# CHAPITRE 03 : Transformées de LAPLACE

**3-1 Définition** : par définition ; $f(t)$ étant une fonction réelle du temps (nulle pour $t<0$) ; on appelle Transformée de laplace de cette fonction notée $TL\{f(t)\}$ ; la fonction de la variable complexe $F(p)$ :

$$F(p) = TL\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \quad \text{pour } t \geq 0$$

**3-2 propriétés** :

① Dérivation : $TL\{f'(t)\} = p.F(p) - f(0)$

d'une manière générale, on peut écrire :

$$TL\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0)$$

avec : $f^{(r-n-1)}(0) = \left.\dfrac{d^{(r-n-1)} f(t)}{dt^{(r-n-1)}}\right|_{t=0}$

② Intégration : $TL\left\{\int_0^t \int_0^t \cdots \int_0^t f(t)\, dt^n\right\} = \dfrac{1}{p^n} TL\{f(t)\}$

③ changement d'échelle : D'où $TL\{f(Kt)\} = \dfrac{1}{K} F\left(\dfrac{p}{K}\right)$

④ théorème du retard - Translation temporelle :

$TL\{f(t \pm \theta)\} = e^{\pm p\theta}\, TL\{f(t)\}$

⑤ Translation fréquentielle : $TL\{e^{\pm \alpha t} f(t)\} = F(p \mp \alpha)$

⑥ Multiplication par t : $TL\{t.f(t)\} = -\dfrac{dF(p)}{dp}$

⑦ théorème de la valeur initiale et finale :

$f(0) = \lim\limits_{p \to +\infty}\{pF(p)\}$ ; $f(\infty) = \lim\limits_{p \to 0}\{p.F(p)\}$

⑧ produit de convolution :

$$e(t) * h(t) \underset{TL^{-1}}{\overset{TL}{\longleftrightarrow}} E(p).H(p)$$

produit de convolution

## 3-3 Transformée Inverse de Laplace : $T\mathcal{L}^{-1}$

① si $F(p)$ ne contient que des pôles distincts : (l'ordre de $A(p)$ > l'ordre de $B(p)$)

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{a_1}{p+p_1} + \frac{a_2}{p+p_2} + \cdots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

avec : $a_i = F(p) \cdot (p+p_i) \Big|_{p=-p_i}$

Exemple ① $F(p) = \dfrac{2}{p(p+1)(p-2)} = \dfrac{a_1}{p} + \dfrac{a_2}{(p+1)} + \dfrac{a_3}{(p-2)}$

$$a_1 = F(p) \cdot p \Big|_{p=0} = \frac{2}{(p+1)(p-2)}\Big|_{p=0} = -1$$

$$a_2 = F(p) \cdot (p+1) \Big|_{p=-1} = \frac{2}{p(p-2)}\Big|_{p=-1} = \frac{2}{3}$$

$$a_3 = F(p)(p-2) \Big|_{p=2} = \frac{1}{3}$$

$$F(p) = \frac{-1}{p} + \frac{2/3}{(p+1)} + \frac{1/3}{(p-2)} \xrightarrow{T\mathcal{L}^{-1}} -u(t) - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t}$$

② si $F(p)$ contient des pôles multiples : (l'ordre de $A(p)$ > l'ordre de $B(p)$)

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_r}{(p+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(p+p_1)^{r-1}} + \cdots + \frac{b_1}{(p+p_1)} + \frac{a_{r+1}}{p+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{p+p_{r+2}} + \cdots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

avec : $A(p) = (p+p_1)^r (p+p_{r+1})(p+p_{r+2}) \cdots (p+p_n)$

où $a_k = \left[\dfrac{B(p)}{A(p)} \cdot (p+p_k)\right|_{p=-p_k}$ ; $(k = r+1, r+2, \ldots, n)$

$$b_r = \frac{1}{0!}\left[F(p) \cdot (p+p_1)^r\right|_{p=-p_1} ; \quad b_{r-1} = \frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{dp}\left[F(p) \cdot (p+p_1)^r\right]\right\}\Big|_{p=-p_1}$$

$$b_{r-j} = \frac{1}{j!}\left\{\frac{d^j}{dp^j}\left[F(p)(p+p_1)^r\right]\right\}\Big|_{p=-p_1} ; \quad b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[F(p)(p+p_1)^r\right]\right\}\Big|_{p=-p_1}$$

**Exemple :** $F(p) = \dfrac{5p+16}{(p+2)^3(p+5)} = \dfrac{b_3}{(p+2)^3} + \dfrac{b_2}{(p+2)^2} + \dfrac{b_1}{(p+2)} + \dfrac{a_4}{(p+5)}$

$a_4 = F(p)\cdot(p+5)\Big|_{p=-5}$ ; $b_3 = \dfrac{1}{0!}\left\{F(p)\cdot(p+2)^3\right\}\Big|_{p=-2}$

$b_2 = \dfrac{1}{1!}\left\{\dfrac{d}{dp}\left[F(p)\cdot(p+2)^3\right]\right\}\Big|_{p=-2}$ ; $b_1 = \dfrac{1}{2!}\left\{\dfrac{d^2}{dp^2}\left[F(p)\cdot(p+2)^3\right]\right\}\Big|_{p=-2}$

**Remarque :** $TL^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+p_1)^n}\right] = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_1 t}$

③ **si F(p) contient ~~des~~ pôles complexes conjugués :**

soient $p_1$ et $p_2$ les pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p+p_1)(p+p_2)} + \frac{a_3}{p+p_3} + \dots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

avec : $\alpha_1$ et $\alpha_2$ les résidus aux pôles $p_1$ et $p_2$ :

$$(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-p_1} = \left[F(p)(p+p_1)(p+p_2)\right]_{p=-p_1 \text{ ou } p=-p_2}$$