Chapitre 1

Théorie du champ électromagnétique

0. Rappel mathématique

0.1. Système de coordonnées sphériques

on utilise volontier en électromagnétique les coordonnées sphériques pour représenter un vecteur. Le système est défini par le repère mobile $(M, \hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_\phi)$.

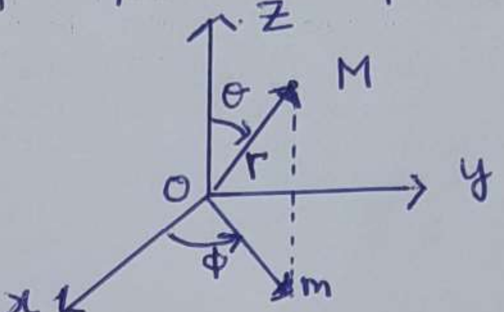


Figure 1. système de coordonnées sphériques

- $\hat{a}_r$ est parallèle au segment $\vec{OM}$.
- $\hat{a}_\theta$ est perpendiculaire à $\hat{a}_r$ dans le plan MOZ et son sens est celui de θ.
- $\hat{a}_\phi$ est perpendiculaire à $\hat{a}_r$ dans le plan Oxy et son sens est celui de ϕ.

0.2. Le passage entre les coordonnées sphériques et les coordonnées cartésiennes.

$$\hat{a}_x = \hat{a}_r \sin\theta \cos\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta \cos\phi - \hat{a}_\phi \sin\phi$$
$$\hat{a}_y = \hat{a}_r \sin\theta \sin\phi + \hat{a}_\theta \cos\theta \sin\phi + \hat{a}_\phi \cos\phi$$
$$\hat{a}_z = \hat{a}_r \cos\theta - \hat{a}_\theta \sin\theta$$
$$\hat{a}_r = \hat{a}_x \sin\theta \cos\phi + \hat{a}_y \sin\theta \sin\phi + \hat{a}_z \cos\theta$$
$$\hat{a}_\theta = \hat{a}_x \cos\theta \cos\phi + \hat{a}_y \cos\theta \sin\phi - \hat{a}_z \sin\theta$$
$$\hat{a}_\phi = -\hat{a}_x \sin\phi + \hat{a}_y \cos\phi$$

0.3. Quelques identités algébriques

$\vec{\nabla}\begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix}$, $\vec{A} = A_x\hat{a}_x + A_y\hat{a}_y + A_z\hat{a}_z$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \text{div}\,\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\phi = \overrightarrow{\text{grad}}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z$

$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) - \hat{a}_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{G}) = 0 = \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{G})$

$\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}g = 0 = \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,g)$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}g = \vec{\nabla}^2 g$. le laplacien de g

$\vec{\nabla}(\vec{F}+\vec{G}) = \vec{\nabla}\vec{F} + \vec{\nabla}\vec{G}$

$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{G}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{G}) - \vec{\nabla}^2\vec{G}$

$\vec{\nabla}\cdot(\vec{F}\times\vec{G}) = \vec{G}(\vec{\nabla}\times\vec{F}) - \vec{F}(\vec{\nabla}\times\vec{G})$

- Théorème de la divergence (ostrogradski)

$$\iiint_V \vec{\nabla}\cdot\vec{G}\cdot dv = \oiint_{[S]} \vec{G}\cdot\vec{ds}$$

- Théorème de stokes

$$\iint_S \vec{\nabla}\times\vec{G}\cdot\vec{ds} = \oint_{[C]} \vec{G}\cdot\vec{dl}$$

0.4. Les opérateurs différentiels

. Coordonnées Cartésiennes

$\vec{\nabla}g = \hat{a}_x\frac{\partial g}{\partial x} + \hat{a}_y\frac{\partial g}{\partial y} + \hat{a}_z\frac{\partial g}{\partial z}$

$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z}$

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \hat{a}_x\left(\frac{\partial G_z}{\partial y} - \frac{\partial G_y}{\partial z}\right) - \hat{a}_y\left(\frac{\partial G_z}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial z}\right) + \hat{a}_z\left(\frac{\partial G_y}{\partial x} - \frac{\partial G_x}{\partial y}\right).$$

$$\vec{\nabla}^2 \cdot g = \Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

- <u>Coordonnées cylindriques</u>

$$\vec{\nabla} g = \hat{a}_\rho \frac{\partial g}{\partial \rho} + \hat{a}_\phi \cdot \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \phi} + \hat{a}_z \frac{\partial g}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \hat{a}_\rho\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial G_z}{\partial \phi} - \frac{\partial G_\phi}{\partial z}\right) + \hat{a}_\phi\left(\frac{\partial G_\rho}{\partial z} - \frac{\partial G_z}{\partial \rho}\right) + \hat{a}_z \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho G_\phi) - \frac{\partial G_\rho}{\partial \phi}\right)$$

$$\nabla^2 g = \Delta g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \cdot \frac{\partial g}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}$$

- <u>Coordonnées sphériques</u>

$$\vec{\nabla} \cdot g = \hat{a}_r \frac{\partial g}{\partial r} + \hat{a}_\theta \cdot \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta} + \hat{a}_\phi \cdot \frac{1}{r\sin\theta} \cdot \frac{\partial g}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{G} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}(r^2 G_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta \cdot G_\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\cdot\frac{\partial G_\phi}{\partial \phi}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{G} = \hat{a}_r \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(G_\phi \sin\theta) - \frac{\partial G_\theta}{\partial \phi}\right] + \hat{a}_\theta \cdot \frac{1}{r} \times$$
$$\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial G_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(r G_\phi)\right] + \hat{a}_\phi \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r G_\theta) - \frac{\partial G_r}{\partial \theta}\right]$$

$$\nabla^2 g = \Delta g = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\cdot\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \cdot \frac{\partial g}{\partial \theta}\right)$$
$$+ \frac{1}{r^2 \sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 g}{\partial \phi^2}.$$

1. Equations de Maxwell

• Enoncé des équations:

Le socle de l'électromagnétisme se repose sur cinq (5) équations; les quatre (4) équations de Maxwell et l'expression de la la force de Lorentz

- Equation de Maxwell-Gauss

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon} \qquad (1)$$

- Equation de Maxwell-Faraday

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (2)$$

- Equation de Maxwell-Flux magnétique

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (3)$$

- Equation de Maxwell-Ampère.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu\vec{J} + \mu\varepsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (4)$$

Expression de la force de Lorentz

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \qquad (5)$$

Les équations qui caractérisent le milieu de propagation sont:

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma\vec{E}, \quad \vec{B} = \mu\vec{H}$$

Dans ce qui précède, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ sont, respectivement, les champs électrique et magnétique, $\vec{D}$ et $\vec{B}$ sont l'induction électrique et magnétique, respectivement.

ρ, $\vec{J}$: densité électrique de charge et de courant électrique.

ε: permittivité électrique du milieu.

μ: perméabilité magnétique du milieu

σ: Conductivité électrique du milieu.

La vitesse de propagation

La vitesse de propagation v est reliée aux caractéristiques du milieu par la relation $v = 1/\sqrt{\varepsilon \mu}$

avec : $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$

ε_r et μ_r sont la constante diélectrique relative et la perméabilité magnétique relative.

ε_0 et μ_0 sont la permittivité et la perméabilité du vide. Par conséquent, on a pour le vide :

$\varepsilon_r = 1$ et $\mu_r = 1$ $\rightarrow$ $v = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = C$

$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-22}\ F/m^2$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ H/m^2$ $C = 3\times 10^{8}\ m/s$.

Généralement, $\mu_r = 1$ pour un milieu non magnétique, alors $v = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r} \rightarrow v = C/\sqrt{\varepsilon_r}$.

on définit l'indice de réfraction d'un milieu par :

$n = \sqrt{\varepsilon_r}$, alors pour un milieu quelconque : $v = C/n$.

Conservation de charge

La charge électrique est conservée. La variation temporelle de charge située dans un volume v, délimité par une surface fermée est le courant qui traverse cette surface

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_v \rho \, dv\right) = -\oint\!\!\oint_{[S]} \vec{J} \cdot \vec{dS} \rightarrow \iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} dv + \iiint_v \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \cdot dv = 0$$

$$\rightarrow \iiint_v \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \vec{J}\right) dv = 0$$

La relation locale de conservation de la charge est donnée donc par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

2- Contenu physique des équations de Maxwell

chacune des équations de Maxwell prise individuellement décrit un phénomène physique. La forme

Intégrale de ces équations permet de reconnaître facilement cet effet

Equation de Maxwell-Gauss.

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \rightarrow \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{E}\,dv = \oiint_{[S]} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \iiint_V \frac{\rho\,dv}{\varepsilon_0}$$

$$\iiint \rho\cdot dv = Q_{int} \rightarrow \qquad \oiint_{[S]} \vec{E}\cdot\vec{dS} = Q_{int}/\varepsilon_0$$

C'est le théorème de Gauss relatif à l'électrostatique. Cette équation stipule que l'origine d'un champ électrique est une charge électrique.

Equation Maxwell_Flux magnétique

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \xrightarrow[\text{divergence}]{\text{Théorème}} \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{B}\,dv = \oiint_{[S]} \vec{B}\cdot\vec{dS} \rightarrow \oiint_{[S]} \vec{B}\cdot\vec{dS} = 0$$

Par analogie avec l'équation précédente, cette équation exprime qu'il n'existe pas de charges magnétique.

Equation Maxwell-Ampère

$$\iint_S \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\cdot\vec{dS} = \oint_{[C]} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \iint_S \mu_0\vec{J}\cdot\vec{dS} + \iint_S \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

$$\oint_{[C]} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0\iint_S \vec{J}\cdot\vec{dS} + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,\vec{dS} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\iint_S \frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\,\vec{dS}$$

Dans le cas statique: $\oint_{[C]} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 I$

Cette expression n'est autre que le théorème d'Ampère de la magnétostatique.

La 1ère information de cette équation est que l'origine d'un champ magnétique est un courant électrique.

La 2ème information c'est qu'un champ électrique variant dans le temps peut être à l'origine d'un champ magnétique.

Equation Maxwell-Faraday

$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, en utilise le théorème de stokes

$$\iint_S \vec{rot}\,\vec{E}\,\vec{dS} = \oint_{[C]} \vec{E}.\vec{dl} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\,\vec{dS}.$$

Sachant que le flux magnétique est défini par. $\phi = \iint_S \vec{B}.\vec{dS}$

$\rightarrow \quad \oint \vec{E}.\vec{dl} = -\frac{d\phi}{dt}$.

Cette équation décrit le phénomène d'induction. Un champ magnétique variable est à l'origine du champ électrique

3- Propriétés et Conséquences des équations de Maxwell.

- Cohérence des équations.

Si jusqu'ici présent, les équations de Maxwell ont été prises séparément, chaqune de ces équations prises individuellement recèle ou rend Compte d'un phénomène physique. La création d'un champ électrique par les charges électriques, l'absence de charges magnétiques, la création d'un champ magnétique par un Courant électrique et le phénomène d'induction.

Le génie de Maxwell a été de Comprendre qu'il s'agit d'un tout et que ces équations doivent être considérées Comme un ensemble. Prises ensemble plutôt qu'individuellement, ces équations Contiennent beaucoup plus de phénomènes.

Equation Maxwell-Ampère + Equation Maxwell-Gauss:

$div\,\vec{E} = \rho/\varepsilon$.

$\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{\nabla}.\vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial\, \vec{\nabla}.\vec{E}}{\partial t}$

$$\mathrm{div}\,\vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Ce n'est que l'équation de la Conservation de la charge. Le principe de conservation est donc Contenu dans les équations de Maxwell.

Existence d'onde électromagnétique.

En électrostatique, le champ électrique est dû à la présence de charge électrique, sans charge électrique il n'est y a pas de champ électrique. En magnétostatique, le champ magnétique est dû à la présence des Courants électriques, Sans Courant électrique pas de champ magnétique. L'orsque l'on étudie des situations dynamiques, les différentes grandeurs dépendent du temps.

Equation de Maxwell_Faraday : $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

Si le champ magnétique dépend du temps, on peut avoir un champ électrique avec une densité de charge nulle. Il suffit qu'il y ait un Courant électrique $\vec{J}$ dépend de $t \rightarrow \vec{B}$ dépend de t. On peut alors avoir peus et imaginer l'existence d'un champ électrique. et d'un Champ magnétique. en l'absence de charges et de Courants. Le champ électromagnétique. acquiere une. existance autonome par rapport aux charges et aux Courants.

Pour creér une onde électromagnétique, il faut des charges et des Courants, mais dès que celle-ci est émise. son existence. ne dépend plus de ces charges et Courants.

4. Energie électromagnétique

En l'absence de charges et de Courants, l'énergie électromagnétique est une quantité conservée. Pour exprimer cette conservation, il faut introduire un vecteur densité de courant de l'énergie. Ce vecteur est appelé <u>Vecteur de Poynting</u> et est noté $\vec{S}, \vec{P}, \vec{\Pi}$. Si l'on note u la densité volumique d'énergie électromagnétique, la relation de conservation est donc,

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V u \cdot dv = -\iint \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

Le théorème de la divergence nous permet d'écrire:

$$\iiint_V \left[\frac{du}{dt} + \operatorname{div}\vec{\Pi}\right] dv = 0 \rightarrow$$

$$\operatorname{div}\vec{\Pi} + \frac{du}{dt} = 0$$

Le vecteur de poynting est un vecteur qui représente la densité de courant d'énergie. Autrement dit, la puissance électromagnétique qui traverse une surface S est le flux du vecteur de Poynting à travers cette surface.

$$P = \iint_S \vec{\Pi} \cdot \vec{dS}$$

<u>Expression de l'énergie électromagnétique.</u>

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{rot}\,\vec{E}) - \vec{E}\,(\vec{rot}\,\vec{B})$$

En utilisant les équations de Maxwell-Ampère et Maxwell-Faraday:

$$\operatorname{div}(\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\left(\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{|\vec{B}|^2}{2} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2}\right) - \mu_0 \vec{J} \cdot \vec{E}$$

Loin des sources: $\vec{J} = \rho = 0 \Rightarrow$

$$\operatorname{div}\left(\frac{\vec{E} \times \vec{B}}{\mu_0}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}\right) = 0$$

Soit : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0}\right) + div(\vec{E} \times \vec{H}) = 0$

par analogie avec l'expression de la conservation de la charge électrique, on aura :

$$u = \varepsilon_0 \frac{|\vec{E}|^2}{2} + \frac{|\vec{B}|^2}{2\mu_0} \quad \text{et} \quad \vec{\pi} = \vec{E} \times \vec{H}$$

4. Ondes planes progressives

Nous pouvons donner les propriétés du champ électrique et du champ magnétique pour une onde plane progressive :

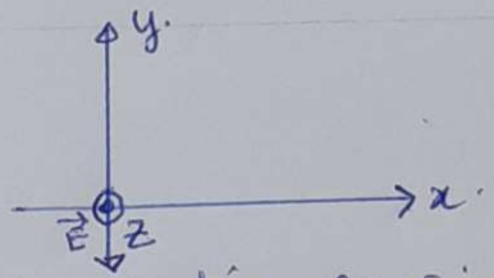
- Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux entre eux.
- Le champ électrique et le champ magnétique sont orthogonaux à la direction de propagation, on dit que ce sont des champs transversaux.
- Le trièdre $(\vec{K}, \vec{E}, \vec{H})$ forme un trièdre direct.
- Le module du champ électrique est C fois plus grand (dans le vide) que le module du champ induction magnétique $|\vec{E}| = c\,|\vec{B}|$.

5. Polarisation des ondes planes

La polarisation d'une onde TEM est le type de trajectoire que décrit l'extrémité du vecteur champ électrique au cours du temps dans le plan transverse. Il existe trois (3) types de polarisation.

- Polarisation linéaire

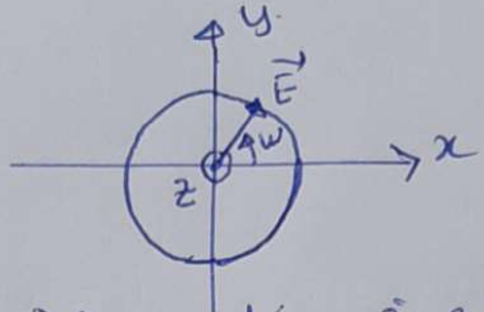
Le champ $\vec{E}$ n'a qu'une seule composante variant sinusoïdalement, sa trajectoire est donc un segment de droite



Polarisation linéaire

- Polarisation circulaire

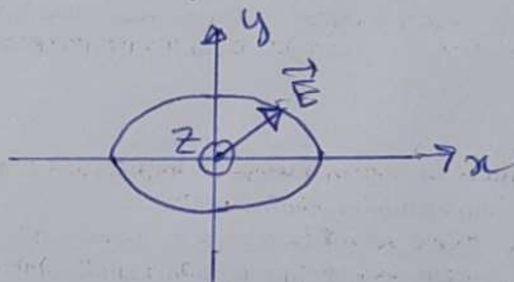
Le champ $\vec{E}$ a deux composantes E_θ et E_ϕ de même amplitude et déphasées de 90°. Son extrémité décrit un cercle.



Polarisation circulaire

- Polarisation elliptique

Elle correspond au cas général d'un champ $\vec{E}$ comprenant deux composantes E_θ et E_ϕ d'amplitude et de phase quelconque.



Polarisation elliptique.

5. Reflexion et Transmission

- Présentation

On aborde ici un aspect des milieux inhomogènes. Que se passe-t-il lorsque l'onde arrive à l'interface entre deux milieux.

On considère ici une interface plane entre un milieu "1" situé dans le demi-espace $Z > 0$ et un second milieu "2" situé dans le demi-espace $Z < 0$.

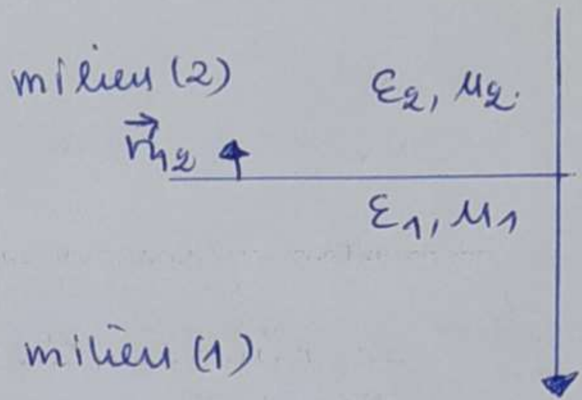
Relations de Continuité

$\vec{D}_{N2} - \vec{D}_{N1} = \sigma \vec{n}_{12}$

$\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0$

$H_{T2} - H_{T1} = \vec{J}_s \times \vec{n}_{12}$

$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0$



- Les indices N et T correspondent aux composantes du champ normale à la surface et tangentielle
- σ et $\vec{J}_s$ sont les densités surfacique de charge et de courant.
- $\vec{n}_{12}$ est la normale à la surface dirigé du milieu 1 vers le milieu 2. Pour un plan de séparation dépourvu de charge et de courant ($\sigma = 0$ et $\vec{J}_s = 0$), ces relations de continuité deviennent :

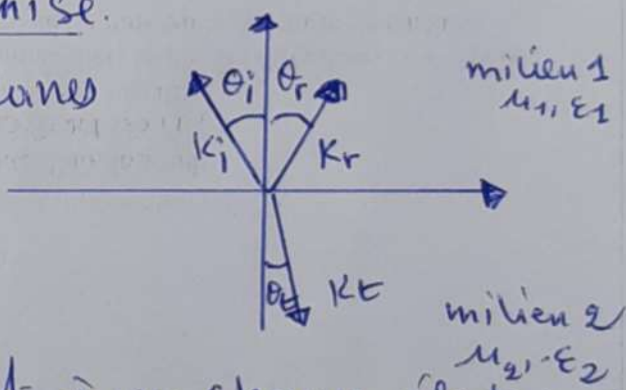
$\varepsilon_2 \vec{E}_{N2} - \varepsilon_1 \vec{E}_{N1} = 0$, $\vec{B}_{N2} - \vec{B}_{N1} = 0$,

$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0$; $\vec{B}_{T2}/\mu_2 - \vec{B}_{T1}/\mu_1 = 0$.

En général, la plupart des milieux sont non-magnétiques $\rightarrow \mu_1 = \mu_2 = \mu_0$.

- Ondes réfléchie et transmise.

Au total, on a trois ondes planes progressives :



- onde incidente (indice i)
- onde réfléchie (indice r)
- onde transmise (indice t)

Ces trois ondes correspondent à un champ électrique

$$\vec{E}_\alpha = \vec{E}_{0\alpha} e^{j(\vec{K}_\alpha \cdot \vec{r} - wt)}$$

où α correspond à i, r et t.

- Dans le milieu 1 ($z > 0$), le champ est la superposition de deux champs (onde incidente et onde réfléchie)

- Dans le milieu 2, seule l'onde transmise est présente.
- Le vecteur d'onde K est donné par :

$$K = \frac{w}{v} = n \cdot \frac{w}{c} \rightarrow K_\alpha = n_\alpha \cdot \frac{w}{c} = n_\alpha \cdot K_0.$$

où K_0 est le vecteur d'onde correspondant au vide.
- Utilisons maintenant les relations de Continuité, prenons, par exemple

$$\vec{E}_{T_2} - \vec{E}_{T_1} = 0 \Rightarrow \vec{E}_{T_2} = \vec{E}_{T_1}$$

Si l'on exprime explicitement cette relation en un point $\vec{r}_0$ de l'interface, on aura :

$$E_{i0T} e^{j(\vec{K}_i \cdot \vec{r}_0 - wt)} + E_{r0T} e^{j(\vec{K}_r \cdot \vec{r}_0 - wt)} = \vec{E}_{t0T} e^{j(\vec{K}_t \cdot \vec{r}_0 - wt)}$$

$$\vec{r}_0 = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y$$

$$\vec{K}_\alpha \cdot \vec{r}_0 = x K_{\alpha x} + y K_{\alpha y}$$

Pour que cette relation puisse être vérifiée $\forall x, y$, les vecteurs d'onde de ces 3 ondes selon x et y doivent être égaux.

$$\begin{cases} K_{ix} = K_{rx} = K_{tx}. \\ K_{iy} = K_{ry} = K_{ty} \end{cases}$$

Choisissons maintenant les axes de sorte que le plan d'incidence, c'est-à-dire le plan qui contient les 3 vecteurs d'onde soit dans ce cas le plan $xOz \Rightarrow K_{\alpha y} = 0$.

Si l'on note θ_i, θ_r et θ_t les angles d'incidence, de réflexion et de transmission, alors la composante du vecteur d'onde parallèle à l'interface est :

$$K_{\alpha x} = K_\alpha \sin\theta_\alpha.$$

$$K_{ix} = K_{rx} = K_{tx}$$

$$K_i \sin\theta_i = K_r \sin\theta_r = K_t \sin\theta_t$$

$$n_1 K_0 \sin\theta_i = n_1 K_0 \sin\theta_r = n_2 K_0 \sin\theta_t$$

$$\begin{cases} n_1 \sin\theta_i = n_1 \sin\theta_r \\ n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta_i = \theta_r \\ n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t \end{cases}$$

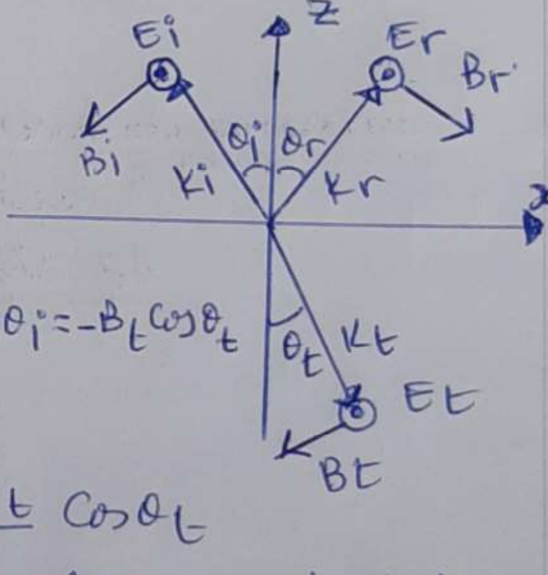
- Formule de Fresnel.

Cherchons maintenant à déterminer les coefficients de réflexion et de transmission.
Ecrivons les relations de continuité pour le champ tangent ; $\vec{E}_{T_1} = \vec{E}_{T_2}$ et $\vec{B}_{T_2} = \vec{B}_{T_1}$
Comme les phases des ondes sont égales en tout point de l'interface, il suffit d'écrire les relations de continuité pour les amplitudes

$$\begin{cases} \vec{E}_{iOT} + \vec{E}_{rOT} = \vec{E}_{tOT} \\ \vec{B}_{iOT} + \vec{B}_{rOT} = \vec{B}_{tOT} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} E_{ix} + E_{rx} = E_{tx} \\ E_{iy} + E_{ry} = E_{ty} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} B_{ix} + B_{rx} = B_{tx} \\ B_{iy} + B_{ry} = B_{ty} \end{cases}$$

a- Onde incidente polarisée perpendiculairement au plan d'incidence.



- Le champ $\vec{E}$ est selon $\hat{a}_y$
- Le champ $\vec{B}$ est dans le plan oxz

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ B_{ix} + B_{rx} = B_{tx} \rightarrow -B_i \cos\theta_i + B_r \cos\theta_i = -B_t \cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ -\frac{n_1 E_i}{c} \cos\theta_i + \frac{n_1 E_r}{c} \cos\theta_i = -\frac{n_2 E_t}{c} \cos\theta_t \end{cases}$$

- On définit le coefficient de réflexion et de transmission par :

$r_\perp = E_r / E_i$ et $t_\perp = E_t / E_i$.

$$\begin{cases} E_i + E_r = E_t \\ -E_i + E_r = -\dfrac{n_2}{n_1}\dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i} E_t \end{cases} \Rightarrow$$

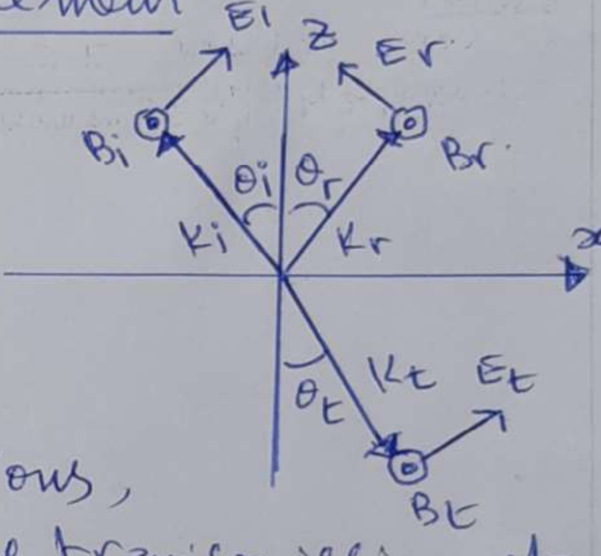
$$2E_i = E_t\left(1 + \frac{n_2}{n_1}\cdot\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{E_t}{E_i} = t_\perp = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}}$$

$$\begin{cases} 1 + r_\perp = t_\perp \\ 1 - r_\perp = \dfrac{n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i} t_\perp \end{cases} \Rightarrow$$

$$\boxed{r_\perp = \frac{n_1\cos\theta_i - n_2\cos\theta_t}{n_1\cos\theta_i + n_2\cos\theta_t}}$$

b- Onde polarisée parallèlement au plan d'incidence



$$\begin{cases} B_i + B_r = B_t \\ E_i\cos\theta_i - E_r\cos\theta_i = E_t\cos\theta_t \end{cases}$$

$$\begin{cases} E_i + E_r = \dfrac{n_2}{n_1} E_t \\ \cos\theta_i (E_i - E_r) = E_t\cos\theta_t \end{cases}$$

Après quelques manipulations, on aura les coefficients de transmission et de réflexion parallèles, comme suit:

$$\boxed{t_{//} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}}$$

$$\boxed{r_{//} = \frac{n_2\cos\theta_i - n_1\cos\theta_t}{n_2\cos\theta_i + n_1\cos\theta_t}}$$