac{17qL^3}{624 EI} .$$

- Détermination des réactions d'appuis :

On injecte les valeurs des rotations déjà calculées dans la matrice globale, on aura :

$$F_1 = \frac{EI}{L^3} (6L\theta_1 + 6L\theta_2) = -\frac{47}{104} qL ,$$

$$F_2 = \frac{EI}{L^3} (-6L\theta_1 + 6L\theta_3) = \frac{5}{104} qL ;$$

$$F_3 = \frac{qL}{2} + \frac{EI}{L^3} (-6L\theta_2) = -\frac{21}{104} qL ;$$

$$F_4 = \frac{qL}{2} + \frac{EI}{L^3} (-6L\theta_3) = \frac{35}{104} qL ;$$

$$M_4 = -\frac{qL^2}{12} + \frac{EI}{L^3} (2L^2\theta_3) = -\frac{3}{104} qL^2 .$$

2.10. Les vibrations composées (axial-flexion)

La poutre suivante est sollicitée à une vibration axiale-flexion. Cette poutre est orientée arbitrairement dans un plan bidimensionnel. Les équations du mouvement peuvent être obtenues en employant le procédé de transformation du repère local vers le repère global.

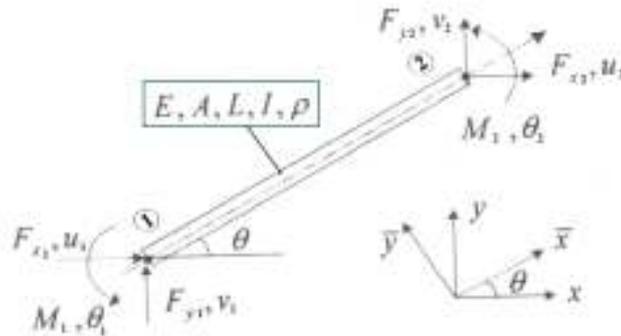


Figure VIII.28. Elément poutre orientée en sollicitation axial-flexion.

L'équation générale s'écrit :

$$[F] = [T]^T \left[[\bar{k}] - \omega^2 [\bar{m}] \right] [T] \{\delta\}$$

Où [T] est la matrice de transformation entre les repères.

$[\bar{k}]$: Matrice de rigidité dans le repère local,

$[\bar{m}]$: Matrice masse dans le repère local,

Dans la formulation suivante, les équations de mouvement liées au chargement axial et au chargement de flexion sont décrites séparément ;

• **Chargement axial :**

Pour un élément en chargement axial dans un plan bidimensionnel, la matrice de rigidité et la matrice de la masse dans le repère locale, sont :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_2 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} ;$$

La formule de changement de base est la suivante :

$$[F] = [T]^T \left[[\bar{k}] - \omega^2 [\bar{m}] \right] [T] \{\delta\} ;$$

Dans ce cas, la matrice de rigidité, sera :

$$[\bar{k}] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ; \text{ et la matrice masse sera : } [m] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matrice de transformation, sera :

$$[T] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Par substitution, on trouve :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \lambda^2 & \lambda\mu & 0 & -\lambda^2 & -\lambda\mu & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & 0 & -\lambda\mu & -\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda^2 & -\lambda\mu & 0 & \lambda^2 & \lambda\mu & 0 \\ -\lambda\mu & -\mu^2 & 0 & \lambda\mu & \mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{6} \omega^2 \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & 2\lambda\mu & 0 & \lambda^2 & \lambda\mu & 0 \\ 2\lambda\mu & 2\mu^2 & 0 & -\lambda\mu & -\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda\mu & 0 & 2\lambda^2 & 2\lambda\mu & 0 \\ \lambda\mu & \mu^2 & 0 & 2\lambda\mu & 2\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

• **Chargement en flexion :**

Pour un élément en chargement flexion dans un plan bidimensionnel, la matrice de rigidité et la matrice de la masse dans le repère locale, sont :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

La matrice de rigidité dans le repère local, s'écrit :

$$[\bar{k}] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix};$$

La matrice de la masse :

$$[\bar{m}] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

Après substitution dans l'équation du mouvement générale :

$$[F] = [T]^T \left[[\bar{k}] - \omega^2 [\bar{m}] \right] [T] \{\delta\}$$

$$\text{Alors : } \begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & & & & & \\ -12\lambda & 12\lambda^2 & & & & \\ -6\mu L & 6\lambda L & 4L^2 & & & \\ -12 & & 12\lambda & 6\mu L & 12 & \\ 12\lambda & 12\lambda^2 & -6\lambda L & -12\lambda & 12\lambda^2 & \\ -6\mu L & 6\lambda L & 2L^2 & 6\mu L & -6\lambda L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{6} \omega^2 \begin{bmatrix} 156\mu^2 & & & & & \\ -156\lambda & 156\lambda^2 & & & & \\ -22\mu L & 22\lambda L & 4L^2 & & & \\ 54\mu^2 & -56\lambda & -13\mu L & 156\mu^2 & & \\ -54\lambda & 54\lambda^2 & 13\lambda L & -156\lambda & 156\lambda^2 & \\ 13\mu L & -13\lambda L & -3L^2 & 22\mu L & -22\lambda L & 4L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

L'équation générale de chargement axial est utilisé pour l'analyse de vibration libre des treillis plans, alors que ; l'équation générale de chargement en flexion est employer pour l'analyse de vibration libre des structures planes et qui sont dominées par des mouvements de flexion seulement (avec l'hypothèse de l'inextensibilité).

La combinaison des deux équations est employée pour l'analyse de vibration libre de treillis plan où les mouvements axiaux et de flexion sont couplés.

Exemple :

Un portique fermé composé de trois barres, fixé a ces extrémités. Les barres ont les mêmes: module d'élasticité E, section A, moment d'inertie I et longueur L. Calculer les fréquences de la structure ; en supposant deux cas de déformation : (a) symétrique, (b) antisymétrique ?

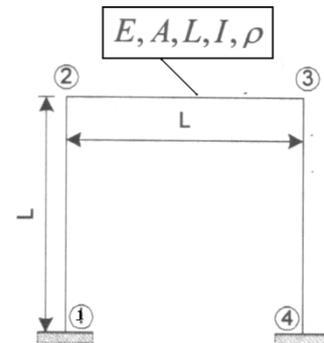


Figure VIII.29. Portique fermé à trois barres.

Le tableau suivant résume les angles et cosinus directeurs des trois barres constituant la structure de portique fermé :

| Barre | Longueur | Angle θ | $\lambda = \cos \theta$ | $\mu = \sin \theta$ | λ^2 | μ^2 | $\lambda\mu$ |
|-------|----------|----------------|-------------------------|---------------------|-------------|---------|--------------|
| 1 | L | $\pi/2$ | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | L | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | L | $-\pi/2$ | 0 | -1 | 0 | 1 | 0 |

• **Chargement axial :**

L'élément 1 : constitué des nœuds 1-2 :

$$\begin{Bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ M_1 \\ F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{6} \omega^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

L'élément 2 : constitué des nœuds 2-3 :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{6} \omega^2 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

- Les conditions aux limites :
- Côté des déplacements et des rotations :
 Au niveau des encastremets les déplacements et les rotations sont nuls, $u_1 = u_4 = 0$; $v_1 = v_4 = 0$;
 , et $\theta_1 = \theta_4 = 0$.
- Côté des forces et des moments externes appliqués aux nœuds 2 et 3 : $F_{x2}=F_{y2}=F_{x3}=F_{y3}=0$;
 $M_2=M_3=0$
- Assemblage global : après avoir eu les systèmes matriciels de chargement axial et en flexion, La superposition des systèmes matriciels se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ M_2 \\ F_{x3} \\ F_{y3} \\ M_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{24EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & -\frac{12EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{pmatrix} - \frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 296 & 0 & 22L & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 22L & 22L & 8L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 312 & -44L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -44L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

A/ cas de déformation symétrique (pas de déplacement pour les nœuds 2 et 3, y'a que les rotations):

La condition de symétrie suppose que les rotations θ_2 et θ_3 sont égales au module et de sens opposé ; $\theta_2 = -\theta_3$. Et que la condition de l'inextensibilité exige que $v_2 = v_3 = 0$. Puisque les déplacements verticaux sont nuls, alors on peut en déduire que les déplacements horizontaux sont nuls aussi, il reste deux de degré de liberté seulement.

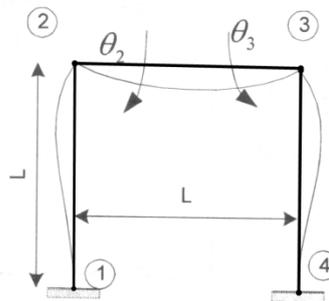


Figure VIII.30. Structure portique déformée par symétrie.

Le système matriciel devient :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} = 0 \\ F_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ F_{x3} = 0 \\ F_{y3} = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{24EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & -\frac{12EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{pmatrix} - \frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 296 & 0 & 22L & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 22L & 22L & 8L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 312 & -44L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -44L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 = 0 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ u_3 = 0 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

On aura à résoudre le système pour θ_2 et θ_3 :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 8L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 8L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

On pose : $\xi = \frac{\rho AL^2}{420EI} \omega^2$ et $\theta_2 = -\theta_3$.

$$\left(\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} - \xi \begin{bmatrix} 8L^2 & -3L^2 \\ -3L^2 & 8L^2 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 = -\theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{bmatrix} 8 - 8\xi L^2 & -2 - 3\xi L^2 \\ 2 + 3\xi L^2 & -8 + 8\xi L^2 \end{bmatrix}\right) \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ;$$

$$\Rightarrow 6 - 11 L^2 \xi = 0. \rightarrow \xi = \frac{\rho AL^2}{420EI} \omega^2 = \frac{6}{11L^2} \rightarrow \omega = \frac{15.13}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left[\frac{rd}{s}\right]$$

A/ cas de déformation antisymétrique (existe de déplacements horizontaux pour les nœuds 2 et 3, et leurs rotations):

D'après les conditions d'antisymétrie, on remarque que les rotations θ_2 et θ_3 , sont égales au module et de même sens, ($\theta_2 = \theta_3$). D'après la condition de l'inextensibilité, $v_2=v_3=0$. Alors les déplacements horizontaux existent, donc on aura quatre degrés de liberté.

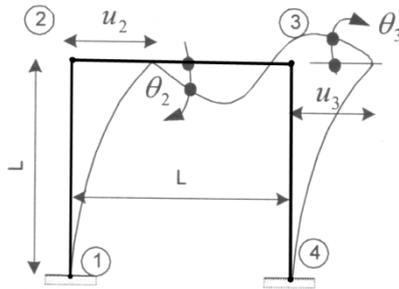


Figure VIII.31. Structure portique déformée par antisymétrie.

Le système matriciel sera :

$$\begin{Bmatrix} F_{x2} = 0 \\ F_{y2} = 0 \\ M_2 = 0 \\ F_{x3} = 0 \\ F_{y3} = 0 \\ M_3 = 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{24EI}{L^2} + \frac{EA}{L} & -\frac{12EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} \end{pmatrix} - \frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 296 & 0 & 22L & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 22L & 22L & 8L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 312 & -44L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -44L & 8L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ u_3 = u_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Le système matriciel se restreindra à :

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^2} & \frac{6EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{10EI}{L} \end{bmatrix} - \frac{\rho AL}{420} \omega^2 \begin{bmatrix} 366 & 22L \\ 22L & 3L^2 \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

On pose : $\xi = \frac{\rho AL^2}{420EI} \omega^2$, on aura :

$$\left(\begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} - 366\xi & \frac{6}{L} - 22\xi L \\ \frac{6}{L} - 22\xi L & 10 - 5\xi L \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} u_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} - 366\xi & \frac{6}{L} - 22\xi L \\ \frac{6}{L} - 22\xi L & 10 - 5\xi L \end{bmatrix} = 0$$

$$1346 \xi^2 - 3456 \xi + 84 = 0$$

Nous déterminons les pulsations (fréquences) par :

$$\begin{cases} \omega_1 = \frac{3.212}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left[\frac{rd}{s} \right] \\ \omega_2 = \frac{32.685}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}} \left[\frac{rd}{s} \right] \end{cases} .$$

VIII.3. Récapitulatif :

Pour analyser un système dynamique libre non amorti de ressorts et de masses ayant n degrés de liberté, la forme des équations différentielles du mouvement sera :

$$[m]\{\ddot{v}\} + [k]\{v\} = \{0\}$$

Où $[m]$ est la matrice masse du système,

$[k]$ est la matrice de rigidité du système,

Pour déterminer les pulsations des vibrations libres du système dynamique, nous admettons comme solution :

$$v_i(t) = C_i \sin(\omega t + \varphi)$$

La substitution des dérivées de la solution, nous amène à avoir l'équation caractéristique :

$[[k] - \omega^2[m]] = 0$, qui permettra de déterminer les pulsations propres, qui seront substituées, une par une ; au système : $[[k] - \omega^2[m]]\{C_i\} = \{0\}$,

Pour déterminer les rapports des amplitudes à chaque mode de vibration.

La solution (réponse) générale pour chaque degré de liberté (i) est exprimée par :

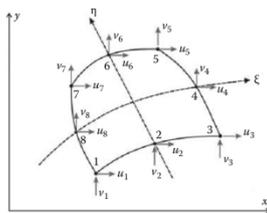
$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N C_i^j \sin(\omega_j t + \varphi_j) \text{ avec } : j= 1, \dots, n \text{ ou } n: \text{ nombre de d.d.l.}$$

Remarque importante :

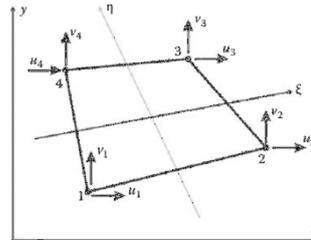
Les éléments finis dont nous avons fait l'introduction et l'initiation dans cette partie sont les éléments linéaires (ressorts, barre, poutre-« éléments utilisés en treillis ») par contre les éléments plans et les éléments volumiques nécessitent une étude approfondie non prise dans ce cours, concernant leurs matrices de rigidité et de masse, les conditions aux limites et les types de chargement appliqués.

Les éléments 2D (surfaiques) :

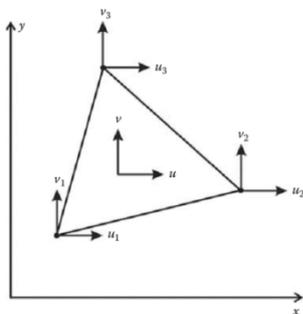
Élément plan 8 nœuds iso paramétrique (8 N I)



Élément 4 nœuds linéaire quadratique (4NLQ)

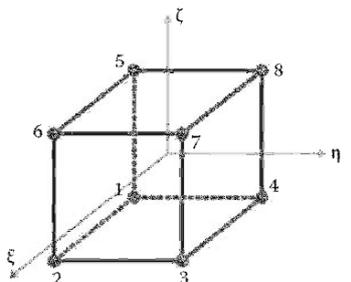


Élément linéaire Triangle (3NLT)

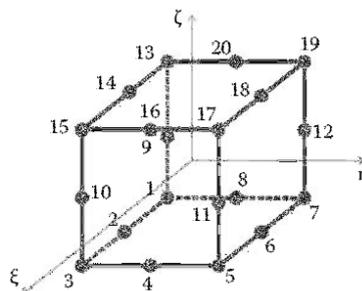


Les éléments 3D (Volumique) :

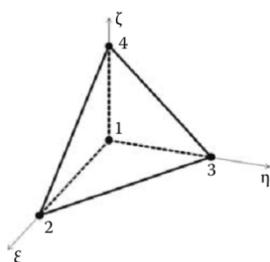
Élément 8NL (cube)



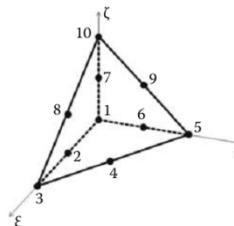
Élément 20 NQ (cube)



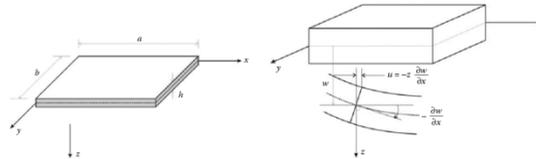
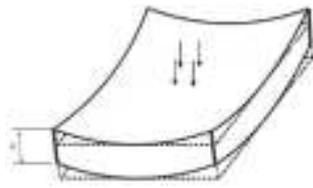
Élément 4NL (tétraédrique)



Élément 10 NQ (tétraédrique)



Les éléments coques (épaisse- minces)



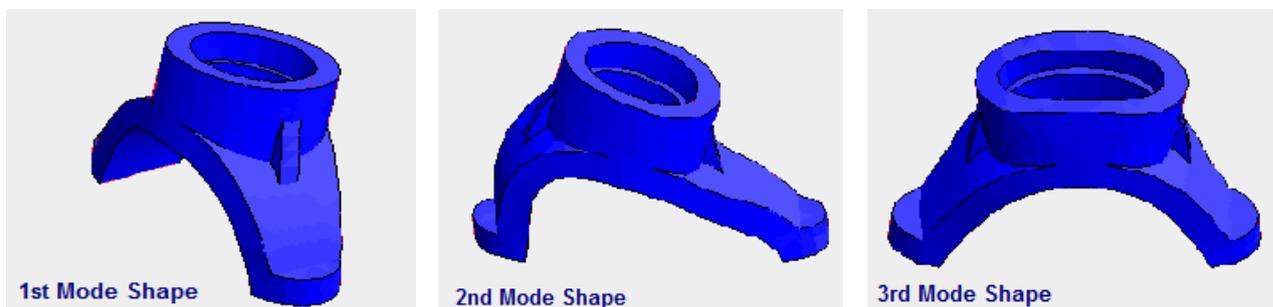
Les éléments plaques (épaisse-minces)

Des logiciels (tel : Ansys, Cosmosworks, Catia, Castem, Sap 2000,...) nous permettent de faire l'analyse vibratoire en 2D et 3D, après :

| | |
|----------------------------|--|
| | |
| 1/ la création de l'objet, | 2/ Attribuer les conditions de frontières et le matériau de l'objet, |

3/ Etablir le choix de l'élément de maillage

4/ Affichage des résultats (les pulsations et les modes propres)



Références bibliographiques :

En anglais :

- Dr. Alessandro Dazio, UME School, « **Fundamentals of Structural Dynamics** » An-Najah National University April 19 - April 23, 2013.
- Robert F. Steidel, Jr, « **An introduction to mechanical vibrations, 2nd edition** », John Wiley & Sons, 1980.
- Ray W. Clough & Joseph Penzien, « **Dynamics of structures** » third edition, University Ave. Berkeley, CA 94704 USA, 2003.
- S. Graham Kelly, Ph.D, « **Schaum's outline of theory and problems mechanical vibrations** », Schaum's outline series, ISBN 0-07-034041-2, OA935.K383 1996.
- Francis S.Tse, Ivane.Morse & Rolland T.HINKLE, « **Mechanical Vibrations theory and Applications** », 2nd edition, Allyn and Bacon, Inc., 1978.
- William J. Bottega, « **Engineering vibrations** » Taylor & Francis Group, International Standard Book Number-13: 978-1-4200-2009.
- Anil K. Chopra, « **Dynamics of structures, theory and applications to earthquake engineering** », Prentice-Hall, Inc. 1995.
- Balakumar Balachandran & Edward B. Magrab, « **Vibrations, 2nd edition** », Cengage Learning, 2009.
- Singiresu S. Rao, « **Mechanical vibrations, 5th edition** », Prentice-Hall, Inc., 2011.
- Paolo L. Gatti and Vittorio Ferrari, « **Applied Structural and Mechanical Vibrations, Theory, methods and measuring instrumentation** », Taylor & Francis Group LLC, 2003.
- Donald T. Greenwood, « **Advanced Dynamics** », Cambridge University Press 2003.
- S. Timoshenko & D.H. Young, « **Advanced dynamics** » McGraw-Hill book company, Inc. 1948.
- H. R. Harrison & T. Nettleton, « **Advanced Engineering Dynamics** », H R Harrison & T Nettleton, 1997.
- S. Graham Kelly, « **Fundamentals of mechanical vibrations, 2nd edition** », McGraw-Hill Higher Education, 2000.
- Amar Khennane, « **Introduction to Finite Element Analysis using MATLAB and Abaqus** », Taylor & Francis Group, LCC-2013.

En français :

- Alain Pecker, « **Dynamique des structures et des ouvrages** » Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Edition 2006.
- Sylvain Drapier, « **Dynamique des Solides et des Structures** », 5^{ème} édition, 'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, Département Mécanique et Procédés d'Elaboration, Centre Science des Matériaux et des Structures & UMR CNRS 5146, octobre 2016.
- Jean-Claude Pascal, « **VIBRATIONS et ACOUSTIQUE 1** », Ecole nationale supérieure d'ingénieurs du Mans - Université du Maine, 2007-2008.
- Jean-Claude Pascal, « **VIBRATIONS et ACOUSTIQUE 2** », Ecole nationale supérieure d'ingénieurs du Mans - Université du Maine, 2008-2009.
- Marcelo Areias Trindade, « **Contrôle hybride actif-passif des vibrations de structures par des matériaux piézoélectriques et viscoélastiques : poutres sandwich/multicouches intelligentes** », thèse doctorat, spécialité : mécanique des structures et des systèmes couplés-Conservatoire national des arts et métiers-France, 2000.
- Ouinas Djamel, « **Application de la méthode des éléments finis, cours et exercices corrigés à l'usage des ingénieurs, Tome 1** », OPU, 1-2012.
- S. Graham Kelly, « **Mechanical vibrations, Théory and applications, SI** », McGraw-Hill Higher Education, 2011.

Les cours :

- Mr :Mebarki, A, **Cours Dynamique des structures**, Université de Ouargla, 2014.
- Dr Fouad Boukli Hacene & Dr Mohamed Mebrouki, « **Physique-vibrations, Cours et problèmes résolus, Classes préparatoires en sciences et techniques**», 2nd édition, Ecole Préparatoire en Sciences et Techniques de Tlemcen, , 2015-2016.
- Dr Fouad Boukli hacene, « **Tome 1: Vibrations, Rappels de Cours Problèmes posés aux concours d'entrée aux Grandes Ecoles Scientifiques, Physique 03, 2^{ième} A Licence** », Université de Chlef, 2014-2015.
- Pr Abdelouahed Kriker, « **Généralités et Objectif de DDS** », Université de Ouargla, 2014.
- Dr S. Talukdar, « **Vibration of continuous systems** », Indian Institute of Technology Guwahati, 2013.

En arabe :

- د. هشام جبر , "نظرية الإهتزازات و الأمواج الميكانيكية" ديوان المطبوعات الجامعية. 1999.
- أ. وليم و. سيتو , "سلسلة شوم, نظريات ومسائل في الإهتزازات الميكانيكية " ترجمة د. سمير نبيه شكري و مراجعة د. محمد خلوصي إسماعيل. الدار الدولية للنشر والتوزيع. 1993.

Annexe

Tableau A.1.

Natural frequencies and mode shapes for beams

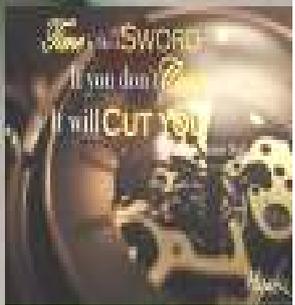
| End Conditions $X = 0$ $X = 1$ | Characteristic Equation | Five Lowest Natural Frequencies | Mode Shape | Kinetic Energy Scalar Product $(X_1(x), X_2(x))$ |
|-----------------------------------|--|---|---|---|
| | | $\omega_k = \sqrt{\lambda_k}$ | | |
| Fixed-fixed | $\cos \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} = 1$ | $\omega_1 = 22.37$ $\omega_2 = 61.66$ $\omega_3 = 120.9$ $\omega_4 = 199.9$ $\omega_5 = 298.6$ | $C_4 [\cosh \lambda_1^{1/4} x - \cos \lambda_1^{1/4} x - \alpha_4 (\sinh \lambda_1^{1/4} x - \sin \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cosh \lambda_1^{1/4} - \cos \lambda_1^{1/4}}{\sinh \lambda_1^{1/4} - \sin \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Pinned-pinned | $\sin \lambda^{1/4} = 0$ | $\omega_1 = 9.870$ $\omega_2 = 39.48$ $\omega_3 = 88.83$ $\omega_4 = 157.9$ $\omega_5 = 246.7$ | $C_4 \sin \lambda_1^{1/4} x$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Fixed-free | $\cos \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} = -1$ | $\omega_1 = 3.51$ $\omega_2 = 22.03$ $\omega_3 = 61.70$ $\omega_4 = 120.9$ $\omega_5 = 199.9$ | $C_4 [\cosh \lambda_1^{1/4} x - \cos \lambda_1^{1/4} x - \alpha_4 (\sinh \lambda_1^{1/4} x - \sin \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cosh \lambda_1^{1/4} + \cos \lambda_1^{1/4}}{\sin \lambda_1^{1/4} + \sinh \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Free-free | $\cosh \lambda^{1/4} \cos \lambda^{1/4} = 1$ | $\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 22.37$ $\omega_3 = 61.66$ $\omega_4 = 120.9$ $\omega_5 = 199.9$ | $1, \sqrt{3}x$ ($\delta = 1$) $C_4 [\cosh \lambda_1^{1/4} x + \cos \lambda_1^{1/4} x + \alpha_4 (\sinh \lambda_1^{1/4} x + \sin \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cosh \lambda_1^{1/4} - \cos \lambda_1^{1/4}}{\sinh \lambda_1^{1/4} - \sin \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Fixed-linear spring | $\lambda^{3/4} (\cosh \lambda^{1/4} \cos \lambda^{1/4} + 1) - \beta (\cos \lambda^{1/4} \sinh \lambda^{1/4} - \cosh \lambda^{1/4} \sin \lambda^{1/4}) = 0$ | For $\beta = 0.25$ $\omega_1 = 3.65$ $\omega_2 = 22.08$ $\omega_3 = 61.70$ $\omega_4 = 120.9$ $\omega_5 = 199.9$ | $C_4 [\cos \lambda_1^{1/4} x - \cosh \lambda_1^{1/4} x - \alpha_4 (\sin \lambda_1^{1/4} x - \sinh \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cos \lambda_1^{1/4} + \cosh \lambda_1^{1/4}}{\sin \lambda_1^{1/4} + \sinh \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Pinned-linear spring | $\cot \lambda^{1/4} \coth \lambda^{1/4} = -\frac{2\beta}{\delta^4}$ | For $\beta = 0.25$ $\omega_1 = 0.8636$ $\omega_2 = 15.41$ $\omega_3 = 49.47$ $\omega_4 = 104.25$ $\omega_5 = 178.27$ | $C_4 \left[\sin \lambda_1^{1/4} x + \frac{\sin \lambda_1^{1/4}}{\sinh \lambda_1^{1/4}} \sinh \lambda_1^{1/4} x \right]$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Fixed-attached mass | $\lambda^{1/4} (\cos \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} + 1) + \beta (\cos \lambda^{1/4} \sinh \lambda^{1/4} - \cosh \lambda^{1/4} \sin \lambda^{1/4}) = 0$ | For $\beta = 0.25$ $\omega_1 = 3.047$ $\omega_2 = 21.54$ $\omega_3 = 61.21$ $\omega_4 = 120.4$ $\omega_5 = 199.4$ | $C_4 [\cos \lambda_1^{1/4} x - \cosh \lambda_1^{1/4} x + \alpha_4 (\sin \lambda_1^{1/4} x - \sinh \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cos \lambda_1^{1/4} + \cosh \lambda_1^{1/4}}{\sin \lambda_1^{1/4} + \sinh \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx + \beta X_1(1) X_2(1)$ |
| Pinned-free | $\tan \lambda^{1/4} = \tanh \lambda^{1/4}$ | $\omega_1 = 0$ $\omega_2 = 15.42$ $\omega_3 = 49.96$ $\omega_4 = 104.2$ $\omega_5 = 178.3$ | $\sqrt{3}x$ ($\delta = 1$) $C_4 \left[\sin \lambda_1^{1/4} x + \frac{\sin \lambda_1^{1/4}}{\sinh \lambda_1^{1/4}} \sinh \lambda_1^{1/4} x \right]$ ($\delta > 1$) | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Fixed-pinned | $\tan \lambda^{1/4} = \tanh \lambda^{1/4}$ | $\omega_1 = 15.42$ $\omega_2 = 49.96$ $\omega_3 = 104.2$ $\omega_4 = 178.3$ $\omega_5 = 272.0$ | $C_4 [\cos \lambda_1^{1/4} x - \cosh \lambda_1^{1/4} x - \alpha_4 (\sin \lambda_1^{1/4} x - \sinh \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cos \lambda_1^{1/4} - \cosh \lambda_1^{1/4}}{\sin \lambda_1^{1/4} - \sinh \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx$ |
| Fixed-attached inertia element | $\cos \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} + \beta (\sin \lambda^{1/4} \cosh \lambda^{1/4} + \cos \lambda^{1/4} \sinh \lambda^{1/4}) = -1$ | For $\beta = 0.25$ $\omega_1 = 4.425$ $\omega_2 = 27.28$ $\omega_3 = 71.41$ $\omega_4 = 135.4$ $\omega_5 = 219.2$ | $C_4 [\cos \lambda_1^{1/4} x - \cosh \lambda_1^{1/4} x + \alpha_4 (\sin \lambda_1^{1/4} x - \sinh \lambda_1^{1/4} x)]$ $\alpha_4 = \frac{\cos \lambda_1^{1/4} - \cosh \lambda_1^{1/4}}{\cos \lambda_1^{1/4} + \cosh \lambda_1^{1/4}}$ | $\int_0^1 X_1(x) X_2(x) dx + \beta X_1(1) X_2(1)$ |

Vous pouvez me contacter par e-mail à :

Saib_cherif@yahoo.fr , pour me faire part des erreurs constatées sur ce document ou pour toutes suggestions. Merci d'avance.



وآله اعلم



Tomorrow
To be or not to be
That's the question

