Definition 1 ***Réduction d'un endomorphisme en dimension finie, d'une matrice***

Definition 2 *Soit E un espace vectoriel (e.v) de dimension finie n sur $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $\mathcal{B}= (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ la base canonique de E.*

Soit $\begin{array}{cccc} f: & E & \rightarrow & E \\ & x & \rightarrow & f(x) \end{array}$ *un endomorphisme de E, $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.*

On appelle valeur propre de f (ou de A) tout élément λ de K tel que :

$$\det(f - \lambda\ id_E) = \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Definition 3

On appelle vecteur propre de f (ou de A) associé à la valeur propre λ tout vectour non nul de $E(\lambda) = \ker(f - \lambda\ id_E) = \ker(A - \lambda I_n)$, $E(\lambda)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remark 4

$v \in E(\lambda) \Longrightarrow (f - \lambda\ id_E)(v) = 0 \Longrightarrow f(v) - \lambda\ v = 0 \Longrightarrow$

$$f(v) = \lambda v$$

ou

$v \in E(\lambda) \Longrightarrow (A - \lambda I_n) v = 0 \Longrightarrow Av - \lambda v = 0 \Longrightarrow$

$$Av = \lambda v$$

Le spectre d'un endomorphisme f de E (ou de A) est d'ensemble des valeurs propres :

$$Spec(A) = \{\lambda_i\}_i$$

Definition 5

On appelle espace propre de f associé à la valeur propre λ le sous-espace vectoriel $E(\lambda)$.

i.e., le sous espace formé par les vecteurs v de E tel que $f(v) = \lambda v$.

$$E(\lambda) = \ker(f - \lambda\ id_E) = \ker(A - \lambda I_n)$$

Definition 6

On appelle polynôme caractéristique de f (ou de A) le polynôme :

$$P(\lambda) = \det(f - \lambda idE) = \det(A - \lambda I_n)$$

c'est un polynôme de degré n en K.

Remark 7

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique :

Soient $\mathcal{B}$,$\mathcal{B}'$ deus bases de E. Si $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$, $\exists$ P (matice de passage) et $A' = M_{\mathcal{B}'}(f)$ avec

$A' = M_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}AP$, alors $P_A(\lambda) = P_{A'}(\lambda)$

$$\begin{aligned}
P_{A'}(\lambda) &= \det(A' - \lambda I_n) \\
&= \det(P^{-1}AP - \lambda I_n) \\
&= \det\left[\left(P^{-1}AP\right) - \left(P^{-1}\lambda I_n P\right)\right] \\
&= \det[P^{-1}(A - \lambda I_n)P] \\
&= \det P^{-1} \times \det(A - \lambda I_n) \times \det P \\
&= P_A(\lambda)
\end{aligned}$$

Car $\det P \times \det P^{-1} = 1$

$\det A' = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1}) \times \det(A) \times \det P = \det A$

Remark 8 ***Remark 9*** *Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$, alors*

$$P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}Tr(A)\lambda^{n-1} + \ldots + \det(A)$$

Example 10

Soit $E = \mathbb{R}^2$ $\quad \begin{array}{rccc} f: & E & \to & E \\ & x & \to & f(x) \end{array}$

$\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique avec$\begin{cases} e_1 = (1,0) \\ e_2 = (0,1) \end{cases}$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$

$\det A = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -6 \end{vmatrix} = -30 - (-18) = -30 + 18 = -12 \neq 0$

i.e., A est inversible.

Polynôme caractéristique :

$P_A(\lambda) = (-1)^n \lambda^n + (-1)^{n-1} tr(A) \lambda^{n-1} + \ldots + \det(A)$

$tr(A) = 5 - 6 = -1$

$\Rightarrow P_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12$

ou bien

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -6-\lambda \end{vmatrix}$

$P(\lambda) = (5-\lambda)(-6-\lambda) + 18 = \lambda^2 + \lambda - 12$

Valeurs propres :

$P(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$

$\Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda + 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 & = & -4 \\ \lambda_2 & = & 3 \end{cases}$ *il y a deux valeurs propres.*

Vecteurs propres (Espace propre) :

$E(\lambda) = \ker(A - \lambda_2 I_2)$:

$(A - \lambda I_2)X = 0$

i.e., $\begin{pmatrix} 5-\lambda & -3 \\ 6 & -6-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (5-\lambda)x_1 - 3x_2 = 0 \\ 6x_1 + (-6-\lambda)x_2 = 0 \end{cases} \ldots (I)$

Pour $\lambda = \lambda_1 = -4$:

$(I) \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 - 3x_2 = 0 \\ 6x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 3x_1$

Par suite $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D'ou $E(\lambda_1) = E(-4) =< v_1 >$ *sous-espace vectoriel engendré par* $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\dim E(\lambda_1) = 1$.

$f(v_1) = \lambda_1 v_1 = -4v_1 + 0v_2$

Pour $\lambda = \lambda_2 = 3$:

$(I) \Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ 6x_1 - 9x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 0$ *ce que donne :* $2x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{3}{2} x_2$

Donc $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E(\lambda_2) = E(3) =< v_2 >$ *où* $v_2 = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\dim E(\lambda_2) = 1$.

$f(v_2) = \lambda_2 v_2 = 3v_2 = 0v_1 + 3v_2$

Dans la nouvelle base $\mathcal{B}' = (v_1, v_2)$:

$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = D$ *(matrice diagonal).*

La nouvelle base $\mathcal{B}'$ *donne une matrice diagonal.*

Calcul de P *(matrice de passage) :*

On a $P = (v_1 v_2) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Calcul de P^{-1} :

$X' = PX \Leftrightarrow X = P^{-1}X'$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x'_1 = x_1 + \frac{3}{2}x_2 \ldots (1) \\ x'_2 = 3x_1 + x_2 \ldots (2) \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} -3x'_1 & = & -3x_1 & -\frac{9}{2} & \ldots\ldots \quad -3 \\ x'_2 & = & 3x_1 & +x_2 & \ldots\ldots \quad (\end{array} \right.$$

$-3 \times (1) + (2) : -\frac{7}{2}x_2 = -3x'_1 + x'_2 \Rightarrow x_2 = \frac{6}{7}x'_1 - \frac{2}{7}x'_2$

De $(1) \quad x_1 = x'_1 - \frac{9}{7}x'_1 + \frac{3}{7}x'_2 \Rightarrow x_1 = \frac{-2}{7}x'_1 + \frac{3}{7}x'_2$

On obtient $\left\{ \begin{array}{ccccc} x_1 & = & -\frac{2}{7}x'_1 & +\frac{3}{7}x'_2 \\ x_2 & = & \frac{6}{7}x'_1 & -\frac{2}{7}x'_2 \end{array} \right.$

Donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2/7 & 3/7 \\ 6/7 & -2/7 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

Finalement $D = P^{-1}AP$ *(formule de changement de base).*

On vérifier que :

$\det A = \det D$

$P_A(\lambda) = P_D(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12$ *polynôme caractéristique.*

$Tr(A) = Tr(D) = -1$

Remark 11

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$, *alors* $E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) = \{0\}$

Soit $v \in E(\lambda_1) \cap E(\lambda_2) \Rightarrow v \in E(\lambda_1)$ *et* $v \in E(\lambda_2)$

$\Rightarrow f(v) = \lambda_1 v$ *et* $f(v) = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v = \lambda_2 v \Rightarrow \lambda_1 v - \lambda_2 v = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)v = 0 \Rightarrow v = 0.$

(car $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$*)*

Proposition 12

Soit $f : E \to E$ *un endomorphisme de* E, *on suppose que le polynôme caractéristique* $P(\lambda)$ *a* k *racines distincts et on note* $E(\lambda_1), E(\lambda_2), \ldots, E(\lambda_k)$, *les sous-espaces propres associés.*

Si $E = E(\lambda_1) \oplus E(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus E(\lambda_k)$, *alors* f *(ou* A*) est diagonalisable.*

Proof.

Pour $i = 1, \ldots, k$ choisissans une base $\mathcal{B}_i$ de $E(\lambda_i)$ la base $\mathcal{B}$ de E réunions des $\mathcal{B}_i$, $\mathcal{B}' = \bigsqcup_{i=1}^{k} \mathcal{B}_i$

est formée des vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$,donc la matrice $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ est diagonale :

$$\text{i.e., } D = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1 \end{matrix}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{\begin{matrix} \lambda_k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k \end{matrix}} \end{pmatrix} = P^{-1}AP \quad \blacksquare$$