الجمهوريـة الجزائريـة الديمقراطيـة الشعبيـة

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Université Mohamed Boudiaf-M'sila
Faculté des sciences
Département de Physique

جامـــعـــة محمد بوضياف - المسيلة
كلية العلـــــــــــــــــــــوم
قسم الفيزيـــــــــــــــــاء

Notes de Cours du module

Séries & Equations Différentielles

(Math 3)

Bounab Sabrina

Deuxième Année Licence Physique

Année Universitaire 2020/2021

Sommaire

Chapitre I

Intégrales Simples et Multiples

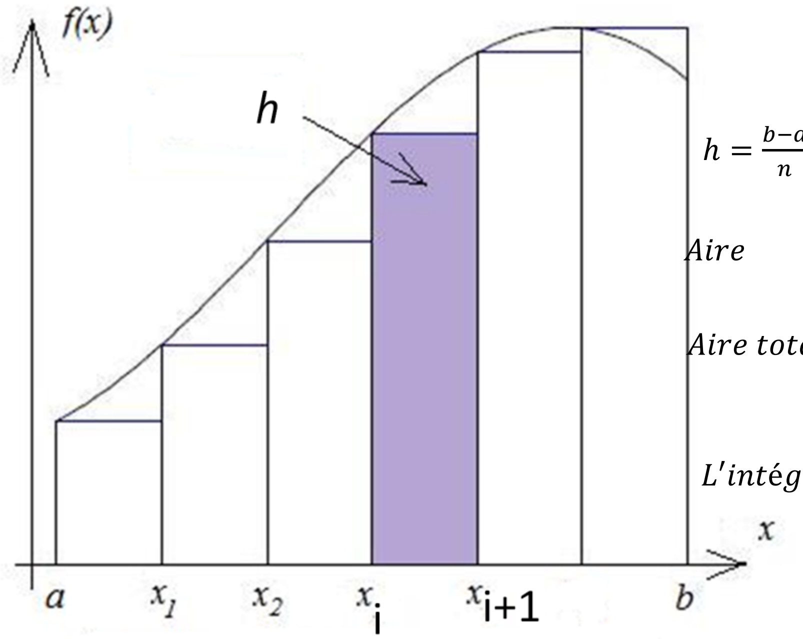
CHAPITRE I : Intégrales simples et multiples

I.1 Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitive

Soit $f(x)$ une fonction définie et continue dans tout l'intervalle$[a, b]$. On subdivise cet intervalle en n intervalles égaux de largeur h. Soit $x = a + ih$ on appelle intégrale de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ la limite de la somme $R_n = \sum_{i=1}^n h.f(x_i)$ lorsque n tend vers l'infini

$$\left(\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n h.f(x_i) = \int_a^b f(x)dx\right)$$

L'intégrale est l'aire algébrique entre la courbe, l'axe et les bornes.



$$h = \frac{b-a}{n} \quad , h = x_{i+1} - x_i$$

$$Aire \quad = \quad h.f(x_{i+1})$$

$$Aire\ totale\ R_n = \sum_{i=1}^{n} h.f(x_{i+1})$$

$$L'intégrale = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} R_n$$

Remarque : il faut noter que l'intégrale d'une fonction n'existe pas toujours. En d'autres termes la limite définissant l'intégrale n'existe pas toujours. Cependant il est possible de démontrer que si la fonction à intégrée $f(x)$ est continue sur $[a, b]$alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Théorème1 (Chasles) :

Soit $c \in]a, b[$; la fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si, elle est intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$, on a alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Théorème2 (Linéarité) :

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$; les fonctions f et g sont intégrables sur $[a, b]$, on a alors :

$$\int_a^b (\lambda f(x) + \beta g(x))dx = \lambda \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

Rappel sur les Primitives :

- Une fonction continue sur un intervalle admet une primitive sur cet intervalle.
- une primitive de f est une fonction dérivable F telle que $F' = f$
- les fonctions F telles que $F' = 0$ sont les fonctions constantes
- si F_1 *et* F_2 sont des primitives de f_1 et f_2 respectivement, elles diffèrent d'une constante.
- $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, avec F est primitive de f

Exemple : Sur $\mathbb{R}$ la fonction $Arctgx$ est une primitive de la fonction $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ puisque pour

$$\forall x \in \mathbb{R} : (\mathrm{Arctgx})' = \frac{1}{1 + x^2}$$

I.1.1 Outils de Calcul d'intégrales

1. Décomposition en somme

Si f est une fonction telle que $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ et si $f_1(x)$ et $f_2(x)$ ont des primitives, on calcule $\int_a^b f(x)dx$ en utilisant :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx$$

<u>Exemple :</u>

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+2}dx = \int_0^1 \frac{x^2 + 4 - 4}{x+2}dx = \int_0^1 (x-2)dx + 4\int_0^1 \frac{dx}{x+2} = -\frac{3}{2} + ln2$$

2. Intégration par partie

Soit u et v deux fonctions de class C^1 sur $[a, b]$ on a :

$$\int_a^b f(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u(x).v'(x)\, dx$$

Remarque : L'intégration par partie est commode dans le cas ou $f(x)$ est l'une des formes :

$$P(x).e^{kx};\ P(x).\sin(\omega x)\,;\ P(x).\cos(\omega x)\,;ou\ P(x).\ln\,(ax)$$

Avec $P(x)$ étant un polynôme.

3. Changement de variables

On suppose que f est une fonction intégrable dans $[a, b]$, que φ est une fonction à dérivée continue réalisant une bijection de $[\alpha, \beta]$ vers $[a, b]$ telle que $\{\varphi(\alpha) = a\ et\ \varphi(\beta) = b\}$, alors :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt$$

$$(avec\ x = \big(\varphi(t)\big)\ et\ dx = \varphi'(t)dt)$$

Exemple :

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$$

on pose : $\varphi = \sqrt{x+1}\ \Rightarrow \begin{cases} x = \varphi^2 - 1 \\ dx = 2\varphi d\varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow \varphi = 1 \\ x = 1 \Rightarrow \varphi = \sqrt{2} \end{cases}$

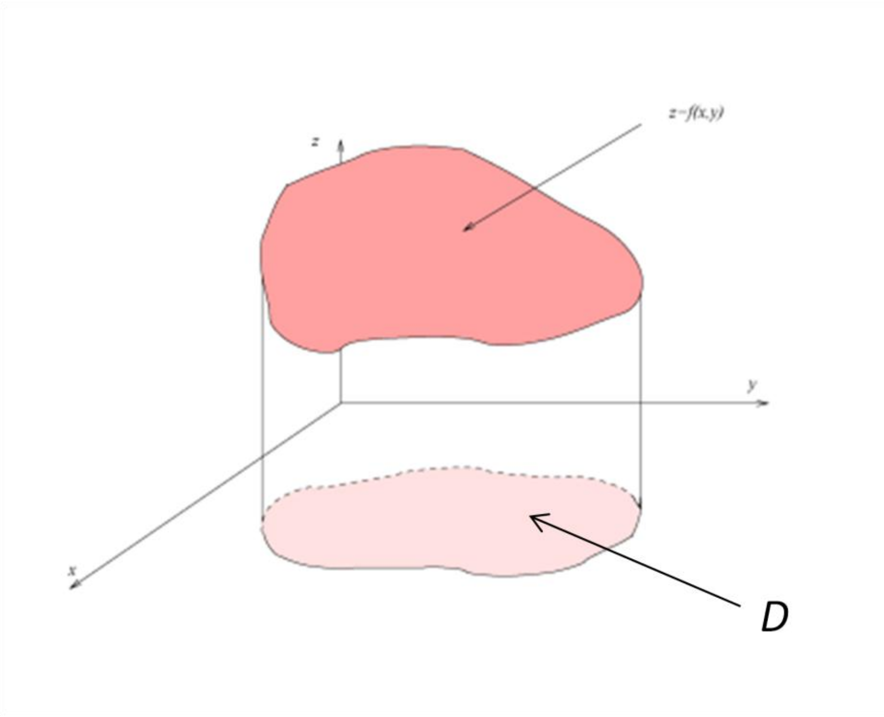
$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi} 2\varphi d\varphi = 2\left[\frac{\varphi^3}{3} - \varphi\right]_1^{\sqrt{2}}$$

I. 2. Intégrales Doubles

Définition: soit D une région $\mathbb{R}^2$bornée de et $f(x, y)$ une fonction définie et continue sur D. on définit l'intégrale double de f sur D :

$$\iint_D f\,(x, y)dxdy$$

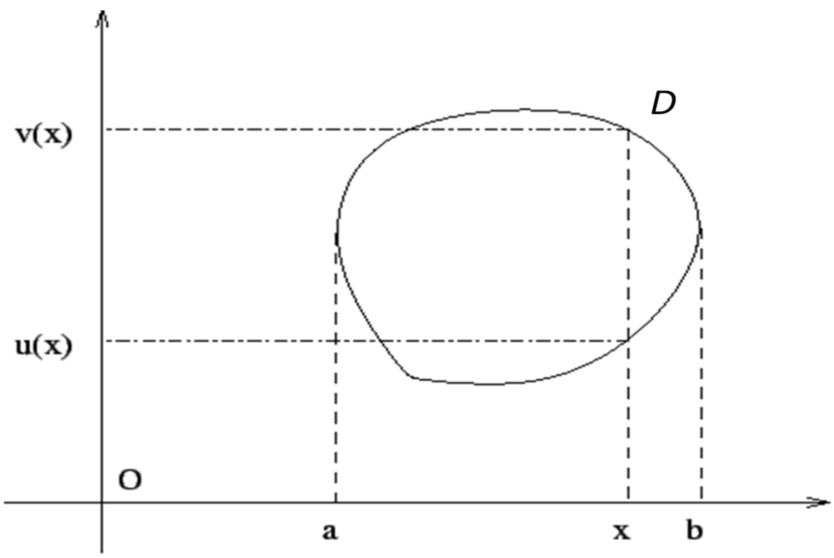
De telle manière qu'elle soit égale au volume compris entre la base D et la surface S représentative de $f(x, y)$: $S = \{(x, y),\ f(x, y)\ /(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{D}\}$



Cas Particulier : Si $f(x,y) = 1$, alors $\iint_D dxdy$ est l'aire de D, $ds = dxdy$ est l'élément d'aire en coordonnée cartésiennes.

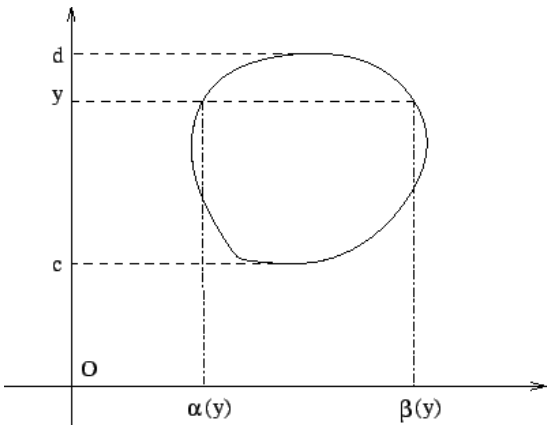
Théorème de Fubini

- Soit D le compact de $\mathbb{R}^2$ défini par : $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \in [a,b], u(x) \leq y \leq v(x),\}$ a, b sont des réels $(a < b)$, u et v des fonctions numériques continues sur [a, b] et vérifiant $u(x) \leq v(x)$ pour tout x ∈ [a, b] . Soit f une fonction continue sur D. On alors :



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

- Si le domaine le permet, on peut permuter les rôles de x et de y soit α et β des fonctions numériques continues sur [c, d] et vérifiant $\alpha(y) \le \beta(y)$ pour tout x ∈ [c, d], notons D l'ensemble des point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $c \le y \le d \; et \alpha(y) \le x \le \beta(y)$, alors :



$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)dx \right) dy$$

Exemple 1 : soit $D = [0,1] \times [0,2]$, on veut calculer $\iint_D xe^{xy}\, dxdy$

Solution :

$$I = \iint_D xe^{xy}\, dxdy = \int_0^1 x \left(\int_0^2 e^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 x \left(\left[\frac{e^{xy}}{x} \right]_{y=0}^{y=2} \right) dx = \int_0^1 (e^{2x} - 1) dx = \frac{1}{2}(e^2 - 3)$$

Exemple 2 : on veut calculer le volume d(un solide qui s'élève sur le domaine D du plan Oxy délimité par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole $y = x^2$ et couverte par la paraboloïde $z = x^2 + y^2$

Solution : le domaine D peut être écrit par :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2x) ,\}$$

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)\, dxdy$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy \right) dx = \int_0^2 \left(\left[x^2 y + \frac{1}{3} y^3 \right]_{y=x^2}^{y=2x} \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14}{3} x^3 \right) dx = \frac{216}{35}$$

Exemple 3 : Soit D la zone présenté dans la figure ci-dessous. Calculer l'aire D

Solution : On calcule d'abord les points d'intersections des courbes qui délimitent l'aire D :

$$\begin{cases} xy = 1 \\ y = x^2 \\ x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (\frac{1}{2}, 2) \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \\ xy = 1 \; et \; y = x^2 \Rightarrow (1,1) \end{cases}$$

$$Aire = D = \iint_D dxdy = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{y=x^2}^{\frac{1}{x}} dy \right) dx = \int_{x=\frac{1}{2}}^{1} \left(\frac{1}{x} - x^2 \right) dx = \left[lnx - \frac{1}{3}x^3 \right]_{\frac{1}{2}}^{1} = ln2 - \frac{7}{24}$$

Changement de Variables

Soit $f(x, y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathbb{C}^1$

$$(u, v) \longmapsto \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \text{ alors :}$$

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \iint_\Delta f(x(u, v), y(u, v))|J|dudv$$

Ou J appelé Jacobien, es le déterminant de la matrice :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u} . \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} . \frac{\partial y}{\partial u} \right)$$

Cas des coordonnées polaires

Le changement de variables en coordonnées polaires est donné par l'application :

$$(\rho, \theta) \longmapsto \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

Ou $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[$ sont les coordonnées des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; cette application a Jacobien :

$$J = \det \begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta \\ sin\theta & \rho cos\theta \end{pmatrix} = (\rho cos^2\theta - \rho sin^2\theta) = \rho$$

Alors

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_\Delta f(\rho cos\theta, \rho sin\theta))\rho d\rho d\theta$$

Exemple 1 : On veut intégrer la fonction $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{3}x \; et1 \leq x^2 + y^2 \leq 4) \}$$

Solution : on passe en coordonnées polaires

$$I = \iint_\Delta \frac{1}{1+\rho^2} \rho \, d\rho d\theta$$

Avec : $\Delta = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[: 1 \leq \rho \leq 2 \; et \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}) \right\}$, alors :

$$I = \int_1^2 \frac{1}{1+\rho^2} \rho d\rho \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{\pi}{6} ln \frac{5}{6}$$

Exemple 2 : Calculer $I = \iint \frac{x+y}{x^2+y^2} dxdy$ sur le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > a \; et \; x^2 + y^2 < a^2 \}$$

Solution : on passe en coordonnées polaires

$$I = \iint_\Delta \frac{\rho(cos\theta + sin\theta)}{\rho^2} \rho d\rho d\theta = \iint_\Delta (cos\theta + sin\theta) d\rho d\theta$$

Avec : $\Delta = \left\{(\rho,\theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi[: \frac{a}{cos\theta + sin\theta} \leq \rho \leq a \; et \; 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}) \right\}$

$$I = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\frac{a}{cos\theta+sin\theta}}^{a} (cos\theta + sin\theta) d\rho \right) d\theta = a\left(1 - \frac{\pi}{2}\right)$$

I. 3. Intégrales Triples

Définition: f étant continue sur un domaine D fermé et borné de $\mathbb{R}^3$, on définit l'intégrale triplee de f sur D :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_D f(x,y,z)dv$$

Se définit de façon analogue aux intégrales doubles et se calcule par intégration successives.

Cas particulier : Si $f(x,y) = 1$ alors $\iiint_D dxdydz = Volume$ de D, ou $dv = dxdydz$ est l'élément de volume en coordonnées cartésiennes.

Calcul effective : Soit f une fonction définie et continue sur D, δ est la projection orthogonal de Dsur le plan xOy, alors :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\delta \left(\int_{V(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

Où $V(x,y) \ = \ \{z/(x,y,z) \in D\}$

En général on utilise cette méthode quand D est une portion de surface comprise entre deux surfaces $z_1(x,y)$ et $z_2(x,y)$: $D \ = \ \{(x,y,z) \ / \ (x,y) \ \in \ \delta, z_1(x,y) \ \leq \ z \ \leq \ z_2 \ (x,y)\}$, ce qui donne :

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iint_\delta \left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dxdy$$

Exemple1 : Calculer $I = \iiint_D \ dxdydz$ sur le domaine D avec :

$D \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \ \ et \ x+y+z \leq 1 \ \}$

Solution : ici $\delta \ = \ \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \ \ et \ x+y \leq 1\}$

Avec $(z_1(x,y) = 0, \ z_2(x,y) = 1-x-y)$

$$I = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} \left(\int_{z=0}^{1-x-y} dz \right) dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} \left(\int_{y=0}^{1-x} (1-x-y) \, dy \right) dx = \int_{x=0}^{1} \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx = \frac{1}{6}$$

Exemple2 : Considérons $I = \iiint_D \ 4y^3 dxdydz$ sur le domaine D avec :

$D \ = \ \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq z^2 \ \ et \ 1 < z < 2 \ \}$

Solution : En effet

$$D \ = \ \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 1 < z < 2, 0 \leq x \leq z, 0 \leq y \leq \sqrt{z^2 - x^2} \ \right\}$$

$$I = \int_{z=1}^{2} \left(\int_{x=0}^{z} \left(\int_{z=0}^{\sqrt{z^2-x^2}} 4y^3 dy \right) dx \right) dz = \int_{z=1}^{2} \left(\int_{x=0}^{z} (z^2 - x^2)^2 \, dx \right) dz$$

$$= \int_{z=1}^{2} \left(\left[z^4 x + \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}z^2 x^3 \right]_0^z \right) dz = \frac{28}{5}$$

Changement de Variables

Le théorème est analogue au cas des intégrales doubles, Soit $f(x,y,z)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et borné, en bijection avec un domaine fermé et borné Δ au moyen des fonctions de classe $\mathbb{C}^1$

$$(u,v,w) \mapsto \begin{cases} x = \varphi(u,v,w) \\ y = \psi(u,v,w) \\ z = \xi(u,v,w) \end{cases} \text{ alors :}$$

$$\iiint_D f(x,y)dxdydz = \iiint_\Delta f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))|J|dudv\,dw$$

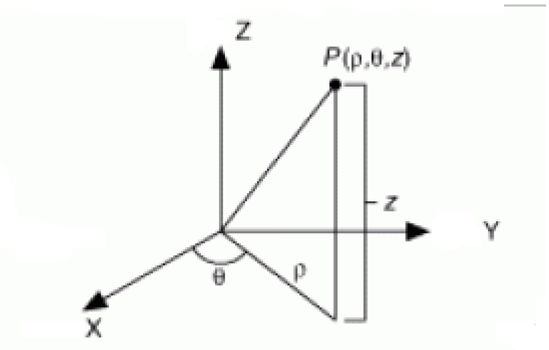
Ou J appelé Jacobien, es le déterminant de la matrice :

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

1. *Cas des coordonnées Cylindriques*

Le changement de variables en coordonnées cylindriques est donné par l'application :

$$(\rho,\theta,z) \mapsto \begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$



cette application donne un Jacobien :

$$J = \det\begin{pmatrix} cos\theta & -\rho sin\theta & 0 \\ sin\theta & \rho cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (\rho cos^2\theta - \rho sin^2\theta) = \rho$$

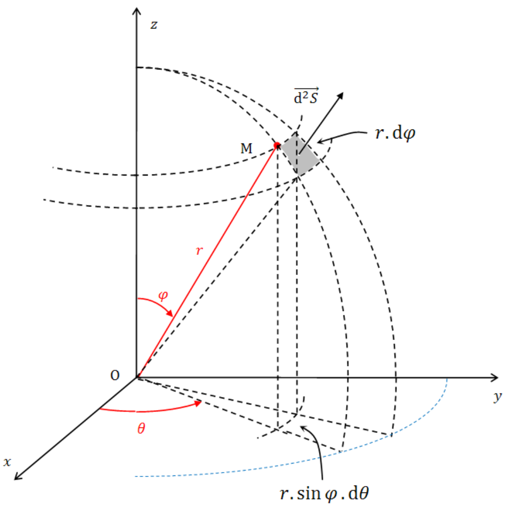
Alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta f(\rho cos\theta, \rho sin\theta, z))\,\rho d\rho d\theta dz$$

2. *Cas des coordonnées Sphériques*

Le changement de variables en coordonnées sphériques est donné par l'application :

$$(r,\theta,\varphi) \longmapsto \begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases}$$



Où $(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}_*^+ \times [0,2\pi] \times [0,\pi]$

cette application donne un Jacobien :

$$J = \det\begin{pmatrix} sin\varphi cos\theta & -rsin\varphi sin\theta & rcos\varphi cos\theta \\ sin\varphi sin\theta & rsin\varphi cos\theta & rcos\varphi sin\theta \\ cos\varphi & 0 & -rsin\varphi \end{pmatrix} = r^2 sin\varphi$$

Alors

$$\iiint_D f(x,y,z)dxdydz = \iiint_\Delta g(r,\theta,\varphi)\, r^2 sin\varphi drd\theta d\varphi$$

Exemple 1 : Calculer $\iiint_D ze^{x^2+y^2}dxdydz$, avec :

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 2 \;\; et 0 \leq \; z \leq \; 1) \right\}$$

Solution : on utilise les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases} \Longrightarrow x^2+y^2 = \rho^2 \;\Longrightarrow 1 \leq \rho \leq 2$$

$$\Delta = \;\{(\rho,\theta,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq \rho \leq 2\, ;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi \; et 0 \leq \; z \leq \; 1) \;\}$$

$$I = \int_{z=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\rho=1}^{2} ze^{\rho^2}\rho d\rho d\theta dz = \int_{z=0}^{1} zdz \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\rho=1}^{2} \rho e^{\rho^2}d\rho = \frac{\pi}{2}(e^4 - e)$$

Exemple 2 : Calculons $\iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dxdydz$, avec :

$$D = \;\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a^2 \leq \; x^2+y^2+z^2 \leq \; b^2\, avec\; 0 < a < b) \;\}$$

Solution : on utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$\Delta = \{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq \varphi \leq \pi)\}$ et $J = r^2\sin\varphi$

$$I = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dxdydz = \int_a^b rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 2\pi(b^2 - a^2)$$

Exemple 3 : Calculons $\iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz$, avec :

$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ x^2+y^2 \leq z^2 \text{ et } x^2+y^2+z^2 \leq 1)\}$

Solution :

On cherche les ponts d'intersections entre

$$\begin{cases} x^2+y^2 = z^2 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases} \Longrightarrow 2z^2 = 1 \Longrightarrow z = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Etant donné que $z \geq 0$, alors on peut décomposer le domaine D en deux domaines D_1 et D_2 et en utilisant les coordonnées cylindriques on a alors :

$$D_1 = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \leq \rho \leq z, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

$$D_2 = \left\{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 :\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1, 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z^2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\right\}$$

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \iiint_{D_1} (x^2+y^2+z^2)dxdydz + \iiint_{D_2} (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$I = \iiint_{D_1} (\rho^2+z^2)\rho d\rho d\theta dz + \iiint_{D_2} (\rho^2+z^2)\rho d\rho d\theta dz$$

$$I_1 = \iiint_{D_1} (\rho^2+z^2)\rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{\rho=0}^{z} (\rho^2+z^2)\rho d\rho dz = 2\pi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} z^4\, dz$$

$$I_2 = \iiint_{D_2} (\rho^2+z^2)\rho d\rho d\theta dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \int_{\rho=0}^{\sqrt{1-z^2}} (\rho^2+z^2)\rho d\rho dz = \pi \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1-z^4)\, dz$$

Par conséquent on trouve :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{2\pi}{5}\left(1 - \frac{15}{16\sqrt{2}}\right)$$