

## **Stabilité et dynamique des réseaux électriques**

### **II. Propagation des phénomènes transitoires sur les lignes électriques**

#### **II.1. Introduction**

Une ligne de transmission électrique est formée d'un conducteur et d'un retour (ligne monophasée) ou de plusieurs conducteurs avec un retour (ligne polyphasée) et son rôle est de transporter l'énergie d'un endroit à un autre. Le présent travail se concentre sur les lignes de transmission aériennes de transport d'énergie électrique. La modélisation des lignes de transmission est plus compliquée que la modélisation des éléments discrets du fait que les paramètres d'une ligne sont distribués, et dépendent généralement de la fréquence.

Tout comme les circuits électriques ordinaires, les lignes de transmission fonctionnent dans deux régimes : soit le régime sinusoïdal établi (régime permanent), dont le modèle de la ligne pour ce régime est bien connu et très simple ; soit le régime transitoire causé par les phénomènes transitoires dans les réseaux électriques qui sont dues aux manœuvres, aux défauts et aux autres perturbations comme la foudre. Ces phénomènes impliquent une gamme de fréquence de zéro à quelques MHz. La précision des résultats de simulation obtenus par les analyseurs transitoires de réseaux ou par les calculs informatiques dépend de la représentation des composants du réseau ainsi que des données d'entrée disponibles. Des représentations valables sur toute la gamme de fréquence de 0 (courant continu) à 50 MHz ou plus sont pratiquement impossibles pour tous les composants d'un réseau. C'est pourquoi il faut examiner en détail les caractéristiques physiques d'un élément spécifique d'un réseau qui ont un effet décisif sur la partie du phénomène transitoire présentant un intérêt.

Des études de perturbations transitoires sur un système de transmission ont montré que ces changements sont suivis par la naissance d'ondes qui se propagent de part et d'autre du point de défaut. Par exemple, lorsqu'un coup de foudre tombe sur un conducteur de ligne, l'onde de tension induite tend à se diviser en deux ondes se propageant dans des directions opposées.

Quand une onde de surtension atteint un transformateur de puissance, par exemple, elle provoque une répartition des contraintes, qui n'est pas uniforme et peut conduire à la rupture du système d'isolation.

Les principales méthodes de calcul des régimes transitoires dans un réseau électrique sont regroupées en trois grandes familles :

- Les méthodes basées sur la théorie des ondes mobiles (initialement cette méthode est développée par Bergeron - méthode des caractéristiques)

- Les méthodes utilisant les transformations de Fourier ou de Laplace (transformation dans le domaine fréquentiel utilisant les théorèmes de convolution)

- Les méthodes aux différences finies.

## II.2. Formulation des équations (Modélisation du phénomène transitoire)

### II.2.1. Domaine fréquentiel

La Figure 1 détaille une section  $\Delta x$  d'une ligne de transmission monophasée. En se basant sur la différence de potentiel et de courant sur une section  $\Delta x \rightarrow 0$ , on obtient les équations différentielles de la ligne dans le domaine fréquentiel (1.1) et (1.2) (voir l'annexe 1), où la tension  $V$  et le courant  $I$  sont des phaseurs.

Afin d'approximer la distribution des paramètres, on peut placer de nombreuses sections  $\pi$  (comme celle illustrée à la Figure 1) en série. Plus le nombre de sections est grand et meilleure est l'approximation. Cependant, cette méthode a l'inconvénient de nécessiter un grand nombre d'éléments tout en n'autorisant pas la prise en compte d'une variation fréquentielle des paramètres.

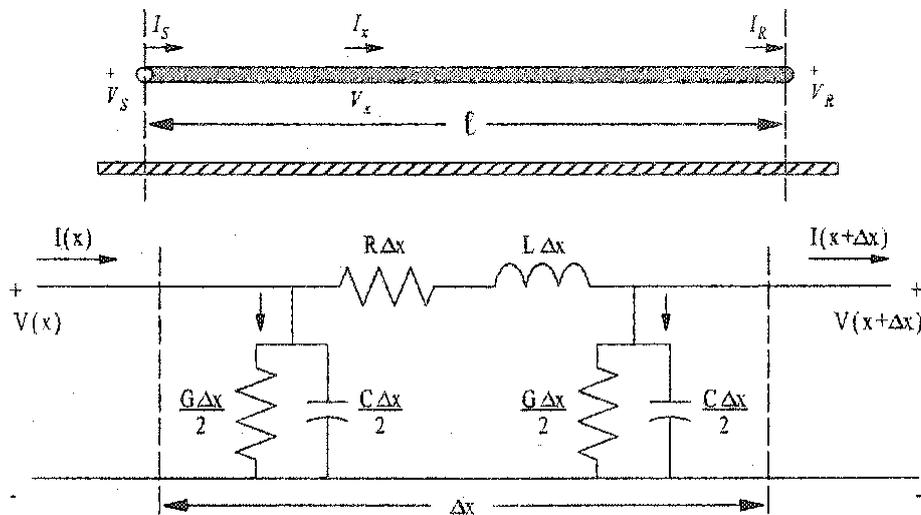


Figure 1 Ligne de transmission monophasée, détails d'une section  $\Delta x$

$$\frac{dV}{dx} = -(R + j\omega L)I = -ZI \quad (1.1)$$

$$\frac{dI}{dx} = -(G + j\omega C)V = -YV \quad (1.2)$$

Les paramètres de ligne  $Z$  et  $Y$  sont exprimés par unité de longueur, et dépendent généralement de la fréquence :  $Z = R(\omega) + j\omega L(\omega) \Omega/m$  et  $Y = G(\omega) + j\omega C(\omega) S/m$ .

La solution aux équations différentielles (1.1) et (1.2) fournit la relation entre l'onde au point « S » (début) et l'onde à une position « x » quelconque le long de la ligne :

$$V_x + Z_c I_x = (V_S + Z_c I_S) e^{-\gamma x} \quad (1.3)$$

avec  $Z_c = \sqrt{Z/Y}$  (impédance caractéristique) et  $\gamma = \sqrt{ZY}$  (constante de propagation). En particulier, lorsque  $x=l$  (longueur de la ligne), l'expression (1.3) devient

$$V_R + Z_c I_R = (V_S + Z_c I_S) e^{-\gamma l} \quad (1.4)$$

et établit la relation entre les ondes aux extrémités.

### II.2.1.1. Présentation du modèle à paramètres distribués dans le domaine fréquentiel

L'approche d'analyse utilisée dans ce cadre repose sur l'interprétation physique du phénomène de propagation d'onde qui stipule que lorsqu'une onde est injectée sur un médium de transport, elle se propage à une certaine vitesse et atteint l'autre extrémité après un certain délai. La méthode découlant de cette interprétation fut mise au point par Bergeron, théoricien français, et possède l'avantage important de respecter la nature distribuée des paramètres d'un milieu de transport tout en reproduisant fidèlement les phénomènes de réflexions aux extrémités. Elle fut d'abord appliquée en 1928 à des systèmes hydrauliques et ensuite aux systèmes électriques. Selon la méthode de Bergeron, l'équation (1.4) peut être interprétée comme suit: la quantité  $V_S + Z_c I_S$  (l'onde au début de la ligne) est propagée vers le point « R » selon une fonction de propagation  $e^{-\gamma l}$  qui détermine sa vitesse et son atténuation. Le délai de propagation d'une extrémité à l'autre est noté par la variable  $\tau$ .

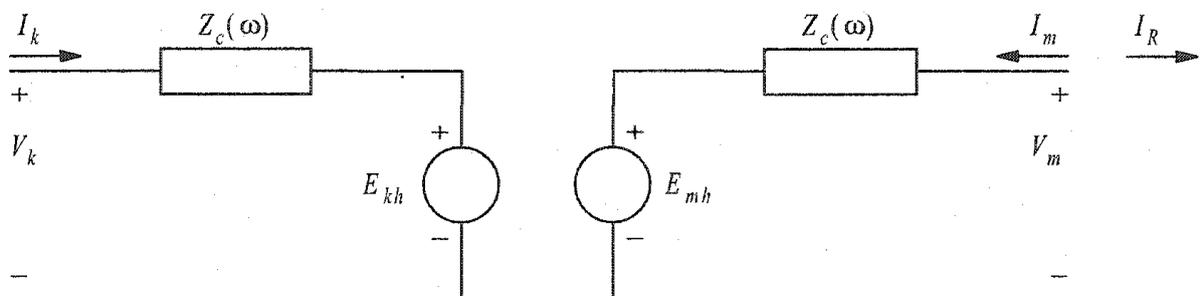


Figure 2 Modèle de ligne monophasée dans le domaine fréquentiel

Lorsque le pas de simulation  $\Delta t$  est choisi inférieur à  $\tau$ , alors les deux extrémités de la ligne sont, en fait, déconnectées l'une de l'autre durant la simulation au temps  $t$ . Si on remplace chaque extrémité de la ligne par un équivalent Thévenin (Figure 2), on obtient un modèle de ligne dans le domaine fréquentiel utilisable pour la simulation des phénomènes transitoires, à condition que  $\Delta t < \tau$ . Il est à noter que le sens du courant  $I_m$  dans la Figure 2 est l'inverse de  $I_R$  afin de correspondre au sens de l'onde voyageant en sens inverse.

Le rôle des sources de tension  $E_{mh}$  et  $E_{kh}$  est la transmission des ondes d'une extrémité à l'autre. L'onde voyageant dans le sens positif (de  $k$  vers  $m$ ) est transmise au point  $m$  par la source  $E_{mh}$  :

$$E_{mh} = (V_k + Z_c I_k) e^{-\gamma l} \quad (1.5)$$

Par symétrie, l'onde voyageant en sens inverse (de  $m$  vers  $k$ ) est transmise au point  $k$  par la source  $E_{kh}$  :

$$E_{kh} = (V_m + Z_c I_m) e^{-\gamma l} \quad (1.6)$$

La constante de propagation  $\gamma$  est définie par

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (1.7)$$

où  $\alpha$  est la constante d'atténuation (nepers/m) et  $\beta$  est la constante de phase (rad/m). La vitesse de propagation d'une onde de fréquence  $\omega$  rad/sec est donnée par

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (1.8)$$

### II.2.1.2. Présentation du modèle à paramètres constants avec pertes négligées dans le domaine fréquentiel

La première catégorie de modèles basés sur la méthode de Bergeron est celle où les paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  sont supposés constants (indépendants de la fréquence).

Le modèle de la Figure 3 est appliqué à une ligne supposée sans pertes ( $R = G = 0$ ) à paramètres  $L$  et  $C$  constants, ce qui représente le cas le plus simple pour une ligne de transmission. Dans ce cas, la constante de propagation

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC} \quad (1.9)$$

est purement imaginaire (aucune atténuation), d'où  $\alpha = 0$  et  $\beta = \omega\sqrt{LC}$  avec une vitesse de propagation

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.10)$$

qui ne dépend pas de la fréquence. Le délai de propagation est

$$\tau = \frac{l}{v} = l\sqrt{LC} \quad (1.11)$$

En réécrivant l'équation (1.5) avec la variable complexe (variable de Laplace) ( $s = j\omega$ ), on obtient

$$\begin{aligned} E_{mh}(s) &= (V_k(s) + Z_c I_k(s))e^{-\gamma l} \\ &= (V_k(s) + Z_c I_k(s))e^{-j\omega\sqrt{LC}\frac{\tau}{\sqrt{LC}}} \\ &= (V_k(s) + Z_c I_k(s))e^{-s\tau} \end{aligned} \quad (1.12)$$

où l'impédance caractéristique  $Z_c = \sqrt{(R + j\omega L)/(G + j\omega C)} = \sqrt{L/C}$  est un nombre réel (une résistance).

Comme le modèle est spécifié dans le domaine fréquentiel, il doit être transféré au domaine temporel étant donné que la simulation des phénomènes transitoires a lieu dans le temps. Le passage au domaine temporel s'effectue en appliquant la transformée inverse de

Laplace à l'équation (1.12), tout en se rappelant qu'un terme de la forme ( $e^{-s\tau}$ ) représente un délai dans le domaine temporel. Il s'ensuit que

$$e_{mh}(t) = v_k(t - \tau) + Z_c i_k(t - \tau) \quad (1.13)$$

L'équation (1.13) établit le modèle d'une ligne de transmission monophasée sans pertes à paramètres constants, représenté à la Figure 3.

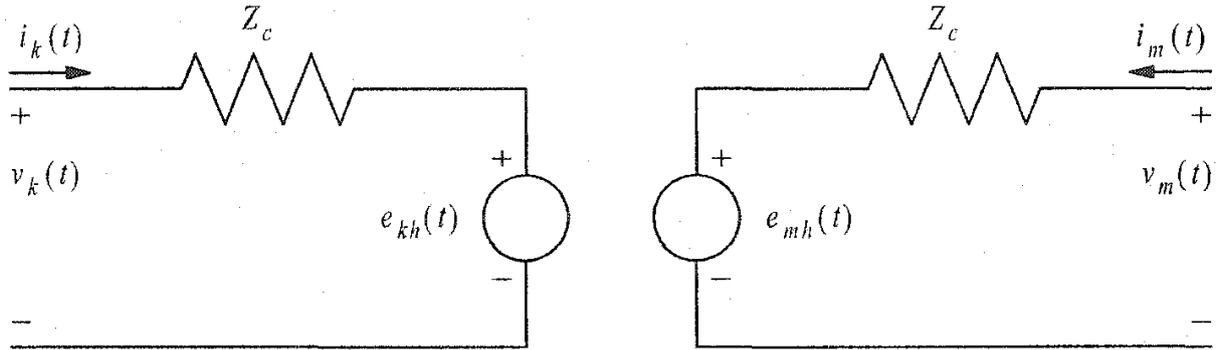


Figure 3 Modèle de ligne monophasée sans pertes à paramètres constants

Dans le circuit de la Figure 3, il est possible d'exprimer les sources d'histoire  $e_{mh}(t)$  et  $e_{kh}(t)$  uniquement en fonction des tensions du circuit en remarquant que  $i_k(t) = \frac{v_k(t) - e_{kh}(t)}{Z_c}$  et  $i_m(t) = \frac{v_m(t) - e_{mh}(t)}{Z_c}$ . On obtient alors

$$e_{mh}(t) = 2v_k(t - \tau) - e_{kh}(t - \tau) \quad (1.14)$$

$$e_{kh}(t) = 2v_m(t - \tau) - e_{mh}(t - \tau) \quad (1.15)$$

Les valeurs des sources apparaissant dans les équations (1.14) et (1.15) sont simplement lues d'un tableau en mémoire dans lequel les valeurs précédentes ont été stockées. Le tableau de stockage contient le nombre d'éléments correspondant au délai de transmission ( $\tau$ ), donné  $(\tau \div \Delta t)$  éléments pour chaque source d'histoire. Il est intéressant de constater que ce modèle ne dépend pas de la règle d'intégration utilisée et fournit donc une représentation exacte des équations de ligne.

## II.2.2. Domaine temporel

La représentation donnée par l'équation (1.4) est valable dans le domaine fréquentiel, où les paramètres de la ligne, les tensions et les courants sont calculés une fréquence à la fois. Cette représentation n'est pas directement utilisable pour les analyses transitoires dans le domaine temporel en raison de la dépendance fréquentielle des paramètres de ligne ( $Z_C$  et  $\gamma$ ). Dans le domaine temporel, les équations de ligne deviennent des équations différentielles aux dérivées partielles en fonction de la position et du temps, (1.16) et (1.17), équations pour lesquelles il n'existe pas de solution analytique couvrant le cas général, même lorsque les paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  sont supposés constants.

La complexité augmente encore lorsque la dépendance fréquentielle des paramètres  $R$ ,  $L$ ,  $G$ ,  $C$  est prise en compte. Une autre approche est donc nécessaire pour l'analyse des lignes dans le domaine temporel.

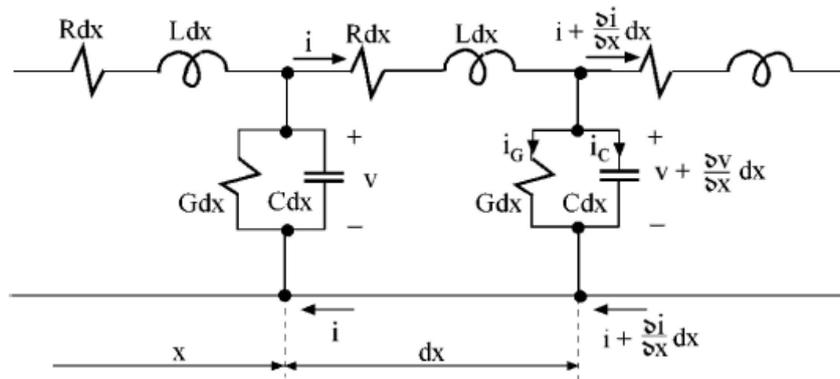


Figure 4 Modèle de la ligne à constantes réparties

Avec :  $Rdx$ ,  $Ldx$ ,  $Gdx$  et  $Cdx$  respectivement, la résistance, l'inductance, la conductance et la capacité d'un tronçon de ligne de longueur  $dx$ .

Soit  $x$  la distance de la source à la section considérée de la ligne;  $V$  et  $i$  la tension et le courant au début de la section  $dx$  et  $V + (\partial V / \partial x) dx$  et  $i + (\partial i / \partial x) dx$  à la fin de la section  $dx$ .

Notez que la tension et le courant dans une ligne de transmission en transitoire sont des fonctions de deux variables  $x$  et  $t$ . Nous pouvons maintenant écrire deux équations pour cette section par application de deux lois de Kirchhoff:

$$v = \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + Rdx \cdot i + Ldx \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$i = \left( i + \frac{\partial i}{\partial x} dx \right) + Gdx \cdot \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) + Cdx \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left( v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) \quad (1.17)$$

En combinant les termes similaires et en divisant par  $dx$ , on obtient un système d'équation différentielle aux dérivées partielles suivant :

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = R \cdot i + L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.18)$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = G \cdot v + C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.19)$$

Ces Equations sont dites les équations de la télégraphie dans la physique classique et équations d'ondes dans le cas d'une ligne sans pertes ( $R=G=0$ ).

La solution de ces équations avec les conditions initiales et aux limites connues permet d'obtenir le courant de ligne et de la tension en tout point de la ligne en fonction du temps et de la distance.

### II.2.2.1. Présentation du modèle à paramètres constants avec pertes négligées dans le domaine temporel

Dans le cas d'une ligne sans pertes ou même de faible pertes ( $R=G=0$ ), l'influence de la résistance  $R$  et de la conductance  $G$  par rapport à  $L$  et  $C$  dans les lignes de transmission est négligeable (signaux à haute fréquence ou en présence de phénomènes transitoires). En outre, comme le temps de propagation des ondes est relativement faible, l'influence des pertes est à peine significative. Donc, pour simplifier l'analyse, la ligne sera supposée sans pertes. Les équations précédentes deviennent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial v}{\partial t} \quad (1.21)$$

A noter que le signe moins dans les équations est due au fait que la tension  $v$  et le courant  $i$  diminuent à mesure que  $x$  augmente (le sens de propagation de  $v$  et  $i$  le long de la ligne).

La dérivée par rapport à  $x$  de l'équation (1.20) et par rapport à  $t$  de l'équation (1.21) donne :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.23)$$

En remplaçant l'équation (1.22) dans (1.23) pour éliminer la variable courant, on obtient l'équation de propagation de la tension:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (1.24)$$

De la même façon, la variable tension peut être éliminée et on obtient l'équation de propagation du courant :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (1.25)$$

### II.2.2.2. Solution des équations d'onde du modèle à paramètres constants avec pertes négligées dans le domaine temporel

Les équations (1.24) et (1.25) sont dites équations d'onde, elles sont identiques pour le courant et la tension. Quand une de ces fonctions est connue, l'autre peut être déterminée en utilisant soit l'équation (1.20) ou (1.21).

La solution des équations d'onde peut être déterminée de manière intuitive. En faisant attention au fait que les dérivées secondes de la tension  $v$  et du courant  $i$ , par rapport à  $t$  et  $x$ , doivent être directement proportionnelle, la solution peut être toute fonction de variable  $t$  et  $x$  indépendante de la forme :  $w_{1,2} = x \pm c.t$  (1.26)

Une des méthodes les plus adaptées pour solutionner ces équations est la méthode de séparation de variables.

La solution de l'équation (1.24) est de la forme :

$$v(x, t) = v_1 + v_2 = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) \quad (1.27)$$

Qui satisfait l'équation (1.24).

Afin d'assurer cette cohérence et déterminer le sens de la constante  $c$ , nous substituons une des fonctions (équation (1.27)), par exemple  $f_1$ , dans l'équation (1.24). Sa première dérivée par rapport à  $x$  est:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \quad (1.28)$$

$$\text{Et la seconde dérivée est : } \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad (1.29)$$

La première dérivée de l'équation (1.27) par rapport à  $t$  est :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} \cdot \frac{\partial w_1}{\partial t} = \frac{\partial f_1}{\partial w_1} (-c) \quad (1.30)$$

$$\text{La seconde dérivée est : } \frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad (1.31)$$

En remplaçant les équations (1.29) et (1.31) dans l'équation (1.24), on obtient :

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} = LC \cdot c^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial w_1^2} \quad (1.32)$$

Or cette égalité est vérifiée si la quantité  $LC \cdot c^2 = 1$ , ou bien  $c = 1/\sqrt{LC}$  (m/s)

Par conséquent, la constante  $c$  a les dimensions de mètres par seconde et représente la vitesse de propagation de l'onde de tension et du courant le long de la ligne. De même, on peut montrer que le deuxième terme ( $f_2$ ) dans l'équation (1.27) satisfait à l'équation (1.24) avec la même signification de la constante  $c$ .

La fonction  $i$  du courant peut être déterminée en utilisant les équations (1.20) et (1.28), soit :

$$\frac{\partial f_1}{\partial w_1} = -L \frac{\partial i_1}{\partial t} \quad (1.33)$$

Après intégration par rapport à la variable  $t$

$$\int \frac{\partial f_1}{\partial w_1} dt = -L \int \frac{\partial i_1}{\partial t} dt$$

$$\text{Donne : } [1/(-c)]f_1 = Li_1 \quad \text{comme } \frac{\partial w_1}{\partial t} = -c = \text{constante}$$

$$\text{On obtient : } i_1 = \frac{1}{cL} f_1(x - ct) = \frac{1}{Z_C} v_1 \quad (1.34)$$

$$\text{avec : } Z_C = c \cdot L = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (1.35)$$

$Z_C$  est l'impédance caractéristique d'une ligne de transmission sans pertes.

En suivant le même raisonnement on obtient l'expression de  $i_2$

$$i_2 = -\frac{1}{cL} f_2(x + ct) = -\frac{1}{Z_C} v_2 \quad (1.36)$$

L'expression du courant total est :

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} [f_1(x - ct) - f_2(x + ct)] = i_1 + i_2$$

La solution des équations de propagation du courant et de la tension sont :

$$v(x, t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) = v_1 + v_2 \quad (1.37)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Z_c} [f_1(x - ct) - f_2(x + ct)] = i_1 + i_2 \quad (1.38)$$

Ces solutions correspondent à des ondes de tension et de courant se déplaçant à la vitesse  $c$  dans la ligne, pour  $f_1$  dans le sens des  $z$  positifs (onde progressive), pour  $f_2$  dans le sens des  $z$  négatifs (onde régressive).