

Chapitre 1: Circuits et dispositifs passifs pour micro-ondes

1. Théorie générale des multipôles

1.1. Généralités

1.1.1. Introduction

Les multipôles sont des dispositifs à plusieurs accès pouvant remplir n'importe quelle fonction possible. Un accès quelconque est parfaitement défini aux basses fréquences (Circuits à constantes localisées) ce qui n'est pas le cas aux fréquences micro-ondes (Circuits à constantes réparties).

En micro-onde, il est toujours nécessaire de définir (arbitrairement) pour chaque accès, un plan de référence, plan par rapport auquel seront déterminées toutes les grandeurs possibles.

1.1.2. Constitution

Soient un certain nombre de support de transmission (lignes et/ou guides) qui convergent vers une même région d'espace pour former une jonction.

On définit pour chaque support de transmission un plan de référence (section droite). Ce support (ligne ou guide) peut être soit alimenté par une source, soit terminé par une charge.

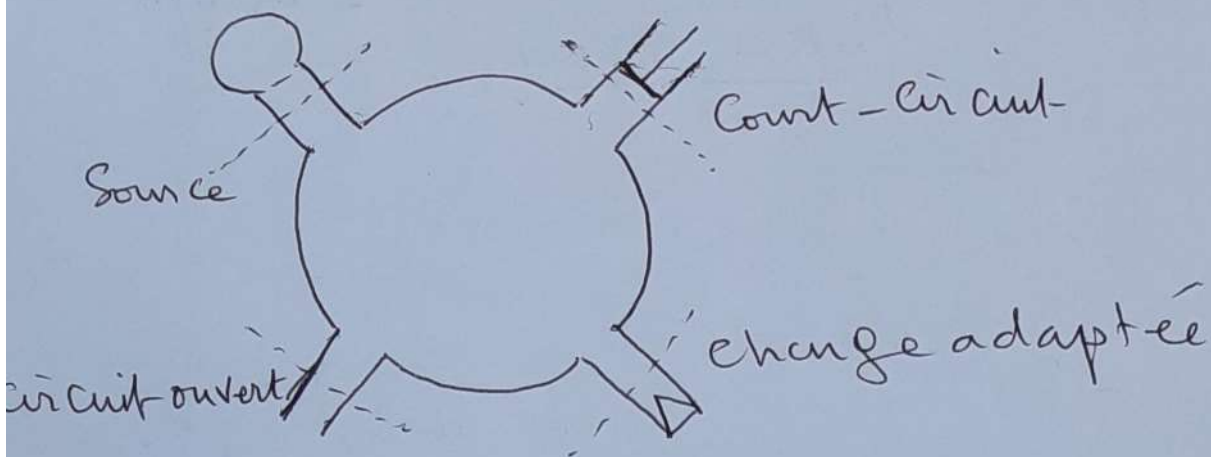


Figure 1.1 : Représentation d'un multipôle.

L'ensemble constitué par la jonction et les supports de transmission existant entre celle-ci et les plans de référence constituent un multipôle. Il existe un certain nombre de multipôles dont les plus courants sont :

- Les dipôles (Un accès).
- Les quadripôles (Deux accès).
- Les hexapôles (Trois accès).
- Les octopôles (Quatre accès).

1.1.3 Hypothèses et conventions

Dans cette étude, un certain nombre de suppositions doivent être prises :

- Les systèmes étudiés ne rayonnent aucune énergie vers l'extérieur (Absence de source d'énergie).
- Dans chaque accès il ne se propage qu'un seul mode à la fois (TEM pour les lignes et TE ou TM pour les guides d'ondes). Si dans un accès donné, plusieurs modes se propagent, il faut remplacer le support de transmission réel par un certain nombre de support virtuels égal au nombre de modes existants. (2)

- Les axes de propagation (z_n) des ondes qui se propagent dans les différents conducteurs sont tous dirigés vers la jonction. Dans ces conditions, les ondes tension-courant incidentes (a_n) sont toutes dirigées vers la jonction alors que les ondes tension-courant réfléchies (b_n) sont dirigées en dehors de la jonction.

- Les plans de références associés aux différents axes doivent être assez éloignés de la jonction pour que le mode qui se propage ne soit pas affecté par les ondes évanescentes produites par les discontinuités de la jonction.

1.1. Rappel sur la ligne

Soit une ligne sans pertes ($\alpha = 0$), fonctionnant en régime sinusoïdal, dans laquelle se propage le mode TEM le long de l'axe de propagation z . Les relations suivantes donnent les expressions de la tension, du courant et de puissance en un point z quelconques. Ces trois grandeurs ont pour origine la superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie.

a. Tension et Courant en z

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{+j\beta z}$$

$$I(z) = I^+ e^{-j\beta z} + I^- e^{+j\beta z} \quad \text{--- (1-1)}$$

b. Puissance transportée par la ligne

$$P_L(z) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (V(z) I(z)^*) = P_L^+(z) - P_L^-(z)$$

Où les puissances incidentes et réfléchies s'écrivent:

$$P_L^+ = \frac{V^+(I^+)^*}{2} \quad (1-2)$$

$$P_L^- = \frac{V^-(I^-)^*}{2}$$

1.1.5 Ligne équivalente à un guide Sans pertes

1.1.5.1. Champ électromagnétique le long du guide

Quel que soit le guide d'onde utilisé, le champ électromagnétique dans un plan quelconque est toujours dû à la superposition d'un champ électromagnétique incident et d'un champ électromagnétique réfléchi

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{e}^+(x, y) e^{-j\beta z} + \vec{e}^-(x, y) e^{+j\beta z}$$

$$\vec{H}(x, y, z) = \vec{h}^+(x, y) e^{-j\beta z} + \vec{h}^-(x, y) e^{+j\beta z}$$

Les composantes incidentes (+) et réfléchies (-) des champs électriques et magnétiques sont données par :

$$\vec{e}^+(x, y) = A (\vec{e}_T(x, y) + e_z(x, y) \vec{u}_z)$$

$$\vec{e}^-(x, y) = B (\vec{e}_T(x, y) - e_z(x, y) \vec{u}_z)$$

$$\vec{h}^+(x, y) = A (\vec{h}_T(x, y) - h_z(x, y) \vec{u}_z)$$

$$\vec{h}^-(x, y) = B (-\vec{h}_T(x, y) + h_z(x, y) \vec{u}_z)$$

5.1.5.2. Puissance totale transportée par le guide

Elle est donnée par le flux du vecteur de Poynting à travers la section droite S du guide.

$$P_G = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{E}_T \times \vec{H}_T^*) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \cdot dS = P_G^+ - P_G^-$$

Le remplacement ~~des~~ champs électromagnétiques transversaux par leurs expressions données en fonction de \vec{e}^+ , \vec{e}^- , \vec{h}^+ et \vec{h}^- suivi du développement de la relation obtenue (4) permet d'évaluer les

puissance incidente et la puissance réfléchi.

$$P_G^+ = \frac{|A|^2}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{e}_T \times \vec{h}_T^*) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, dS \quad (1-3)$$

$$P_G^- = \frac{|B|^2}{2} \operatorname{Re} \iint_S (\vec{e}_T \times \vec{h}_T^*) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, dS$$

1.1.5.3 Equivalence entre une ligne sans pertes et un guide sans pertes

Pour qu'il y ait équivalence il faudrait qu'il y ait proportionnalité entre les grandeurs incidentes et entre les grandeurs réfléchies. Pour cela on pose:

$$V^+ = K_1 A$$

$$I^+ = K_2 A$$

$$V^- = K_1 B$$

$$I^- = -K_2 B$$

1.1.5.4. Normalisation

Pour que l'équivalence (guide-ligne) soit indépendante de la puissance, il faudrait normaliser la puissance en posant:

$$\operatorname{Re} \iint_S (\vec{e}_T \times \vec{h}_T^*) \cdot \vec{n}_{\text{ext}} \, dS = 1$$

En ~~par~~ reportant cette expression dans les relations (1-3) puis en égalisant les puissances normalisées nous pouvons écrire:

$$\left. \begin{aligned} P_L^+ &= \frac{V^+ (I^+)^*}{2} = \frac{K_1 \cdot K_2 \cdot |A|^2}{2} = \frac{|A|^2}{2} = P_G^+ \\ P_L^- &= \frac{V^- (V^-)^*}{2} = \frac{K_1 K_2 |B|^2}{2} = \frac{|B|^2}{2} = P_G^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow K_1 K_2 = 1$$

Cette dernière relation nous donne une infinité de valeurs de K_1 et de K_2 . Pour la rendre unique, il est possible de s'imposer l'impédance caractéristique de la ligne équivalente (5) qui est donnée par

$$z_c = \frac{k_1}{k_2}$$

Il est alors possible de déterminer les constantes k_1 et k_2 qui sont données par:

$$\left. \begin{array}{l} k_1 = \sqrt{z_c} \\ k_2 = 1/\sqrt{z_c} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} V^+ = A\sqrt{z_c} \\ V^- = B\sqrt{z_c} \\ I^+ = A/\sqrt{z_c} \\ I^- = -B/\sqrt{z_c} \end{cases} \quad (1-4)$$

1.1.5.5 Ondes Courant-Tension incidentes et réfléchies

Le report des relations (1-4) dans les relations (1-1) permet d'écrire les expressions normalisées de la tension et du courant (normalisation par rapport à l'impédance caractéristique).

$$v(z) = \frac{V(z)}{\sqrt{R_c}} = A e^{-j\beta z} + B e^{+j\beta z} \quad (1-5)$$

$$i(z) = I(z)\sqrt{R_c} = A e^{-j\beta z} - B e^{+j\beta z}$$

En général on pose:

$$a(z) = A e^{-j\beta z} = \frac{v(z) + i(z)}{2} \quad (1-6)$$

$$b(z) = B e^{+j\beta z} = \frac{v(z) - i(z)}{2}$$

Où $a(z)$ et $b(z)$ représentent l'onde tension-courant incidente et l'onde tension-courant réfléchi.

Dans les conditions la tension et le courant normalisés s'écrivent:

$$v(z) = a(z) + b(z) \quad (1-7)$$

$$i(z) = a(z) - b(z)$$

1.1.5.6 Puissance transmise.

La puissance totale $P(z)$ en un plan z quelconque est obtenue à partir de la puissance incidente et de la puissance réfléchi.

$$P(z) = P^+(z) - P^-(z)$$

Où: $P^+(z) = \frac{|a(z)|^2}{2}$ et $P^-(z) = \frac{|b(z)|^2}{2}$.

En introduisant le coefficient de réflexion $\Gamma(z)$, la puissance totale s'écrit:

$$P(z) = \frac{|a(z)|^2}{2} (1 - |\Gamma(z)|^2)$$

$$\Gamma(z) = \frac{b(z)}{a(z)}$$

1.2 Matrices impédance $[Z]$, admittance $[Y]$ et chaîne $[C]$

1.2.1. Introduction

Soit un multipôle passif à n accès représenté par la figure suivante:

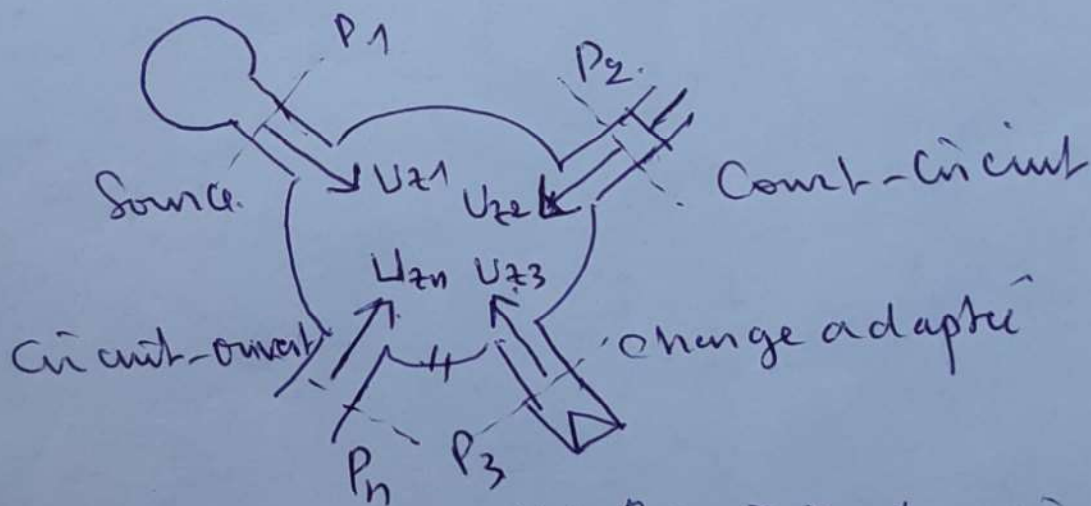


Figure 1.2: Multi pôle à "n" accès avec plans de référence.

A chaque accès i on définit un plan de référence. P_i , plan par rapport auquel sont déterminés la tension V_i et le courant I_i (grandeurs réelles ou équivalentes). Par convention, tous les courants sont dirigés vers le fonction.

1.2.2. Matrice impédance [Z]

1.2.2.1. Expression de la matrice

Pour n'importe quel multipôle, la tension existant à un accès donné peut s'exprimer en fonction des courants existant dans les différents accès.

$$V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 + Z_{13}I_3 + \dots + Z_{1n}I_n$$

$$V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 + Z_{23}I_3 + \dots + Z_{2n}I_n$$

$$\dots = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$$

$$V_n = Z_{n1}I_1 + Z_{n2}I_2 + Z_{n3}I_3 + \dots + Z_{nn}I_n$$

Le système d'équation peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$[V] = [Z][I] \quad (1-8)$$

où [V] et [I] représentent les vecteurs tension et courant et [Z] la matrice impédance.

1.2.2.2. Signification des éléments de la matrice

[Z]

a. Impédance d'entrée de l'accès i

Elle est déterminée lorsque l'accès i est excité alors que tous les autres accès soient en circuit-ouvert

$$Z_{ii} = \frac{V_i}{I_i} \Big|_{I_k=0, \forall k \neq i, k \in [1, n]}$$

b. Impédance de transfert de l'accès i vers l'accès j


Elle est déterminée lorsque le j^{ème} accès est excité et que l'on mesure la tension du i^{ème} accès quand tous les autres accès sont en circuit-ouvert.

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j} \Big|_{I_k=0, \forall k \neq j, k \in [1, n]}$$

c. Impédance d'entrée d'un quadripôle chargé par une impédance Z_L

Elle est définie par rapport à un plan de référence et est donnée par la relation suivante:

~~$Z_{in} = \frac{\text{Det}[Z]}{Z_L + Z_{22}}$~~ ou ~~$\text{Det}[Z] = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$~~

Z_L 

$\begin{cases} V_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 = -Z_L I_2 \end{cases}$

$Z_C = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} - \frac{Z_{12}Z_{21}}{Z_{22} + Z_L}$

$Z_{in} = \frac{\text{Det}[Z] + Z_{11}Z_L}{Z_L + Z_{22}}$ ou $\text{Det}[Z] = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}$

1.2.3. Matrice admittance

Contrairement à la matrice $[Z]$, la matrice $[Y]$ est obtenue en exprimant les courants en fonction des tensions existants aux différents accès.

$I_1 = Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2 + Y_{13}V_3 + \dots + Y_{1n}V_n$

$I_2 = Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2 + Y_{23}V_3 + \dots + Y_{2n}V_n$

$\dots = \dots + \dots + \dots + \dots + \dots$

$I_n = Y_{n1}V_1 + Y_{n2}V_2 + Y_{n3}V_3 + \dots + Y_{nn}V_n$

ce système peut s'écrire:

$[I] = [Y][V] \quad (19)$

1.2.3.2. Signification des éléments de la matrice $[Y]$

a. Admittance d'entrée de l'accès i

Elle est déterminée lorsque l'accès i est excité alors que tous les autres accès soient court-circuités.

$Y_{ii} = \frac{I_i}{V_i} \Big|_{V_k=0, \forall k \neq i, k \in [1, n]}$

b. Admittance de transfert de l'accès i vers l'accès j

Elle est déterminée lorsque le j^{ème} accès est excité et que l'on mesure le courant du i^{ème} accès quand tous les autres accès sont courts circuités.

$$Y_{ij} = \frac{I_i}{V_j} \Big|_{V_k=0} \quad \forall k \neq j, k \in [1, n]$$

c. Admittance d'entrée d'un quadripôle chargé par une admittance Y_e

Elle est donnée par la relation suivante :

$$Y_{in} = \frac{\text{Det}[Y] + Y_{11}Y_e}{Y_e + Y_{22}} \quad \text{ou} \quad \text{Det}[Y] = Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}$$

1.2.4. Relation entre la matrice $[Z]$ et la matrice $[Y]$

Cette relation a partir de la relation (1-8) et de la relation (1-9). Ce qui permet d'écrire :

$$[V] = [Z] \cdot [Y] \cdot [V] \Rightarrow [Z][Y] = [1] \Rightarrow$$

$$[Z] = [Y]^{-1} \quad (1-10)$$

Il est à noter que les éléments Z_{ij} et Y_{ij} ne peuvent être connus que pour les circuits à constantes localisées.

1.2.5 Matrices normalisées

Afin que les éléments des matrices $[Z]$ et $[Y]$ soient indépendants du type de ligne utilisée, il est nécessaire de les normaliser. Les nouvelles matrices normalisées sont obtenues à partir des vecteurs tension et courant normalisés

$$[v] = [\bar{z}][i] \quad (1-11)$$

$$[i] = [\bar{Y}][v]$$

Les éléments des matrices normalisées sont donnés par les relations suivantes:

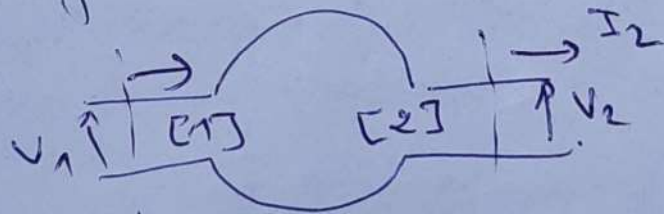
$$\bar{z}_{ij} = \frac{z_{ij}}{\sqrt{z_{ci} \cdot z_{cj}}}$$

$$\bar{Y}_{ij} = \frac{Y_{ij}}{\sqrt{Y_{ci} \cdot Y_{cj}}}$$

Il est important de rappeler que les éléments des matrices $[Z]$ et $[Y]$ sont en général complexes et dépendent de la fréquence. Dans le cas où ils sont purement imaginaires, le multipôle correspond à un sans pertes.

1-2-6. Matrice chaîne $[C]$

Elle est définie en exprimant les grandeurs d'entrée en fonction des grandeurs de sortie.



$$V_1 = C_{11}V_2 + C_{12}I_2$$

$$I_1 = C_{21}V_2 + C_{22}I_2$$

Ce type de matrice est très utilisé lorsque l'on dispose de quadripôles en cascade. Le quadripôle résultant a pour matrice chaîne le produit des matrices chaînes.

1.3. Matrice de répartition [S]

1.3.1 Introduction

En micro-ondes, les constantes R , L , C et G sont réparties le long des supports de propagation (ligne ou guide), ce qui rend impossible la mesure de tension et de courant (il n'existe pas en micro-ondes d'appareils capables de mesurer ces grandeurs). Dans ces conditions, les matrices $[Z]$ et $[Y]$ deviennent inexploitable. Cette contrainte nécessite l'introduction de nouveaux paramètres S pouvant être mesurés directement. Cette mesure se ramène à celle de la puissance, qui est une grandeur facilement mesurable en micro-ondes.

1.3.2 Ondes Courant-Tension incidentes et réfléchies

A partir des expressions normalisées de la tension et du courant (normalisation par rapport à l'impédance caractéristique) données par les relations (1-5), il est possible de définir les ondes Courant-Tension incidentes $a(z)$ et réfléchies $b(z)$.

$$a(z) = A e^{-j\beta z} = \frac{v(z) + i(z)}{2} \quad (1-12)$$

$$b(z) = B e^{j\beta z} = \frac{v(z) - i(z)}{2}$$

Dans ces conditions la relation (1-5) peut s'écrire:

$$\begin{aligned} v(z) &= a(z) + b(z) \\ i(z) &= a(z) - b(z) \end{aligned} \quad (1-13)$$

1.3.3 Puissance Transmise et Coefficient de réflexion

a - Coefficient de réflexion

$$\Gamma(z) = \frac{V^-(z)}{V^+(z)} = \frac{b(z)}{a(z)}$$

b - Puissance totale

Elle est due à la superposition de la puissance incidente $P^+(z)$ et de la puissance réfléchie $P^-(z)$.

$$P(z) = P^+(z) - P^-(z)$$

En exprimant les différentes puissances, il est possible d'exprimer la puissance totale en fonction du coefficient de réflexion $\Gamma(z)$.

$$\left. \begin{aligned} P^+(z) &= \frac{|a(z)|^2}{Z} \\ P^-(z) &= \frac{|b(z)|^2}{Z} \end{aligned} \right\} \rightarrow P(z) = \frac{|a(z)|^2}{Z} (1 - |\Gamma|^2) \quad (1-14)$$

1.3.4 Normalisation de la matrice [S]

Soit un multipôle à n accès constitué de n lignes réelles ou équivalentes. A chaque accès j est défini un plan de référence P_j par rapport auquel est déterminée une tension normalisée v_j et un courant normalisé i_j (dirigé vers la jonction)

$$v_j = a_j + b_j \quad (1-15)$$

$$i_j = a_j - b_j$$

où a_j et b_j représentent l'onde tension-courant incidente (dirigée vers la jonction) et l'onde

tension - courant réfléchi. (dirigée vers l'extérieur de la jonction).

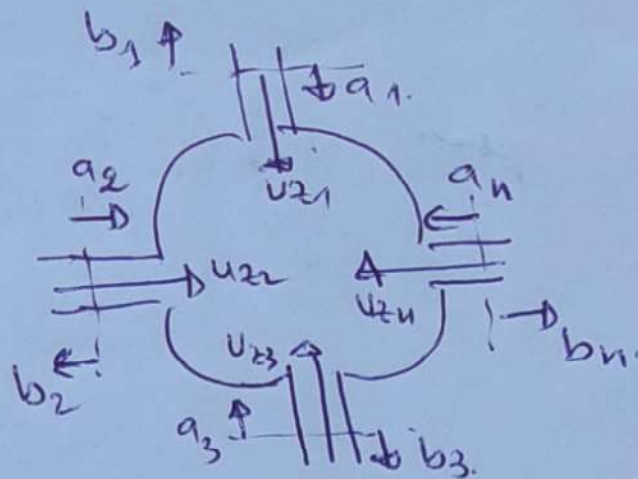


Figure 1.3: Représentation des ondes tension - courant incidentes et réfléchies.

Une onde incidente a_j se propageant dans l'accès j va être d'une part réfléchi par cet accès et d'autre part transmis aux autres accès. L'onde réfléchi b_j est quant à elle le due à la superposition de l'onde réfléchi par l'accès j à laquelle se superposent les ondes réfléchies par les autres accès.

La matrice $[S]$ est obtenue en exprimant chaque onde réfléchi (b_j) en fonction de toutes les ondes incidentes a_j .

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & \dots & S_{2n} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & \dots & S_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{n1} & S_{n2} & S_{n3} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

Les S_{ij} sont toujours définis par rapport à des plans de référence. Le changement de ce plan modifie l'expression (Complex) de ces paramètres.

1.3.5. Signification des paramètres S

1.3.5.1. Éléments S_{jj} de la diagonale

$$b_j = S_{j1} a_1 + S_{j2} a_2 + \dots + S_{jj} a_j + \dots + S_{jn} a_n$$

Si tous les accès, à l'exception de l'accès j , sont adaptés (a_k ≠ 0) nous pouvons écrire :

$$S_{jj} = \frac{b_j}{a_j} \Big|_{a_k=0} \quad \forall k \neq j$$

S_{jj} est le coefficient de réflexion de l'accès j lorsque tous les autres accès sont adaptés

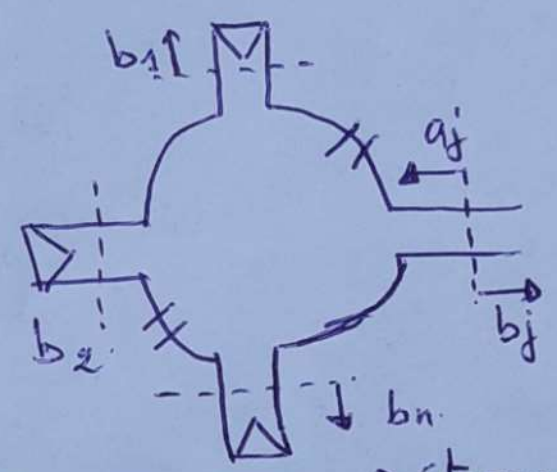


Figure 1.4: Détermination des éléments S_{jj}

- Puissance incidente à l'accès j

$$P_j^+ = \frac{|a_j|^2}{2}$$

- Puissance réfléchi à l'accès j lorsque tous les autres accès sont adaptés.

$$P_j^- = \frac{|b_j|^2}{2} = \frac{|S_{jj}|^2 \cdot |a_j|^2}{2} = P_j^+ |S_{jj}|^2 \Rightarrow$$

$$|S_{jj}|^2 = \frac{P_j^-}{P_j^+}$$

(Coefficient de réflexion en puissance au niveau de l'accès j).

1.3.5.2 Éléments S_{jk}

$$b_j = S_{j1}a_1 + S_{j2}a_2 + \dots + S_{jk}a_k + \dots + S_{jn}a_n.$$

Pour déterminer S_{jk} , il faut adapter tous les accès à l'exception de l'accès k .

$$S_{jk} = \frac{b_j}{a_k} \Big|_{a_j=0} \quad \forall k \neq j$$

S_{jk} est le coefficient de transmission de l'énergie de l'accès k vers l'accès j lorsque seul l'accès k n'est pas adapté.

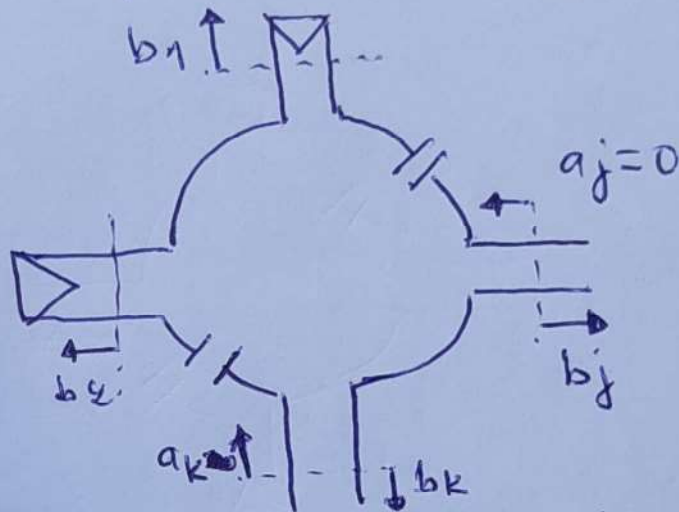


Figure 1.5: Détermination des éléments S_{jk} .

- Puissance incidente à l'accès k

$$P_k^+ = \frac{1}{2} |a_k|^2$$

- Puissance transmise à l'accès j

$$P_j^- = \frac{1}{2} |b_j|^2 = \frac{|S_{jk}|^2 \cdot |a_k|^2}{2} = P_k^+ \cdot |S_{jk}|^2 \Rightarrow$$

$$|S_{jk}|^2 = \frac{P_j^-}{P_k^+}$$

(S_{jk} Coefficient de réflexion en puissance au niveau de l'accès j).

1.4. Propriétés générales de la matrice S

1.4.1. Changement de plan de référence.

1.4.1.1. Introduction

La matrice $[S]$ d'un multipôle quelconque est déterminée par rapport à un ensemble de plans de référence (P_1, P_2, \dots, P_n) . Ces plans, choisis arbitrairement, constituent les origines des axes de propagation z_j qui sont tous, par convention, dirigés vers la jonction.

Soit l'accès j auquel on fait subir à son plan de référence P_j un déplacement L_j vers la jonction.

$L_j > 0$ si le plan P_j se rapproche de la jonction.

$L_j < 0$ si le plan P_j s'éloigne de la jonction.

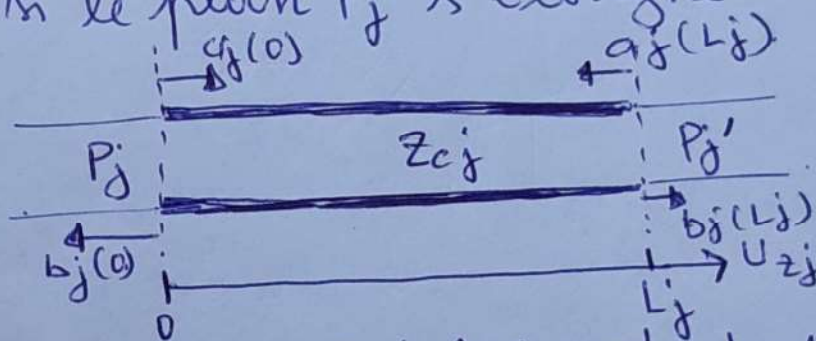


Figure 1.6 : Déplacement du plan de référence le long d'une ligne (réelle ou équivalente).

Le long d'une ligne sans pertes, les ondes tension-courant incidente et réfléchie en un point z quelconque s'écrivent :

$$a(z) = A e^{-j\beta z}$$

$$b(z) = B e^{+j\beta z}$$

Écrivons l'expression des ondes au niveau du plan initial P_j ($z_j = 0$) et du plan final P_j' ($z_j = L$) :

• Plan initial (P_j):

$$a_j(0) = A$$

$$b_j(0) = B$$

• Plan final (P_j'):

$$a_j(L) = A e^{-j\beta_j L} = a_j(0) e^{-j\beta_j L}$$

$$b_j(L) = B e^{+j\beta_j L} = b_j(0) e^{+j\beta_j L}$$

β_j et L_j représentent respectivement la constante de phase de l'onde, dans la ligne j et le déplacement, du plan de référence associé à l'accès j .

Posant pour simplifier l'écriture :

$$\left. \begin{array}{l} a_j(0) = a_j \\ b_j(0) = b_j \\ a_j(L) = a_j' \\ b_j(L) = b_j' \\ \beta_j L_j = \theta_j \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} a_j' = a_j e^{-j\theta_j} \\ b_j' = b_j e^{+j\theta_j} \end{cases}$$

Remarque:

Si les accès du multipôle sont constitués de lignes sans pertes, le changement des plans de référence n'affecte ~~pas~~ que la phase des paramètres S , leurs modules restent inchangés.

1.4.1.2 Matrice translation [T]

Pour un multipôle à n accès, en opérant de la même manière que précédemment, le double système suivant est obtenu:

$$\begin{aligned} a_1 &= a'_1 e^{+j\theta_1} \\ a_2 &= a'_2 e^{+j\theta_2} \\ a_3 &= a'_3 e^{+j\theta_3} \\ &\dots \\ a_n &= a'_n e^{+j\theta_n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_1 &= b'_1 e^{-j\theta_1} \\ b_2 &= b'_2 e^{-j\theta_2} \\ b_3 &= b'_3 e^{-j\theta_3} \\ &\dots \\ b_n &= b'_n e^{-j\theta_n} \end{aligned}$$

ce qui peut être écrit :

$$[a] = [T][a'] \quad (1-17)$$

$$[b] = [T]^{-1}[b']$$

Où $[T]$ est une matrice diagonale relative au changement de plans de référence.

$$[T] = \begin{bmatrix} e^{j\theta_1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{j\theta_2} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{j\theta_{n-1}} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{j\theta_n} \end{bmatrix} \quad (1-18)$$

Les éléments de cette matrice s'écrivent :

$$T_{kl} = \delta_{kl} e^{j\theta_k} \quad \text{où} \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

1.4.1.3 Détermination de la nouvelle matrice $[S']$

$$[b] = [S] \cdot [a] \Leftrightarrow [T]^{-1}[b'] = [S] \cdot [T][a'] \Rightarrow$$

$$[b'] = [T][S][T] \cdot [a']$$

Dans ces conditions, la nouvelle matrice $[S']$, définie par rapport aux nouveaux plans de références, s'écrit :

$$[S'] = [T][S][T] \quad (1-19)$$

Les éléments de la nouvelle matrice s'écrivent:

$$S'_{ke} = \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^n T_{km} \cdot S_{mr} \cdot T_{re} = \sum_{m=1}^n \sum_{r=1}^n (S_{km} e^{j\theta_k}) S_{mr} (S_{re} e^{j\theta_e})$$

En développant cette égalité nous obtenons les expressions des éléments, de la nouvelle matrice $[S']$ qui sont, donnés par:

$$S'_{ke} = S_{ke} e^{j(\theta_k + \theta_e)} \quad (1-20).$$

Il faut rappeler, que le signe de θ_k et de θ_e dépend du sens de déplacement des plans de référence.

Les paramètres S étant complexes, ils peuvent s'écrire:

$$S_{ke} = |S_{ke}| e^{j\phi_{ke}} \quad (1-21)$$

Où ϕ_{ke} est la phase du coefficient S_{ke} (avant le déplacement des plans de références).

Dans ces conditions, la relation (1-20) devient:

$$S'_{ke} = |S_{ke}| e^{j(\phi_{ke} + \theta_k + \theta_e)} \quad (1-22)$$

Cette relation montre, que le déplacement des plans de référence n'affecte que la phase des paramètres S .

En pratique, les nouveaux plans sont choisis de telle sorte que les paramètres S deviennent réels, c'est à dire que:

$$\phi_{ke} + \theta_k + \theta_e = \pm n\pi$$

1.4.2 Matrice $[S]$ d'un multipôle réciproque.

un multipôle qui contient des matériaux isotropes est réci-proque. Cette propriété se traduit par l'égalité suivante:

$$S_{ke} = S_{ek} \quad (1-23)$$

Ce qui signifie que la matrice S est symétrique.

$$[S] = [S]^t \quad (1-24)$$

Remarque:

La symétrie de la matrice $[S]$ n'implique aucune-ment la symétrie géométrique du multipôle.

1.4.3 Matrice $[S]$ d'un multipôle sans pertes.

En absence de pertes (par rayonnement ou par absorption), la puissance totale injectée dans le multipôle doit être égale à la puissance totale sortant du multipôle.

- Puissance injectée à l'accès j

$$P_j^+ = \frac{|a_j|^2}{Z} = \frac{|A_j|^2}{Z}$$

- Puissance réfléchi au niveau de l'accès j

$$P_j^- = \frac{|b_j|^2}{Z} = \frac{|B_j|^2}{Z}$$

de multipôle étant sans pertes, alors:

$$\sum_{j=1}^n P_j^+ = \sum_{j=1}^n P_j^- \Rightarrow \sum_{j=1}^n |a_j|^2 = \sum_{j=1}^n |b_j|^2$$

$$\text{où: } |a_j|^2 = a_j \cdot a_j^* ; \quad |b_j|^2 = b_j \cdot b_j^*$$

En introduisant les vecteurs $[a]$ et $[b]$, les équations ci-dessus deviennent:

$$[a]^t [a^*] = [b]^t [b^*] = ([S][a])^t ([S][a])^* \\ = [a]^t [S]^t [S^*] [a^*]$$

Enfinement pour un multipôle sans pertes, la relation matricielle suivante peut être écrite :

$$[S]^t [S^*] = [1] \quad (1-25) \\ [S^*]^t [S] = [1]$$

Ces relations nous permettent de dire que la matrice $[S]$ d'un multipôle sans pertes est unitaire. La relation entre les différents paramètres est donnée par :

$$\sum_{p=1}^n S_{pj}^* S_{pk} = \delta_{jk} \quad (1-26)$$

1.4.4 Matrice $[S]$ d'un multipôle réci-proque sous pertes

En tenant compte des relations (1-24) et (1-25) on peut montrer que :

$$[S] \cdot [S]^* = [S]^* \cdot [S] = [1] \quad (1-27)$$

1.4.5 Relation entre la matrice $[S]$ et les matrices $[Z]$ et $[Y]$ normalisées

Le passage de la matrice $[S]$ normalisée aux matrices normalisées $[Z]$ et $[Y]$ est donnée par les relations suivantes :

$$[Z] = ([1] + [S]) ([1] - [S])^{-1} \quad (1-28)$$

$$[Y] = ([1] - [S]) ([1] + [S])^{-1}$$

La transformation inverse donne :

$$[S] = ([Z] + [1])^{-1} ([Z] - [1]) \quad (1-29)$$

$$[S] = ([1] + [Y])^{-1} ([1] - [Y])$$