UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAF DE M'SILA

DEPARTEMENT D'INFORMATIQUE

Les Fondements de la théorie des graphes

Chapitre 2: Représentation des graphes

Dr. SAID KADRI

Maître de Conférence

Department d'informatique, Faculté des Mathematiques et de l'Informatique, Université Mohamed Boudiaf de M'sila

E-mail: kadri.said28@gmail.com

Website: https://kadrisaid28.wixsite.com/sgadri

2017 - 2018

Méthodes de représentation des graphes

On distingue 02 classes de méthodes:

1.Méthodes statiques (utilisation des matrices)

- **Matrice d'adjacence (sommets – sommets)**
- **Matrice d'incidence (sommets – arcs)**
- **Liste des arcs (tries – non tries)**
- **Liste des successeurs**
- **Liste des prédécesseurs**
- **Liste linéaire des successeurs**

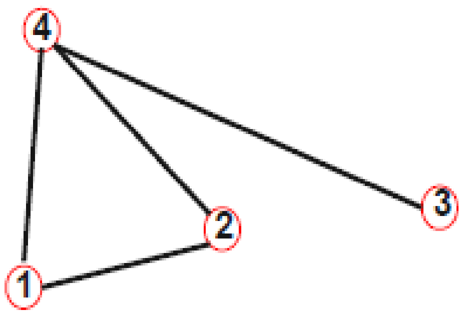
2. Méthodes dynamiques (utilisation des listes chainées)

- **Liste dynamique des sommets**
- **Liste dynamique d'arcs**

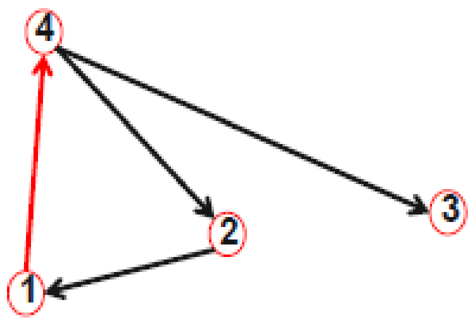
Méthodes statiques

1. Matrice d'adjacence (sommets – sommets)

Graphe G1



Graphe G2



$$\begin{cases} A_{ij} = 1 & s'il\ existe\ un\ lien\ entre\ les\ sommets\ i\ et\ j \\ A_{ij} = 0 & si\ les\ deux\ sommets\ i\ et\ j\ ne\ sont\ pas\ connectés \end{cases}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A(N, N)

A_{14}

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

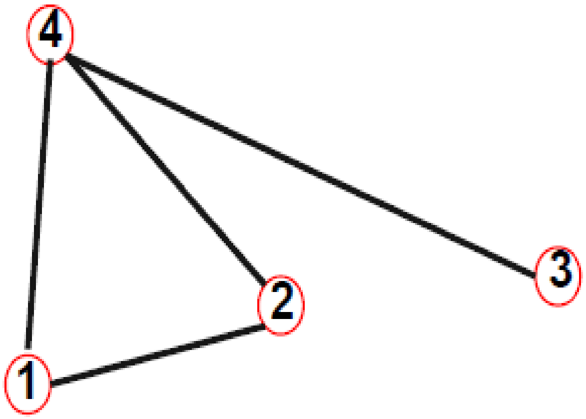
A(N, N)

N.B: Notons que pour un graphe orienté (à droite) la matrice n'est pas symétrique.

Matrice d'adjacence et degrés de sommets

Graphe non orienté

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

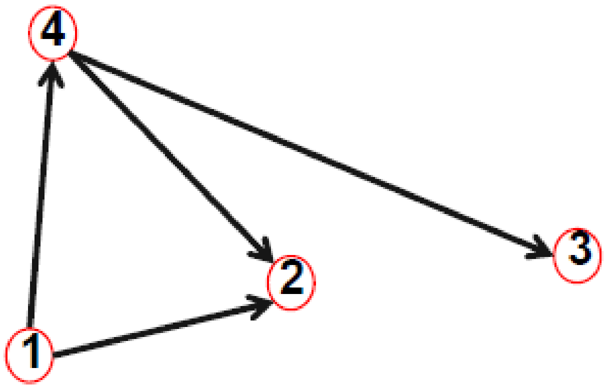


$$\begin{cases} A_{ij} = A_{ji} \\ A_{ii} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{k_i = \sum_{j=1}^{N} A_{ij} = k_j = \sum_{i}^{n} A_{ij}}$$

$$\boxed{L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{1}{2}\sum_{ij}^{N} A_{ij}}$$

Graphe orienté



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} A_{ij} \neq A_{ji} \\ A_{ii} = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{\mathbf{k_i^{ex}} = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{A_{ij}} \quad ; \quad \mathbf{k_j^{in}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{A_{ij}}}$$

$$\boxed{L = \sum_{i=1}^{N} k_i^{in} = \sum_{j=1}^{N} k_j^{out} = \sum_{i,j}^{N} A_{ij}}$$

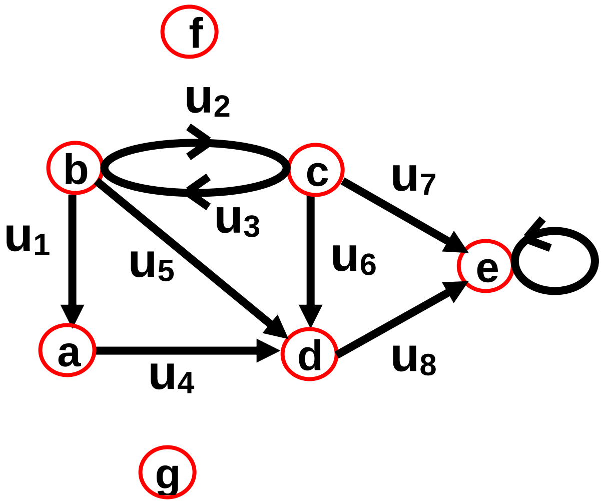
2. Matrice d'incidence (sommets – arcs)

Soit le graphe G(X, U) suivant:

X = {a, b, c, d, e, f, g}

U = {(a, d), (b, a), (b, c), (b, d), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (e, e)}

	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	u_7	u_8	u_9
a	-1	0	0	+1	0	0	0	0	0
b	+1	+1	-1	0	+1	0	0	0	0
c	0	-1	+1	0	0	+1	+1	0	0
d	0	0	0	-1	-1	-1	0	+1	0
e	0	0	0	0	0	0	-1	-1	2
f	0	0	0	0	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0



A(N, M)

Remarques:

- **Chaque colonne dans la matrice contient un seul (+1) correspond à l'extrémité initiale de l'arc, et un seul (-1) correspond à son extrémité terminale**
- **Le nombre des (+1) sur la ligne donne le 1/2 degré extérieur du sommet, bien que le nombre des (-1) donne le 1/2 degré intérieur du même sommet.**

3. Liste des arcs triés (selon l'extrémité initial)

U_4	U_1	U_2	U_5	U_3	U_6	U_7	U_8	U_9
a	b	b	b	c	c	c	d	e
d	a	c	d	b	d	e	e	e

f	g	…..

Sommets isolés

A(2, M)/A(3, M)

4. Liste des arcs non triés (pris arbitrairement)

U_4	U_1	U_3	U_2	U_8	U_9	U_5	U_6	U_7
a	b	c	b	d	e	b	c	c
d	a	b	c	e	e	d	d	e

f	g	…..

Sommets isolés

A(2, M)/A(3, M)

5. Liste des successeurs

1	a	d		
2	b	a	c	d
3	c	b	d	e
4	d	e		
5	e	e		
6	f			
7	g			

A(N, d^+_{max})

6. Liste des prédécesseurs

1	a	b		
2	b	c		
3	c	b		
4	d	a	b	c
5	e	e		
6	f			
7	g			

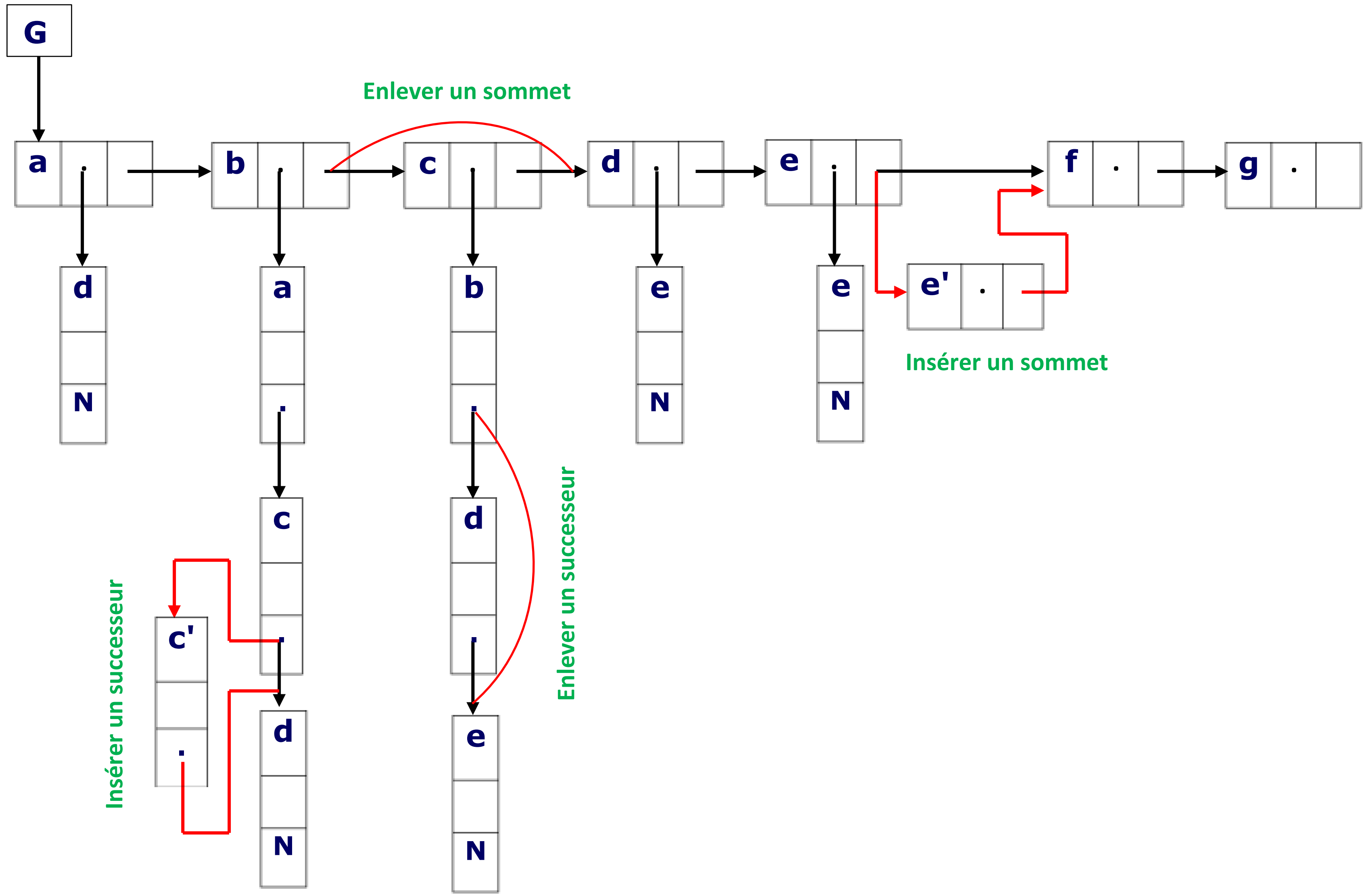
A(N, d^{-}_{max})

Méthodes dynamiques

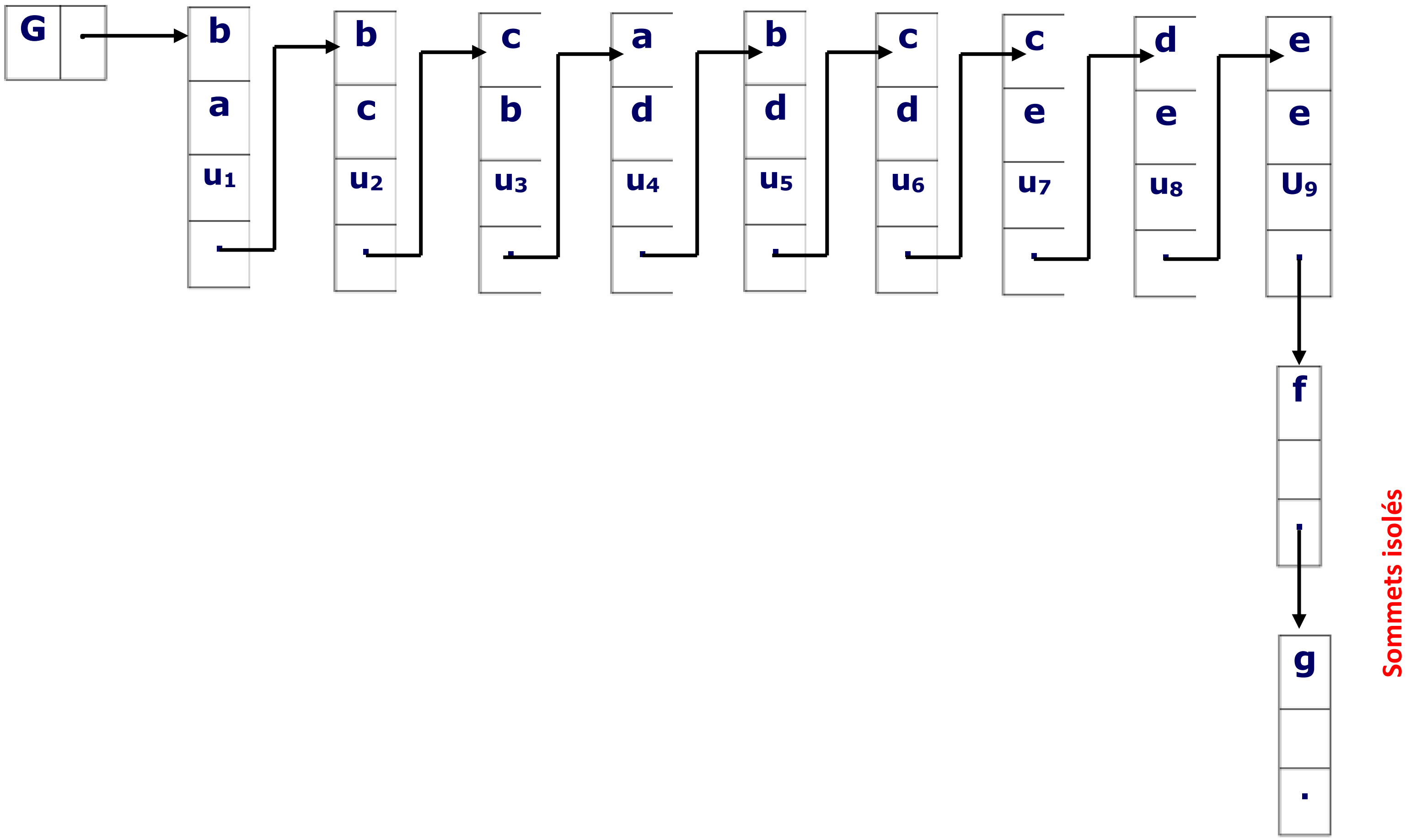
Pour chaque sommet on associe une suite des cases (cases/noeuds), chaque case contient une information élémentaire, telle que:

- **Nom du sommet (a, b, c, 1, 2, …)**
- **Adresse du 1^{ier} successeur**
- **Adresse du D^{ier} successeur**
- **Nombre de successeurs**
- **Valeur de l'arc.**
- **Autres**

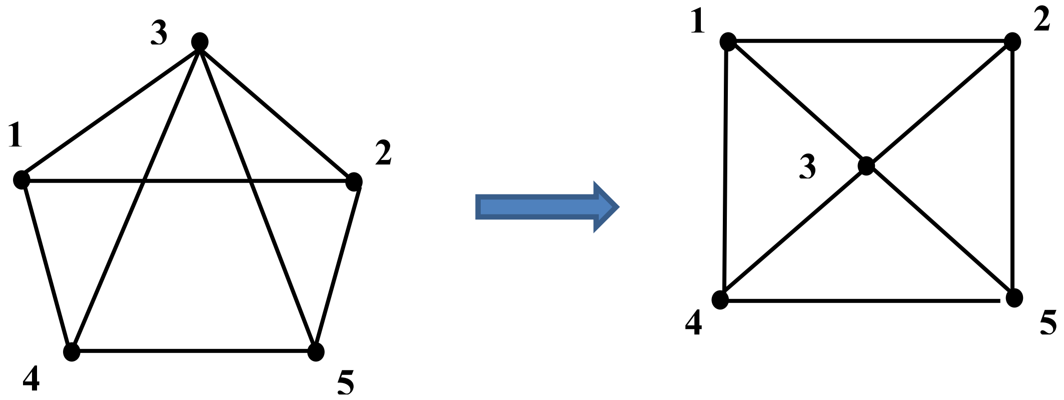
1. Liste dynamique des sommets



2. Liste dynamique des arcs



Graphes planaires



Graphes eulériens et graphes hamiltoniens

Théorème 1:

- **Un graphe non orienté connexe possède une chaine eulérienne si seulement si le nombre de sommets de degré impair est égal à 0 ou 2.**
- **Il admet un cycle eulérien si seulement si tous ses sommets ont un degré pair.**

  Condition nécessaire :

  - **Pour chaque sommet x, d-(x) = d+(x) ==> d(x) est pair**

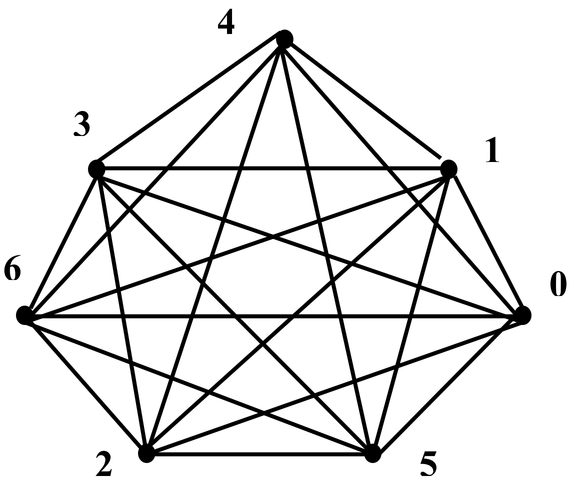
Chemins et circuits eulériens

Théorème 2:

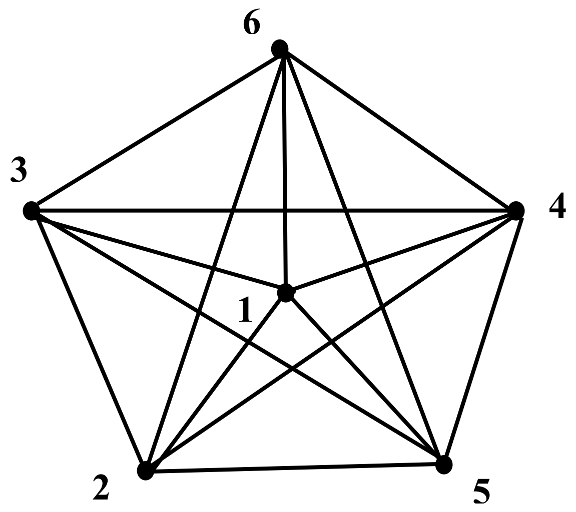
- **G admet un circuit eulérien si seulement si: $\forall x \in G$ $d^-(x) = d^+(x)$**

- **Un graphe simple connexe, G(X, U) est eulérien si seulement si tous ses sommets sont de degré pair ($\forall x \in X$, d(x) est pair)**

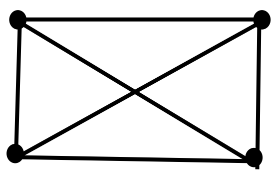
Exemples



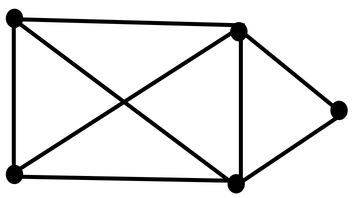
$\forall x \in X$, d(x) = 6 pair
G est Eulérien



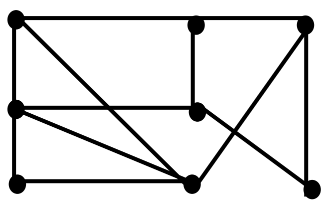
$\forall x \in X$, d(x) = 5 impair
G n'est pas Eulérien



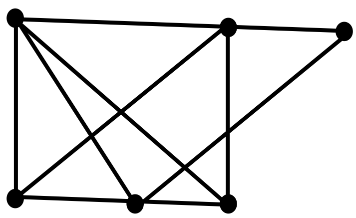
G n'est pas Eulérien



G est Eulérien

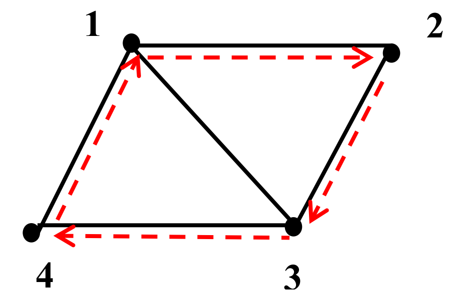


G n'est pas Eulérien



G est Eulérien

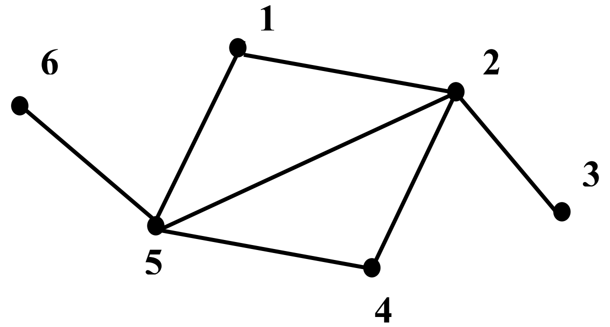
Cycles hamiltoniens



∃ un cycle hamiltonien

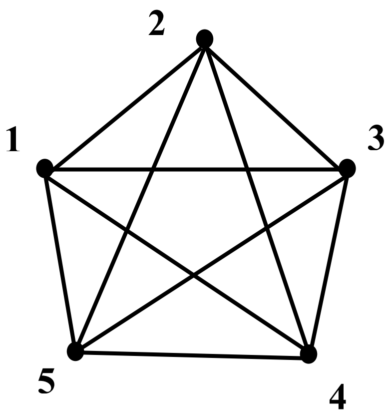
Remarque

- **Un graphe possédant un sommet de degré 1 ne peut pas être hamiltonien**

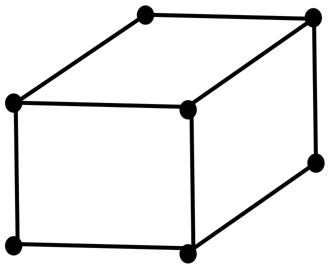


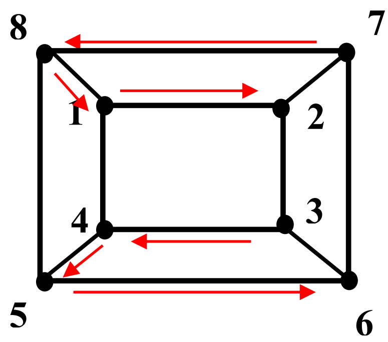
G n'est pas hamiltonien

- **Les graphes complets k_n sont hamiltoniens si n > 3**

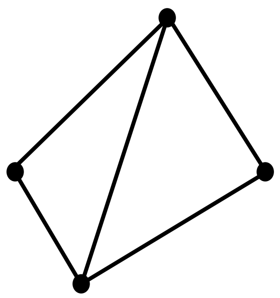


G est hamiltonien (complet, k4)

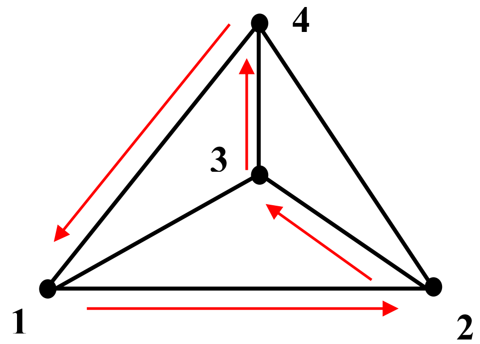




G contient un cycle hamiltonien



Graphe de type k3 (pyramide)



G est hamiltonien (complet, k3)