

UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Les Fondements de la théorie des graphes

Chapitre 1: Concepts de base

Dr. SAID KADRI

Maître de Conférence

Department d'informatique, Faculté des Mathématiques et de l'Informatique, Université

Mohamed Boudiaf de M'sila

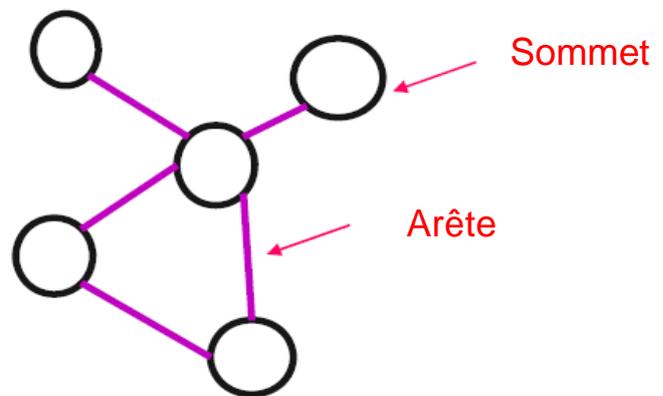
E-mail: kadri.said28@gmail.com

Website: <https://kadrisaid28.wixsite.com/sgadri>

2017 - 2018

Définition d'un Graphe

- Un Graphe est une collection de sommets connectés par des arêtes ou des arcs.
- On appelle un graphe le couple $G(X, U)$ tel que:
 - $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ est l'ensemble des sommets du graphe.
 - $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ est l'ensemble des arcs du graphe
 - $U \subset X \times X$

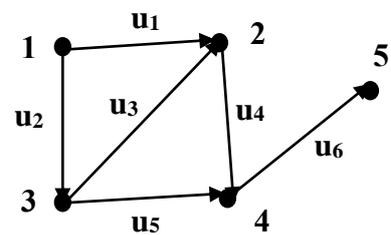


- **Le terme réseau:** est utilisé pour désigner des systèmes réels (réseau routier, Réseau électrique, réseau informatique, etc).
- **Le terme Graphe:** est utilisé pour désigner une représentation mathématique d'un réseau.

Mais, généralement: “Réseau” \equiv “Graphe”

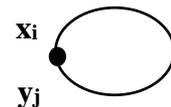
Propriétés d'un graphe:

- $n=|X|$ est appelé l'ordre du graphe G .
- $m=|U|$ est la taille du graphe (nb.arcs)
- un sommet x_i est représenté par un point.
- Un arc $U=(x_i, x_j) \in X \times X$ est représenté par une flèche ou un segment de droite (selon le type du graphe orienté/non orienté)



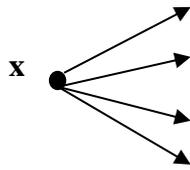
$$n=|X|=5 \quad m=|U|=6$$

- Si $x_i=x_j \implies u=(x_i, x_j)$ est représenté par une boucle (c.à.d les deux sommets sont confondus).

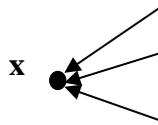


- Le 1/2 degré extérieur du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale ou le nombre d'arcs sortants de x .
On note $d^+(x)$.
- Le 1/2 degré intérieur du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité terminale ou le nombre d'arcs entrants dans x et
On note $d^-(x)$.

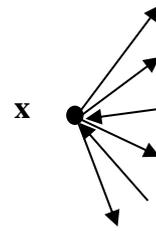
- Le degré du sommet x est le nombre d'arcs dont x est l'extrémité initiale ou terminale et on note $d(x) = d^+(x) + d^-(x)$.



$$d^+(x) = 4$$



$$d^-(x) = 3$$



$$d(x) = d^+(x) + d^-(x) = 7$$

- Si $(x, y) \in U$, alors x est dit prédécesseur de y , y est le successeur de x .



- $\Gamma^+(x)$: l'ensemble des successeurs de x .
- $\Gamma^-(x)$: l'ensemble des prédécesseurs de x .
- Un sommet source s est un sommet qui ne possède aucun prédécesseur ($\Gamma^-(s) = \emptyset$ / il y a seulement des arcs sortants).
- Un sommet puits p est un sommet qui ne possède aucun successeur ($\Gamma^+(p) = \emptyset$ / il y a seulement des arcs entrants).
- Un sommet isolé x est un sommet qui ne possède aucun voisin (ni prédécesseur ni successeur) ($\Gamma^+(x) = \Gamma^-(x) = \emptyset$). Alors il s'agit ici d'un sommet source et puits en même temps, il est aussi appelé un sommet inaccessible.



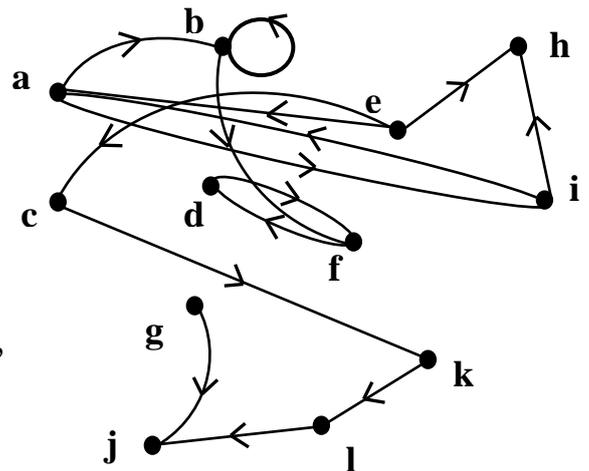
Exemple:

$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$

$U = \{(a, b), (a, i), (b, f), (f, d), (d, f),$

$(e, a), (e, h), (k, l), (e, c), (c, k), (b, b),$

$(g, j), (l, j)\}$



$\Gamma^+(f) = \{d\}$, $\Gamma^+(d) = \{f\}$, $\Gamma^+(b) = \{f, b\}$,

$\Gamma^+(j) = \emptyset$, $\Gamma^+(e) = \{a, h, c\}$, $\Gamma^-(f) = \{b, d\}$,

$\Gamma^-(e) = \emptyset$, $\Gamma^-(a) = \{i, e\}$

Exemples de graphes:

- Graphe représentant un réseau routier, où les sommets représentent les intersections et les arcs représentent les routes.
- Réseau de distribution de l'eau potable AEP dans une ville.
- Réseau informatique au niveau d'une entreprise.
- Le réseau international d'information Internet.

Graphe orienté et graphe non orienté

Graphe non orienté

Lignes: non orientées (*symétriques*)

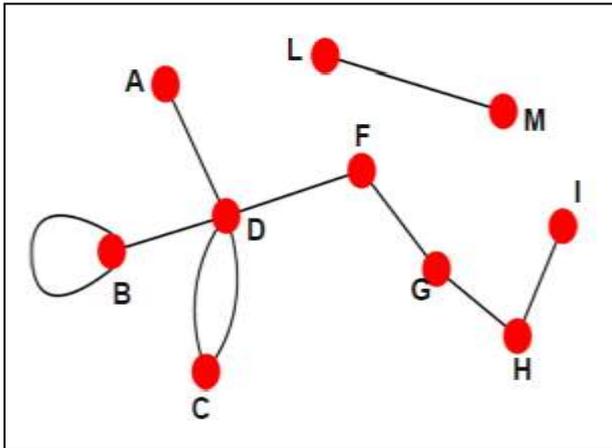
→ arêtes

Graphe orienté

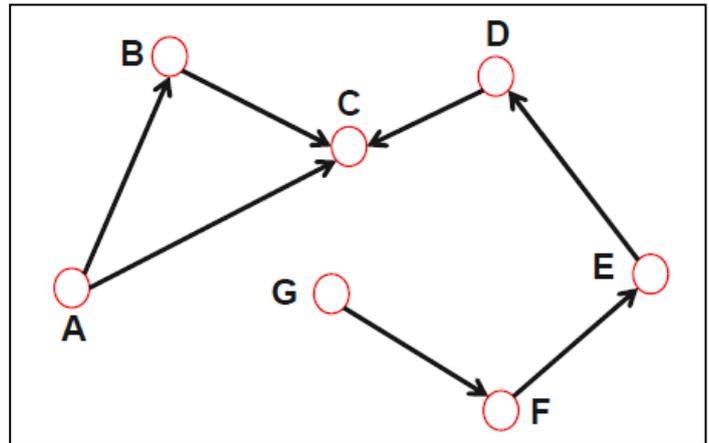
Lignes: orientées

→ arcs

Graphe non orienté



Di-graphe = graphe orienté



Définition d'un graphe valué

Un graphe valué est un graphe $G(X, U, C)$ tel qu'on associe au graphe $G(X, U)$ une fonction F définie comme suit:

$$F: U \longrightarrow \mathbb{R}$$

$F(u) = c$ est appelé le poids de l'arc u , et on note $c(x, y)$ ou $c(u)$

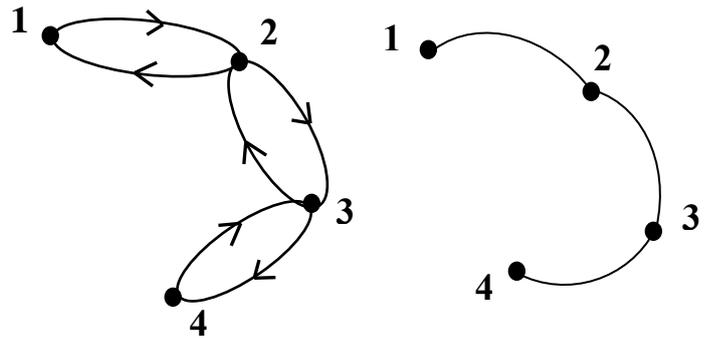
Avec:

- $c(x, y)$: longueur du tronçon de route (x, y) .
- Capacité du tronçon de route (x, y) .
- Débit d'une conduite d'eau potable.
- Prix de déplacement entre les villes x, y .

Types de graphes

1. Graphe symétrique

Un graphe $G(X, U)$ est dit symétrique si $\forall x, y \in X$, si $(x, y) \in U$
 $\implies (y, x) \in U$

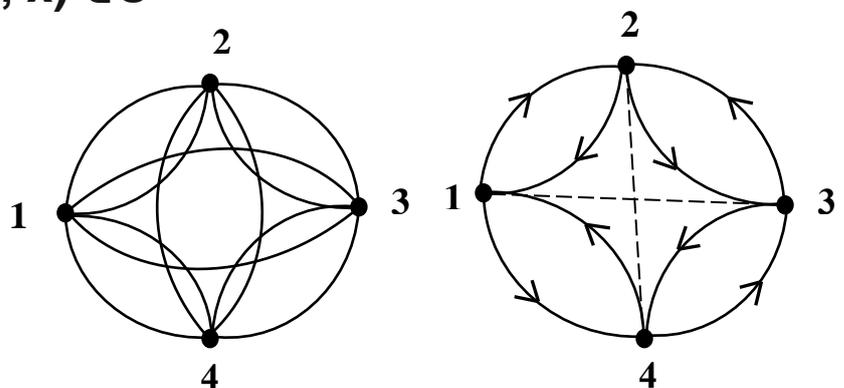


Un graphe symétrique est représenté généralement sans orientation des arcs. On parle des arêtes au lieu des arcs

2. Graphe complet

Un graphe $G(X, U)$ est dit complet si seulement si:

$\forall x, y \in X, (x, y) \in U$ et $(y, x) \in U$



Graphe complet

Graphe non complet

3. Graphe simple

Un graphe $G(X, U)$ est dit simple si seulement si:

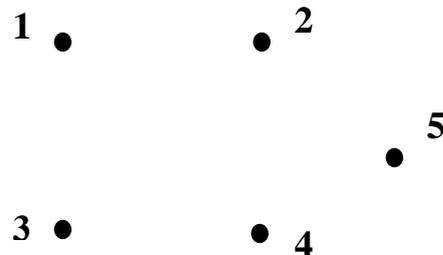
- Ne contient aucune boucle.
- $\forall x, y \in X, \exists$ au plus $u=(x, y) \in U$

4. Graphe vide

Un graphe $G(X, U)$ est dit vide s'il n'y a aucun sommet ni arc ou arête. ($X=\emptyset, U=\emptyset$).

5. Graphe trivial

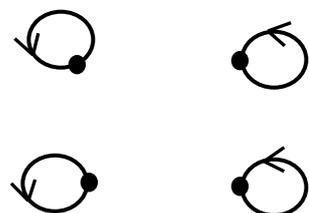
Un graphe $G(X, U)$ est dit trivial s'il y a des sommets, mais il n'y a aucun arc ou arête. ($U=\emptyset$).



6. Graphe réflexif

Un graphe $G(X, U)$ est dit réflexif, s'il existe une boucle en chaque sommet x de G .

- $\forall x \in X \implies (x, x) \in U$



7. Graphe anti-symétrique

Un graphe $G(X, U)$ est dit anti-symétrique si:

- $\forall x, y \in X, \text{ si } (x, y) \in U \implies (y, x) \notin U$

8. Graphe transitif

Un graphe $G(X, U)$ est dit transitif si:

- $\forall x, y, z \in X, \text{ si } (x, y) \in U \text{ et } (y, z) \in U \implies (x, z) \in U$

9. Inverse d'un graphe

L'inverse d'un graphe $G(X, U)$ est le graphe $G'(X, U')$ déduit de G en inversant le sens de ses arcs.

OBS: l'inverse de G' est G lui même.

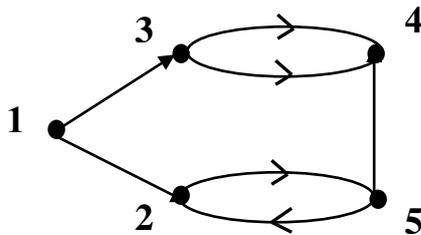
10. Graphe complémentaire

Le graphe complémentaire du graphe $G(X, U)$ est le graphe $G^*(X, U^*)$ tel que:

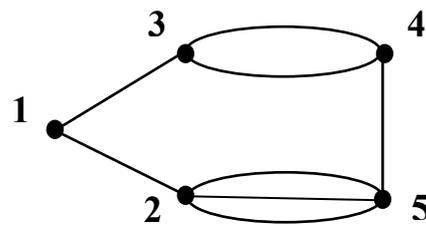
$$(x, y) \in U \implies (x, y) \notin U^*$$

11. Multigraphe

si G est un graphe orienté, x et y deux sommets de ce graphe, si x et y sont liés par deux arcs u_1, u_2 de même sens, G est dit multigraphe et l'arc (x, y) est dit un arc multiple.



un graphe multiple orienté



un graphe multiple non orienté

- $(3, 4)$ un arc multiple
- $(2, 5)$ un arc symétrique

12. Le graphe biparti (bipartite graph)

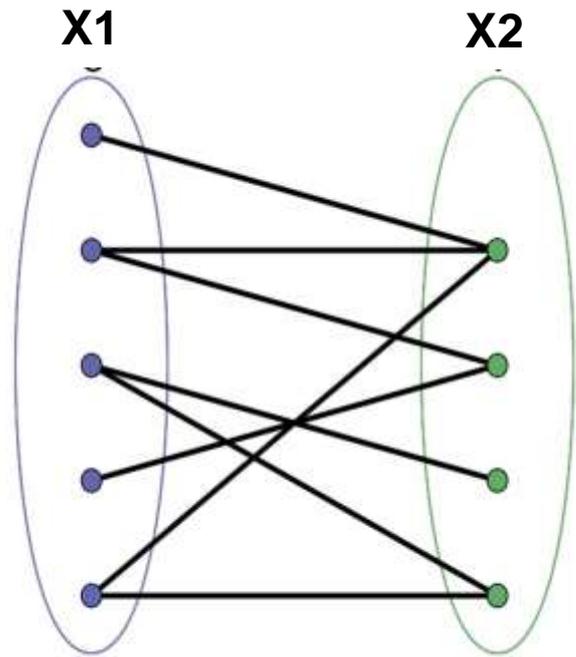
Un graphe biparti (ou un bi-graphe) est un graphe dont l'ensemble des ses sommets peuvent être divisé en deux sous-ensembles disjoints de sommets X_1 et X_2 tels que deux sommets du même sous-ensemble ne soient pas adjacents (c.à.d tout arc de G a une extrémité dans X_1 et l'autre dans X_2).

Et on note:

$G(X, U)$ avec: $X = X_1 \cup X_2$ et $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

Et si $u = (x_1, x_2)$ et $x_1 \in X_1 \implies x_2 \in X_2$

$x_1 \in X_2 \implies x_2 \in X_1$

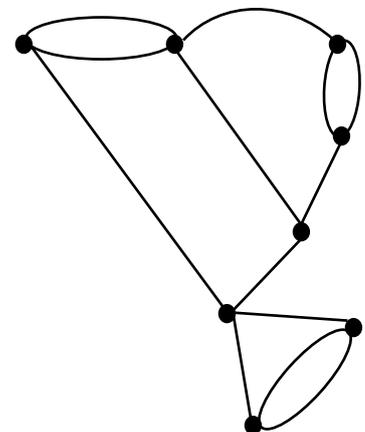
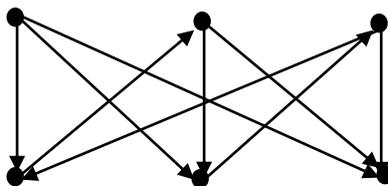
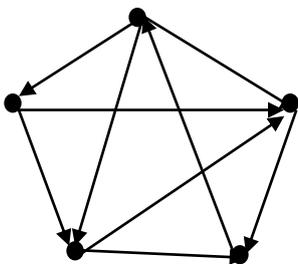


13. Graphe planaire

Un graphe G est dit planaire s'il est possible de le tracer dans le plan de façon que deux arcs quelconques ne se croisent pas sauf en leurs extrémités.

On appelle représentation planaire ce trace dans le plan.

Exemple:



G1, G2: deux graphes non planaires

G3 un graphe planaire

14. Graphes isomorphes

Deux graphes $G(X, U)$, $G'(X', U')$ sont dits isomorphes s'il existe une bijection f :

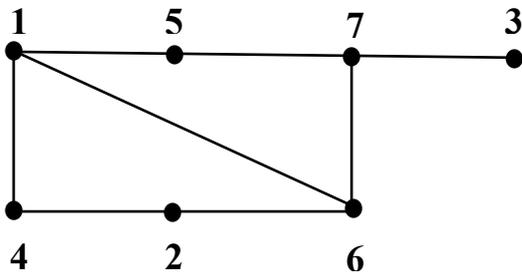
$$f: X \longrightarrow X'$$

Telle que: $(x, y) \in U \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in U'$

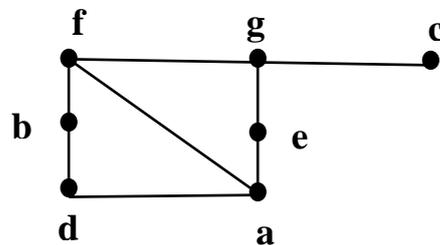
c.à.d si les deux sommets x, y sont liés par un arc dans $G \implies$ l'image de x et l'image de y par f sont aussi liées par un arc dans G' .

Exemple 1:

Soient les deux graphes G, H définis comme suit:



(G)



(G')

Et soit une bijection f définie comme suit:

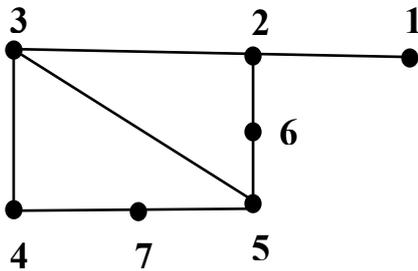
$$f: \{1, 2, \dots, 7\} \longrightarrow \{a, b, \dots, g\}$$

Avec: $f(1)=a, f(2)=b, \dots, f(7)=g$

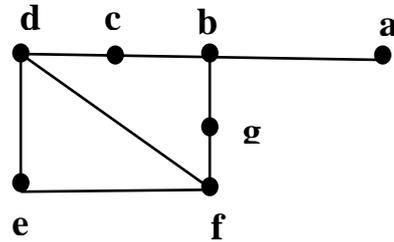
G et G' sont isomorphes.

Exemple 2:

Soient les deux graphes G, H définis comme suit:



(G)



(H)

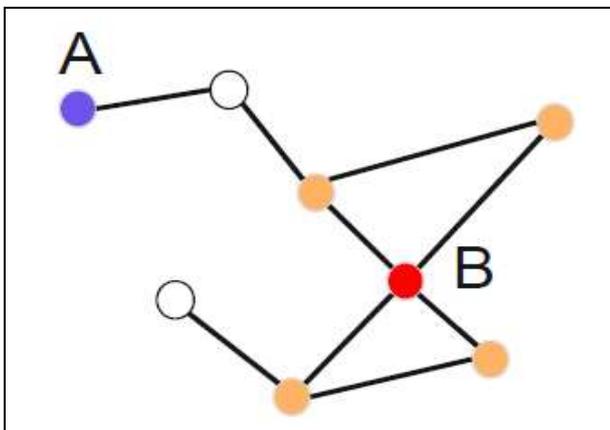
(G), (H) deux graphes non orientés et non isomorphes.

Car $(3, 5) \in U \implies (f(3), f(5)) = (c, e) \notin U'$

Degré d'un sommet

Graphe non orienté

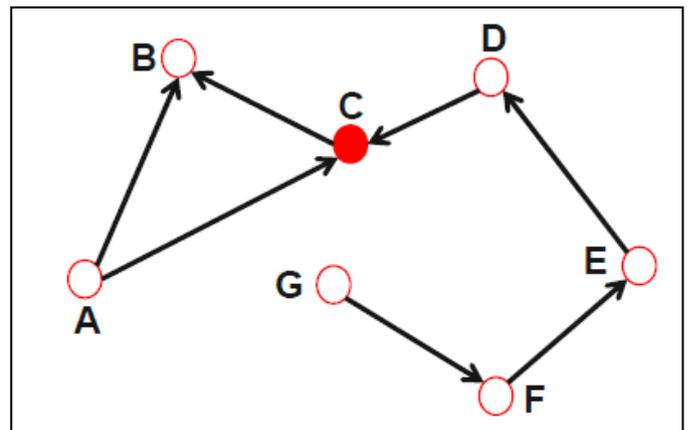
Degré: le nombre des arêtes qui relient les sommets.



Graphe orienté

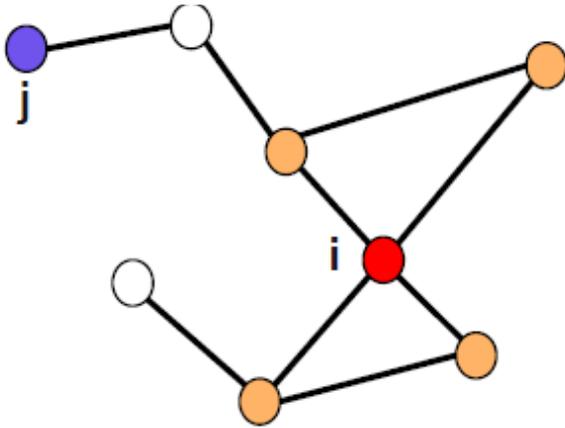
dans un graphe orienté, on définit **des degrés intérieurs** **des degrés extérieurs**.

Le degré total d'un sommet est la somme du degré intérieur et le degré extérieur.

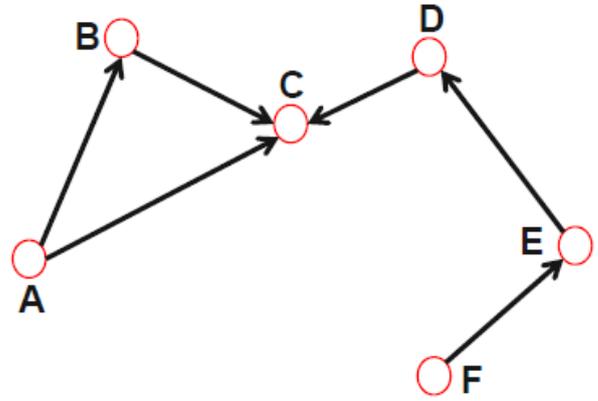


Degré moyen

Graphe non orienté



Graphe orienté



$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N} \quad \langle k^{in} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{in}, \quad \langle k^{out} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i^{out}, \quad \langle k^{in} \rangle = \langle k^{out} \rangle$$

N: le nombre de sommets dans le graphe.

L: le nombre d'(arcs/arêtes) dans le graphe

Definition d'un chemin

On appelle un chemin de $G(X, U)$ la suite de sommets

a_1, a_2, \dots, a_p (sans coupure) tel que:

- $(a_i, a_{i+1}) \in U$ avec $i=1, 2, \dots, p-1$.
- a_1 est l'extrémité initiale du chemin
- a_p est l'extrémité terminale du chemin.

Definition d'un chemin simple

a_1, a_2, \dots, a_p est un chemin simple tel que:

$\forall i \neq j, (a_i, a_{i+1}) \neq (a_j, a_{j+1})$ (c.à.d un arc est pris une seule fois).

Definition d'un chemin élémentaire

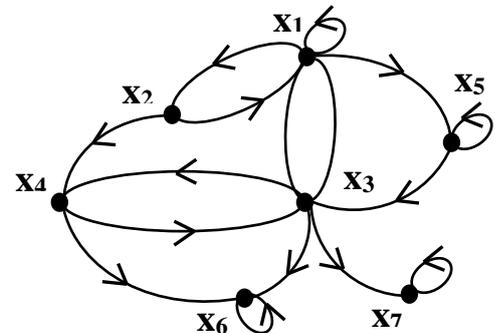
est un chemin qui ne prend les sommets qu'une seule fois.

Exemples:

$X_2X_1X_5X_3X_1X_5X_5X_3X_6$ chemin qui n'est pas simple, ni élémentaire.

$X_2X_1X_5X_3X_1X_2X_4$ chemin simple non élémentaire

$X_1X_2X_4X_3X_6$ chemin élémentaire



Remarque

Si $a_1a_2a_3 \dots a_p$ est un chemin

- a_1 est un ascendant de a_p
- a_p est un descendant de a_1

Definition d'un circuit

Un circuit est un chemin $a_1a_2a_3 \dots a_p$ tel que: $a_1=a_p$

c.à.d les deux extrémités initiale et terminale sont confondues (un chemin fermé).

Observations

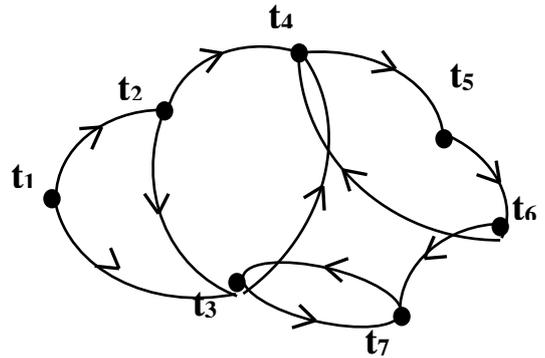
- De la même façon on peut définir un circuit simple, un circuit élémentaire.
- La notion du chemin circuit met en considération le sens des arcs du graphe.
- Un circuit simple est un chemin fermé qui ne prend les arcs qu'une seule fois.
- Un circuit élémentaire est un chemin fermé qui ne prend les sommets qu'une seule fois.

Chemins et circuits particuliers

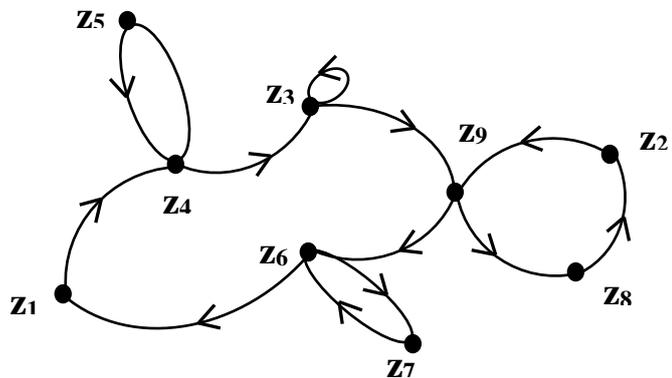
1. **Un chemin hamiltonien** : est un chemin élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.
2. **Un chemin eulerien** : est un chemin simple qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.
3. **Un circuit hamiltonien** : est un circuit élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.
4. **Un circuit eulerien** : est un chemin simple et fermé qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.

Exemples:

$t_1 t_2 t_3 t_4 t_5 t_6 t_7$ est un chemin hamiltonien



$Z_1 Z_4 Z_5 Z_4 Z_3 Z_3 Z_9 Z_8 Z_2 Z_9 Z_6 Z_7 Z_6 Z_1$ est un circuit eulerien



Définition d'une chaîne

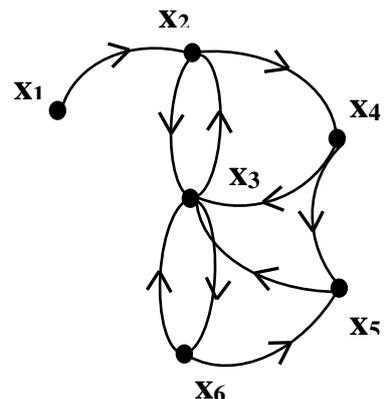
Une chaîne d'un graphe non orienté (ou orienté mais l'orientation n'est pas prise en considération) $G(X, U)$ est une suite de sommets a_1, a_2, \dots, a_p (sans coupure) tel que:

$(a_i, a_{i+1}) \in U$ ou $(a_{i+1}, a_i) \in U$ avec $i=1, 2, \dots, p-1$.

Exemple:

$X_1 X_2 X_4 X_3 X_6 X_5 X_3 X_2$ est une chaîne

$X_1 X_2 X_5$ n'est pas une chaîne



Définition d'une chaîne simple

C'est une chaîne où les (arcs/arêtes) sont pris(es) une seule fois.

Exemple:

$x_1x_2x_3x_2x_4x_3x_5x_6x_3$ est une chaîne simple.

Définition d'une chaîne élémentaire

C'est une chaîne dont tous les sommets du graphe sont pris une seule fois.

Exemple:

$x_1x_2x_4x_3x_6$ est une chaîne élémentaire.

Définition d'un cycle

Un cycle est une chaîne $a_1a_2a_3 \dots a_p$, tel que: $a_1=a_p$

c.à.d l'extrémité initiale et l'extrémité terminale sont confondues

Exemple:

$x_2x_4x_3x_6x_5x_3x_2$ est un cycle.

Observations

- De la même façon on peut définir un cycle simple, un cycle élémentaire.
- Dans la définition d'une chaîne ou d'un cycle l'orientation du graphe n'est pas importante.

Chaînes et cycles particuliers

1. **Une chaîne hamiltonienne** : est une chaîne élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.
2. **Une chaîne eulerienne** : est un chaîne qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.
3. **Un cycle hamiltonien** : est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe.
4. **Un cycle eulerien** : est une chaîne simple et fermée qui passe par tous les arcs du graphe une et une seule fois.

Définition d'un sous graphe

Soit $G(X, U)$ un graphe

$G'(X', U')$ est un sous graphe de G si $X' \subset X$

$U' = \{u \in U / \text{les deux extrémités de } u \text{ appartiennent à } X'\}$

(c.à.d, on supprime des sommets et des arcs)

Définition d'un graphe partiel

Soit $G(X, U)$ un graphe, on appelle graphe partiel de G , le graphe $G'(X', U')$ tel que: $X' = X$, $U' \subset U$

(c'est un graphe ayant le même ensemble X de sommets, mais un ensemble différent des arcs $U' \subset U$).

Définition d'un sous graphe partiel

Soit $G(X, U)$ un graphe, on appelle sous graphe partiel de G , un graphe partiel d'un sous graphe de G .

(c.à.d on supprime des sommets et des arcs)

Exemple:

Soit le graphe $G(X, U)$ avec:

$X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$; $U = \{(a, b), (a, c), (c, d), (b, f), (f, g),$
 $(e, a), (e, f), (e, d), (f, d)\}$

1. $G'(X', U')$ est un **sous graphe** (Fig 1)

$X' = \{a, e, f, d\}$; $U' = \{(e, a), (e, f), (d, e), (f, d)\}$

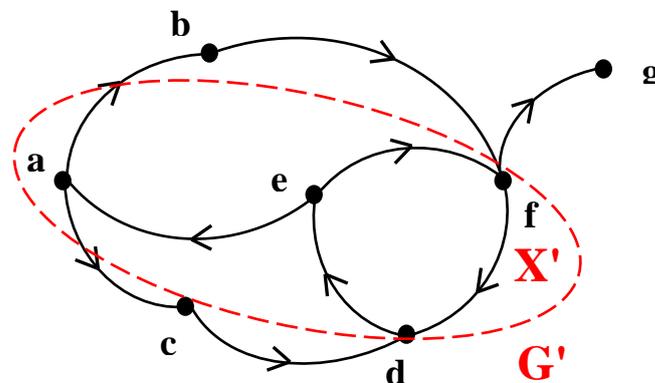


Fig 1

2. $G''(X, U'')$ est un **graphe partiel** (Fig 2)

$$U'' = \{(a, b), (a, c), (c, d), (d, e), (e, f), (f, d)\}$$

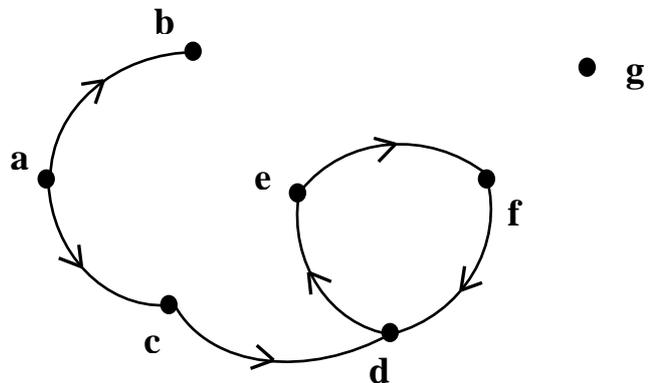


Fig 2

3. $G'''(X', U''')$ est un **sous graphe partiel** (Fig 3)

$$X' = \{a, e, f, d\} ; U''' = \{(a, e), (e, f), (f, d)\}$$

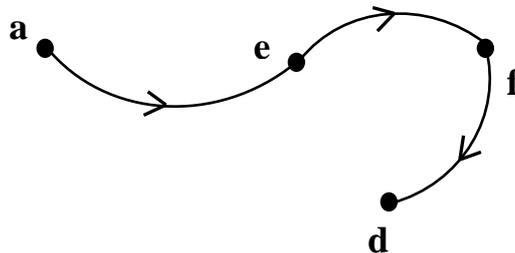


Fig 3

Exemple pratique:

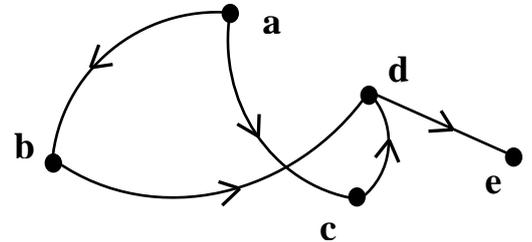
Pour un réseau routier d'un pays

1. L'ensemble des routes d'une wilaya est un sous graphe du réseau routier.
2. L'ensemble des routes nationales est un graphe partiel du réseau routier.
3. L'ensemble des routes nationales d'une wilaya est un sous graphe partiel du réseau routier.

Définition d'un graphe connexe

Un graphe $G(X, U)$ est dit connexe si:

- $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne entre x et y (le sens des arcs n'est pas important)



Un graphe connexe; mais n'est pas
fortement connexe

Définition d'une composante connexe

Est un sous graphe connexe et maximal pour cette propriété. C.à.d, si on ajoute un sommet à cette composante on détruit la connexité.

OBS: si G est un graphe connexe, il constitue lui même la seule composante connexe.

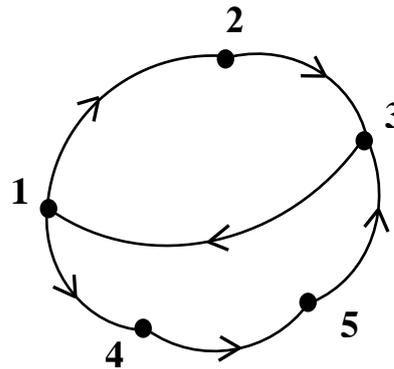
Définition d'un graphe fortement connexe

Un graphe $G(X, U)$ est dit fortement connexe si:

$\forall x, y \in X$, il existe un chemin de x vers y et un autre de y vers x

Exemple:

- (1, 2) \exists un chemin (1, 2)
- (2, 1) \exists un chemin (2, 3), (3, 1)
- (2, 3) \exists un chemin (2, 3)
- (3, 2) \exists un chemin (3, 1), (1, 2)
- (3, 1) \exists un chemin (3, 1)
- (1, 3) \exists un chemin (1, 2), (2, 3)
- (1, 4), (4, 5), (5, 3)
- (3, 4) \exists un chemin (3, 1), (1, 4)
- (4, 3) \exists un chemin (4, 5), (5, 3)
- (4, 5) \exists un chemin (4, 5)
- (5, 4) \exists un chemin (5, 3), (3, 1), (1, 4)
- (5, 3) \exists un chemin (5, 3)
- (3, 5) \exists un chemin (3, 1), (1, 4), (4, 5)
- (1, 4) \exists un chemin (1, 4)
- (4, 1) \exists un chemin (4, 5), (5, 3), (3, 1)
- (1, 5) \exists un chemin (1, 4), (4, 5)
- (5, 1) \exists un chemin (5, 3), (3, 1)
- (2, 4) \exists un chemin (2, 3), (3, 1), (1, 4)
- (4, 2) \exists un chemin (4, 5), (5, 3), (3, 1), (1, 2)
- (2, 5) \exists un chemin (2, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 5)
- (5, 2) \exists un chemin (5, 3), (3, 1), (1, 2)



G est fortement connexe

On constate que $\forall x, y \in X$ On peut trouver un chemin de x vers y et un autre de y vers x \implies le graphe $G(X, U)$ est un graphe fortement connexe.

Définition d'une composante fortement connexe

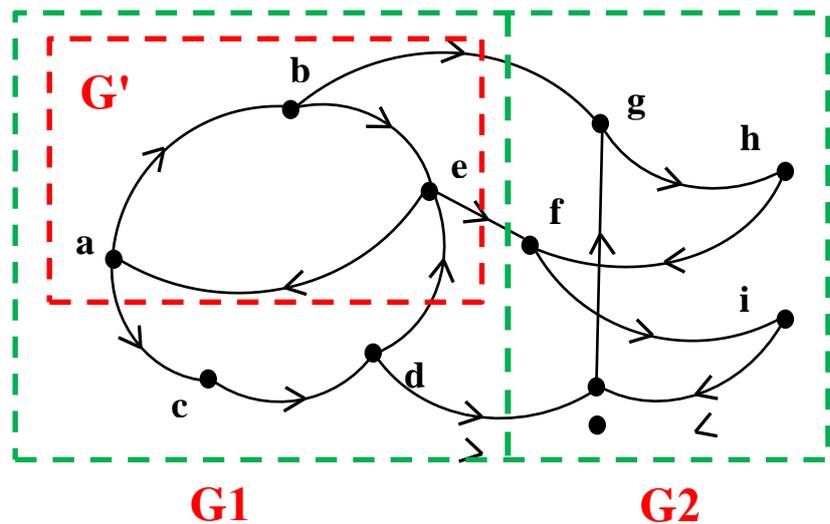
On appelle une composante fortement connexe d'un graphe $G(X, U)$ un sous graphe $G'(X', U')$ fortement connexe.

Exemple:

Soit le graphe $G(X, U)$ suivant tel que:

$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$U = \{(a, c), (c, d), (d, e), (e, f), (d, j), (b, g), (g, h), (h, f), (f, i), (i, j), (j, g)\}$



$G(X, U)$ n'est pas fortement connexe.

$G'(X', U')$ est un sous graphe de G .

$X' = \{a, b, e\}$; $U' = \{(a, b), (b, e), (e, a)\}$

G' représente une composante fortement connexe (non maximale)

$G_1(X_1, U_1)$, $G_2(X_2, U_2)$ sont deux composantes fortement connexes maximales.

Observations:

$G(X, U)$ un graphe, si $\forall x, y \in X$, il existe une chaîne entre x et y on dit que $G(X, U)$ est simplement connexe.

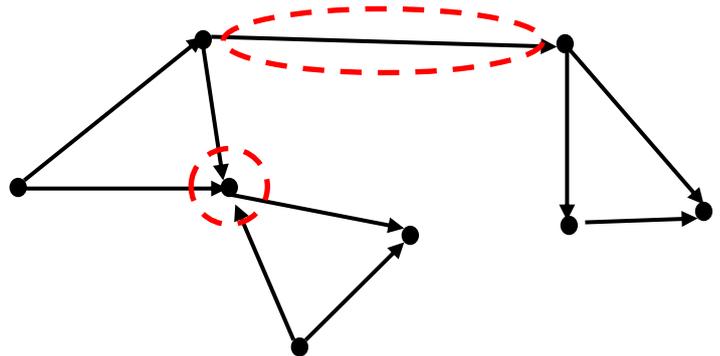
$G(X, U)$ un graphe connexe, si après l'élimination de plus de k arêtes, G devient non connexe on dit que G est k -arêtes connexe.

Définition d'un point d'articulation:

Un point d'articulation d'un graphe G est un sommet dont la suppression augmente le nombre de composantes connexes.

Définition d'un isthme :

Est un arc dont la suppression augmente le nombre de CC.



Algorithme de recherche d'une composante simplement connexe CSC d'un sommet S

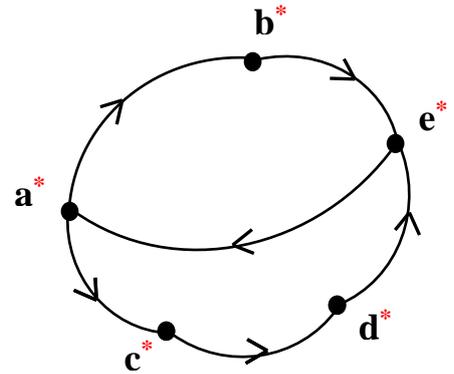
Soit $G(X, U)$ un graphe

- (1) Marquer le sommet S (par $*$)
- (2) Marquer tout sommet adjacent (suivant/précédent) à un sommet déjà marqué
- (3) Répéter (2) jusqu'à ce que l'on ne puisse plus marquer aucun sommet.
- (4) Les sommets marqués par ($*$) forment la composante simplement connexe de S

Exemple:

Soit $G(X, U)$ un graphe avec:

$X = \{a, b, c, d, e\}$



$U = \{(a, b), (a, c), (b, e), (c, d), (d, e), (e, a)\}$

Construisons la CSC de b

- (1) Marquer b (b^*)
- (2) Marquer les sommets adjacents de b (les suivants et les précédents de b)
- (3) Aucun sommet n'est resté sans marquage.

$\{a, b, c, d, e\}$ constitue une composante simplement connexe, c.à.d G forme une CSC

Algorithme de recherche d'une composante fortement connexe CFC d'un sommet S

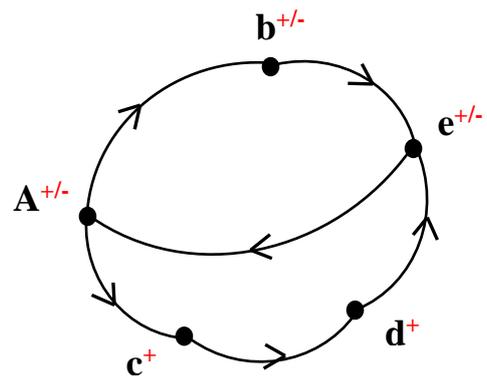
Soit $G(X, U)$ un graphe

- (1) Marquer le sommet S avec (+ et -)
- (2)
 - (a) Marquer par (+) tout suivant (non encore marqué +) d'un sommet déjà marqué (+)
 - (b) Marquer par (-) tout précédent (non encore marqué -) d'un sommet déjà marqué (-)
- (3) Les sommets marqués à la fois par + et - forment une CFC contenant S.

Exemple:

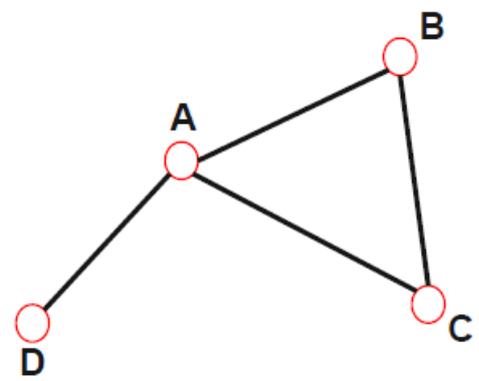
dans le graphe ci-contre

$$\text{CFC}(b)=\{b, a, e\}$$



Le plus court chemin / La distance

- **La distance (le plus court chemin)** entre deux sommets est définie par le nombre des arêtes au long de plus court chemin qui connecte ces deux sommets. Si les deux sommets sont disconnectés, la distance est infinie. S'ils sont confondus la distance est nulle.



- Dans un graphe orienté chaque chemin doit suivre la direction des arcs. Donc, la distance du sommet A au sommet B (sur le chemin AB) est généralement différente de la distance du sommet B au sommet A (sur le chemin BCA).

