Annexe A : TRANSFORMEES DE LAPLACE

Définition de la Transformée de Laplace

Par définition, $f(t)$ étant une fonction réelle du temps (nulle pour t < 0), on appelle Transformée de Laplace de cette fonction, notée $\mathcal{L}\{f(t)\}$, la fonction de la variable complexe $F(p)$ telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}\{ f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt \qquad \text{pour } t \geq 0$$

Propriétés

1- Dérivation : $\mathcal{L}\{f'(t)\} = p\,F(p) - f(0)$

D'une manière générale, on peut écrire :

$$\mathcal{L}\{ \frac{d^n}{dt^n} f(t)\} = p^n F(p) - \sum_{r=n+1}^{r=2n} p^{2n-r} f^{(r-n-1)}(0) \qquad \text{avec } f^{(r-n-1)}(0) = \left.\frac{d^{(r-n-1)}f(t)}{dt^{(r-n-1)}}\right|_{t=0}$$

2- Intégration :

$$\mathcal{L}\{ \int_0^t\int_0^t .....\int_0^t f(t)\,dt^n \} = \frac{1}{p^n}\mathcal{L}\{f(t)\}$$

3- Changement d'échelle :

D'où : $\mathcal{L}\{f(kt)\} = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right)$, De même que : $\mathcal{L}\{f(\frac{1}{k}t)\} = k\;F(k\,p)$

4- Théorème du retard – Translation : $\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = e^{-p\tau}\mathcal{L}\{f(t)\} \qquad \text{pour } t \geq \tau$

5- Théorème de la valeur initiale : $f(0^+) = \lim_{p\to\infty}\{p\,F(p)\}$

6- Théorème de la valeur finale : $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0}\{p\,F(p)\}$

7- Intégrale de convolution : $F_1(p).F_2(p) = \mathcal{L}\{ \int_0^t f_1(t-\tau).f_2(\tau)d\tau \} = \mathcal{L}\{ f_1(t) * f_2(t)\}$

8- Fonction amortie : $\mathcal{L}\{ e^{-\alpha t} f(t)\} = F(\alpha + p)$

9- Multiplication par t : $\mathcal{L}\{ t.f(t)\} = -\frac{dF(p)}{dp}$

Transformée Inverse de Laplace

1- Si F(p) ne contient que des pôles distincts : $F(p) = \dfrac{B(p)}{A(p)} = \dfrac{a_1}{p+p_1} + \dfrac{a_2}{p+p_2} + \dots\dots + \dfrac{a_n}{p+p_n}$

Avec : $a_i = \left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_i)\right]_{p=-p_i}$

2- Si F(p) contient des pôles complexes conjugués :

Soient p_1 et p_2 les 2 pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p+p_1)(p+p_2)} + \frac{a_3}{p+p_3} + \dots\dots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec α_1 et α_2 les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=-p_1} = \left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)(p+p_2)\right]_{p=-p_1 \text{ ou } p=-p_2}$

3- Si F(p) contient des pôles multiples :

Soit p_1 le pôle multiple de $F(p)$, r étant l'indice de multiplicité de ce pôle.

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} \qquad A(p) = (p+p_1)^r (p+p_{r+1})(p+p_{r+2})\dots\dots(p+p_n)$$

Alors $F(p)$ s'écrit :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{b_r}{(p+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(p+p_1)^{r-1}} + \dots + \frac{b_1}{(p+p_1)} + \frac{a_{r+1}}{p+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{p+p_{r+2}} + \dots + \frac{a_n}{p+p_n}$$

Avec : $a_k = \left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_k)\right]_{p=-p_k} \quad (k = r+1,\ r+2,\ \dots\dots,\ n)$

Et: $b_r = \dfrac{1}{0!}\left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]_{p=-p_1}$, $b_{r-1} = \dfrac{1}{1!}\left\{\dfrac{d}{dp}\left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$,

$b_{r-j} = \dfrac{1}{j!}\left\{\dfrac{d^j}{dp^j}\left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$, $b_1 = \dfrac{1}{(r-1)!}\left\{\dfrac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[\dfrac{B(p)}{A(p)}(p+p_1)^r\right]\right\}_{p=-p_1}$

Remarque : $\mathcal{L}^{-1}\left[\dfrac{1}{(p+p_1)^n}\right] = \dfrac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_1 t}$