# I. Rappel sur le calcul matriciel

## 1. Généralités sur les matrices

Définition : Une matrice de taille ***m* x *n*** est un tableau de nombres formé de ***m*** lignes et ***n*** colonnes. Une telle matrice s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Les nombres $\mathbf{a_{ij}}$ sont appelés les **coefficients** de la matrice.

**Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille 2 x 3.

**Définition :** Une matrice de taille ***n* x *n*** est appelée une **matrice carrée**.

Exemple :

$B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée de taille 2.

**Définition :** Une matrice de taille ***n* x 1** est appelée une **matrice colonne**.
Une matrice de taille ***1* x n** est appelée une **matrice ligne**.

## 2. Opérations sur les matrices

### 2.1) Somme de matrices

**Définition** : Soit ***A*** et ***B*** deux matrices de même taille.
La somme de ***A*** et ***B*** est la matrice, notée ***A* + *B***, dont les coefficients sont obtenus en additionnant deux à deux des coefficients qui ont la même position dans ***A*** et ***B***.

**Exemple :**

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$ alors $C = A + B = \begin{pmatrix} 2+5 & 3-3 \\ 4-3 & -1+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$

### 2.2) Produit d'une matrice par un réel

**Définition** : Soit ***A*** une matrice et ***k*** un nombre réel.
La produit de *A* par le réel *k* est la matrice, notée *kA*, dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de *A* par *k*.

Exemple :

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 5,5\\ 2 & -4\end{pmatrix} \text{ alors } B=2A=\begin{pmatrix}2\times(-2) & 2\times 5,5\\ 2\times 2 & 2\times(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 11\\ 4 & -8\end{pmatrix}$$

2.3) **Produit d'une matrice carrée par une matrice colonne**

**Définition :** Soit $A$ une matrice carrée de taille $n$ et $B$ une matrice colonne à $n$ lignes telles que :

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_n\end{pmatrix}$$

Le produit de la matrice carrée ***A*** par la matrice colonne ***B*** est la matrice colonne à ***n* lignes**, notée ***A* x *B*** et égale à :

$$A\times B=\begin{pmatrix}a_{11}\times b_1+a_{12}\times b_2+\dots+a_{1n}\times b_n\\ a_{21}\times b_1+a_{22}\times b_2+\dots+a_{2n}\times b_n\\ \dots\\ a_{n1}\times b_1+a_{n2}\times b_2+\dots+a_{nn}\times b_n\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -3 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix} \text{ alors } A\times B=\begin{pmatrix}2\times 3+5\times 4\\ -3\times 3+1\times 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}26\\ -5\end{pmatrix}$$

**2.4) Produit de deux matrices carrées**

**Définition :** Soit $A$ et $B$ deux matrices de même taille.
La produit de $A$ et $B$ est la matrice, notée $A$ x $B$, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice $A$ par chaque colonne de la matrice $B$.

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix} \text{ alors :}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\times 3+3\times 4 & -2\times(-3)+3\times 1\\ 1\times 3+2\times 4 & 1\times(-3)+2\times 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 11 & -1\end{pmatrix}$$

et

$$B\times A=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\times(-2)+(-3)\times 1 & 3\times 3+(-3)\times 2\\ 4\times(-2)+1\times 1 & 4\times 3+1\times 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9 & 3\\ -7 & 14\end{pmatrix}$$

**Remarque :**
**La multiplication de matrices n'est pas commutative :** $A\times B\neq B\times A$
On voit bien que le produit AB de deux matrices **A** et **B** n'est possible que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. On obtient alors une matrice ayant autant de lignes que A et autant de colonnes que B. On peut donc r ésumer en écrivant :
**[matrice de type (n, p)]×[matrice de type (p, q)]⇒[matrice de type (n, q)].**

### 3. Transposition

On obtient la transposée d'une matrice par échange des lignes par les colonnes et les colonnes par les lignes. La transposée d'une matrice A est notée $A^T$

### 4. Matrice mineure

La matrice mineure pour la place (*i, j*) (ou par abus : "de $A(i,j)$") d'une matrice $A=M_n(K)$ est la matrice de $M_{n-1}(K)$ obtenue en barrant dans A la ligne *i* et la colonne *j*.

Donc, le mineur c'est le déterminant de la matrice dont on a enlevé une ligne et une colonne.

**Exemple :**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Le mineur $M_{12}$ est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 1ère rangée et la 2e colonne de $A$, c'est-à-dire

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5.3 - 3.8 = 15 - 24 = -9$$

Le mineur $M_{22}$ est le déterminant de la matrice obtenue en éliminant la 2e rangée et la 2e colonne de $A$, c'est-à-dire

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 2.3 - 4.8 = 6 - 32 = -26$$

**5. Cofacteur** le cofacteur $C_{ij}=A^*(i,j)$ de la place (*i,j*) (ou par abus : "de $A(i,j)$") d'une matrice $A=M_n(K)$ est le *mineur* de la place (*i, j*) multiplié par $(-1)^{i+j}$.

Le cofacteur, $C_{ij}$, d'une matrice $A$ est défini par la relation

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Vous constaterez que le cofacteur et le mineur ont toujours la même valeur numérique, à l'exception parfois de leur signe.

**Exemple :**

Considérons à nouveau la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 3 \\ 8 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Nous avons déjà montré que le mineur $M_{12} = -9$. Ainsi, le cofacteur correspondant, $C_{12}$, est

$$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -1.(-9) = 9$$

Il s'avère que le mineur, $M_{12}$, et le cofacteur, $C_{12}$, sont de signes différents.

Le mineur $M_{22} = -26$. Son cofacteur correspondant, $C_{22}$, est

$$\mathrm{C}_{22} = (-1)^{2+2} \mathrm{M}_{22} = 1.(-26) = -26$$

Cette fois, le mineur, $\mathrm{M}_{22}$, et le cofacteur, $\mathrm{C}_{22}$, sont identiques.

## 6. Le déterminant d'une matrice

A toute matrice carrée correspond une valeur appelée déterminant que l'on dénote par : **det(A)** ou encore $|\boldsymbol{A}|$ .

**Exemple :** le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $|\boldsymbol{A}|$ = **ad-cb**

$$\det(\mathrm{A}) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}(k,j)\mathrm{A}^{*}(k,j) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{A}(i,k)\mathrm{A}^{*}(i,k) \quad \forall i, \forall j .$$

### Méthode de calcul des déterminants

Soit $A$ une matrice carrée et $C_{ij}$ ses cofacteurs. Le déterminant est obtenu en suivant une expansion par cofacteurs comme suit :

- Choisir une rangée ou une colonne de $A$ (si possible, il est plus rapide de choisir la rangée ou la colonne de $A$ contenant le plus grand nombre de zéros)…
- Multiplier chacun des éléments $a_{ij}$ de la rangée (ou colonne) choisie par son cofacteur, $C_{ij}$, correspondant…
- Faire la somme de ces résultats.

**Exemple :**

Quel est le déterminant de la matrice $A$?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

**Solution**

Suivons le processus proposé plus haut (expansion par cofacteurs) :

- Choisir une rangée ou une colonne de $A$... Pour l'instant, choisissons la première rangée.
- Multiplier chacun des éléments de cette rangée par leurs cofacteurs correspondants... Les éléments de la première rangée sont $a11 = 2, a12 = 1$, et $a13 = 3$ que l'on multiple avec les cofacteurs correspondants, c'est-à-dire $C_{11}, C_{12}$ et $C_{13}$ qui sont

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1(0.(-2) - 2.0) = 0$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 1(1 \times (-2) - 2 \times 2) = 6$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = 1\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1(1 \times (0) - 2 \times 0) = 0$$

Finalement, il s'agit de faire le calcul

$$det\ A = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32}$$

## 7. Rang d'une matrice :

Le *rang* d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes. Il est toujours inférieur ou égal au nombre de lignes et au nombre de colonnes. On démontre que c'est aussi le rang des vecteurs lignes (donc rang (A)= rang($A^T$)).

Le rang d'une matrice est l'ordre du plus grand mineur non nul de la matrice (ce qui revient à dire : soit **k** le nombre de lignes linéairement indépendantes et **l** le nombre de colonnes linéairement indépendantes, alors le **R = min(k, l)**).

## 8. Matrice inverse

### 8.1. Matrice identité

La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux $\mathbf{a_{ii}}$ valent 1. Cette matrice est notée $\mathbf{I_n}$.

**Définition :** On appelle **matrice identité** de taille ***n*** la matrice carrée formée de *n* lignes et *n* colonnes :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété :** Pour toute matrice carrée $A$ de taille $n$, on a : $A \times I_n = I_n \times A = A$

**Exemple :** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ alors :

$$A \times I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times1+(-2)\times0 & 3\times0+(-2)\times1 \\ 1\times1+4\times0 & 1\times0+4\times1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

### 8.2. Matrice inverse d'une matrice carrée

**Définition :** Une matrice carrée $\boldsymbol{A}$ de taille $n$ est une **matrice inversible** s'il existe une matrice $\boldsymbol{B}$ telle que $A \times B = B \times A = I_n$.
La matrice $B$, notée $A^{-1}$ est appelée **la matrice inverse** de $A$.

$$A^{-1} = \frac{(cofacteur(A))^T}{\det(A)}$$

**Exemple :**

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ -0,4 & 0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\times0,2+(-1)\times(-0,4) & 3\times0,2+(-1)\times0,6 \\ 2\times0,2+1\times(-0,4) & 2\times0,2+1\times0,6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices $A$ et $B$ sont donc inverses l'une de l'autre.

Propriété : La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, son déterminant est non null c.à.d : $ad - bc \neq 0$.

### 9. Valeurs propres

Soit A une matrice carrée d'ordre n. les valeurs propres $\lambda$ sont solutions de :
AV= $\lambda$V (V est un vecteur propre).
Ce sont aussi les racines de l'équation : $\det(A- \lambda I_n)=0$.

### 10. Valeurs singulières

Les valeurs singulières de **A** sont égales à la racine carrée positive des valeurs propres $\mathbf{A^TA}$. Pour les déterminer avec un minimum de calcul, on choisit $\mathbf{A^TA}$ si le nombre de lignes de A est supérieur au nombre de colonne et $\mathbf{AA^T}$ dans le cas contraire.

### 11. Pseudo-inverse

La pseudo-inverse de matrice la **A(n,m)** est notée $\mathbf{A^+}$
Si rang(A) =m (m<n), alors $\mathbf{AA^T}$ est inversible est $\mathbf{A^+= A^T (AA^T)^{-1}}$
Dans ce cas $A^+$ est appelée pseudo-inverse à droite. Et $A A^+=I_m$.

Si rang(A) =n (n<m), alors $\mathbf{A^TA}$ est inversible est $\mathbf{A^+= (AA^T)^{-1}A^T}$
Dans ce cas $A^+$ est appelée pseudo-inverse à gauche. Et $A^+A =I_n$.
Si rang(A) =m=n, alors $\mathbf{A^+= A^{-1}}$