Chapitre 2

Statique des fluide

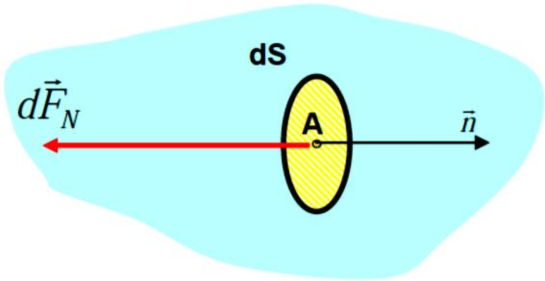
1 Introduction

Lors d'une plongée sous-marine, on constate que la pression de l'eau augmente avec la profondeur. La pression d'eau exercée sur un sous-marin au fond de l'océan est considérable. De même, la pression de l'eau au fond d'un barrage est nettement plus grande qu'au voisinage de la surface. Les effets de la pression doivent être pris en considération lors du dimensionnement des structures tels que les barrages, les sous-marins, les réservoirs… etc. Les ingénieurs doivent calculer les forces exercées par les fluides avant de concevoir de telles structures [1].

Le calcul des presses hydrauliques, la détermination de la distribution de la pression dans un réservoir…etc., sont basés sur les lois et théorèmes fondamentaux de la statique des fluides.

2. Notion de pression en un point d'un fluide

La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :



$P_A = \frac{\|\vec{F}_N\|}{ds}$

Où dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),

$\vec{n}$: Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,

$\vec{F}_N$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur la surface (en Newton),

P_A : pression en A (en Pascal),

Sur la surface de centre A, d'aire dS, orientée par sa normale extérieure$\vec{n}$, la force de pression élémentaire $\overrightarrow{dF}$ s'exprime par :

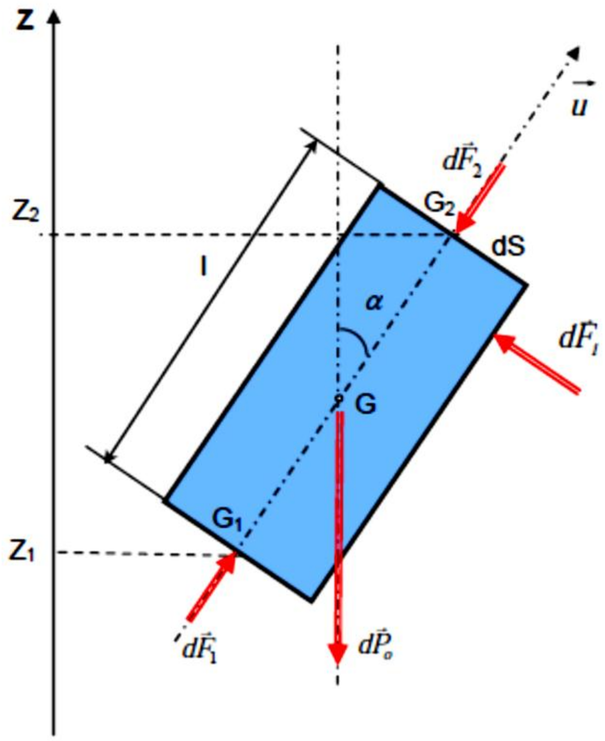
$\overrightarrow{dF_N} = -P_A.ds.\vec{n}$

Remarque :
L'unité internationale de pression est le Pascal : 1Pas=1N/m^2.

En mécanique des fluides on utilise encore très souvent le bar. Le bar est égal à peu près à la pression atmosphérique moyenne : 1 bar = 10^5 Pa.

3. Relation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un élément de volume d'un fluide incompressible (liquide homogène de poids volumique ϖ). Cet élément de volume a la forme d'un cylindre d'axe (G,$\vec{u}$) qui fait un angle α avec l'axe vertical (O, $\vec{Z}$) d'un repère R(O, $\vec{X}$,$\vec{Y}$, $\vec{Z}$). Soit l la longueur du cylindre et soit dS sa section droite.



Soit G_1 d'altitude Z_1 et G_2 d'altitude Z_2, les centres des sections droites extrêmes.

Etudions l'équilibre du cylindre élémentaire, celui-ci est soumis aux :

- Action à distance : son poids : $\vec{P}_0 = -\varpi\, l\, ds\, \vec{Z}$
- Action de courant : force de pression s'exerçant sur :
  - La surface latérale : $\sum \vec{F}_i$
  - Les deux surfaces planes extrêmes : $\overrightarrow{dF_1} = -\,P_1.dS.(-\vec{u}) = P_1.dS.\vec{u}$ et $\overrightarrow{dF_2} = -P_2.dS.\vec{u}$ avec P_1 et P_2 les pressions du fluide respectivement en G_1 et en G_2.

Le cylindre élémentaire étant en équilibre dans le fluide, écrivons que la résultante des forces extérieures qui lui sont appliquées est nulle :

$$\overrightarrow{dP_0} + \sum \overrightarrow{dF_i} + \overrightarrow{dF_1} + \overrightarrow{dF_2} = \vec{0}$$

En projection dur l'axe de symétrie (G,$\vec{u}$) du cylindre,

$$-\varpi.l.dS.\cos\alpha + P_1.dS - P_2.dS = 0$$

Après avoir divisé par *dS* et remarqué que : $l.\cos\alpha = Z_2 - Z_1$

On aura la différence de pression :

$\boxed{\boldsymbol{P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1) = \rho.g.(Z_2 - Z_1)}}$ **Relation fondamentale de l'hydrostatique**

Autre forme de l'équation :

$\frac{P_1}{\varpi} + Z_1 = \frac{P_2}{\varpi} + Z_2$ Ou $\frac{P_1}{\rho.g} + Z_1 = \frac{P_2}{\rho.g} + Z_2$

Comme G_1 et G_2 ont été choisis de façon arbitraire à l'intérieur d'un fluide de poids volumique ϖ, on peut écrire en un point quelconque d'altitude Z, où règne la pression P [1,2]:

$$\frac{P}{\varpi} + Z = \frac{P}{\rho.g} + Z = C^{st}$$

4. Théorème de Pascal

4.1 Enoncé

Dans un fluide incompressible en équilibre, toute variation de pression en un point entraîne la même variation de pression en tout autre point.

4.2 Démonstration

Supposons qu'au point G_1 intervienne une variation de pression telle que celle-ci devienne $P_1 + \Delta P_1$. ΔP_1étant un nombre algébrique. Calculons la variation de pression ΔP_2 qui en résulte en G_1.

Appliquons la relation fondamentale de l'hydrostatique entre G_1 et G_2 pour le fluide [1,2]

- à l'état initial: $P_1 - P_2 = \varpi.(Z_2 - Z_1)$ (1)
- à l'état final : $(P_1 + \Delta P_1) - (P_2 + \Delta P_2) = \varpi.(Z_2 - Z_1)$ (2)

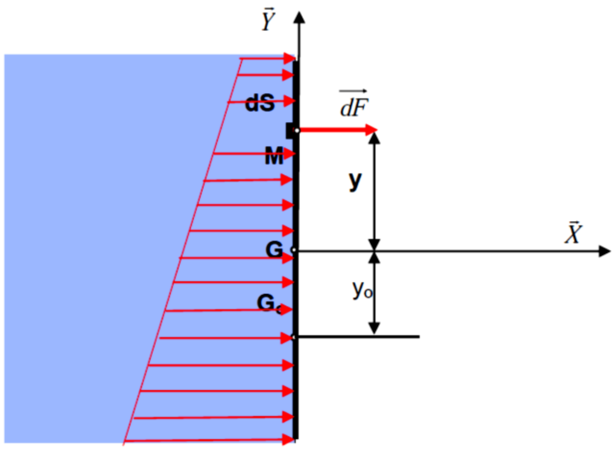
En faisant la différence entre les équations (2) et (1) on obtient :

$\Delta P_1 - \Delta P_2 = 0$ d'où $\Delta P_1 = \Delta P_2$

5. Poussée d'un fluide sur une paroi verticale

5.1 Hypothèses

La paroi verticale possède un axe de symétrie $(G,\vec{Y})$. G est son centre de surface. D'un côté de la paroi il y a un fluide de poids volumique ϖ, de l'autre côté, il y a de l'air à la pression atmosphérique P_{atm}. On désigne par P_G la pression au centre de surface G du coté fluide.



5.2 Eléments de réduction du torseur des forces de pression

Connaissant la pression P_G au point G, la pression P_M au point M est déterminée en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique : $P_M - P_G = \varpi(Y_G - Y_M)$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$ défini sur la figure : $y_G=0$ et $y_M=y$, donc $P_M = P_G - \varpi.y$

Exprimons la force de pression en M : $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

Soit $\{\tau_{possée}\}$ le tenseur associé aux forces de pression relative :

$$\{\tau_{possée}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \int_{(S)} \overrightarrow{dF} \\ \vec{M}_G = \int_s \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF} \end{Bmatrix}_G$$

5.2.1 Résultante

$\vec{R} = \int_{(S)} (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

Que l'on peut écrire en mettent en facteur les termes constantes :

$\vec{R} = \left[P_G \int_{(S)} dS - \varpi \int_{(S)} y.dS\right].\vec{X}$

On note que $\int_{(S)} dS = S$ (aire de la paroi)

$\int_{(S)} y.dS = y_G.S = 0$: Moment statique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \vec{Z})$, donc $\vec{R} = P_G.S.\vec{X}$

5.2.2 Moment

$\vec{M}_G = \int_s \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{dF}$

Dans le repère $(G, \vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})$on peut écrire :

$\overrightarrow{GM} = y.\vec{Y}$ et $\overrightarrow{dF} = (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}$

donc $\vec{M}_G = \int_{(S)} [y.\vec{Y} \wedge (P_G - \varpi.y).dS.\vec{X}]$

sachant que $\vec{Y} \wedge \vec{X} = -\vec{Z}$ donc $\vec{M}_G = \int_{(S)} \left[y.dS - \varpi.\int_{(S)} y^2\, dS\right].(-\vec{Z})$

On sait que $\int_{(S)} y.dS = y_G.S = 0$ et $\int_{(S)} y^2.dS = I_{(G,Z)}$: Moment quadratique de la surface S par rapport à l'axe $(G, \overrightarrow{Z})$passant par le centre de surface G. Donc

$\vec{M}_G = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$

En résumé :

$$\{\tau_{poussée}\} = \begin{Bmatrix} P_G.S.\vec{X} \\ \varpi.I_{(G,\vec{Z}}.\vec{Z} \end{Bmatrix}$$

5.3 Centre de poussée

On cherche à déterminer un point G_0 où le moment résultant des forces de pression est nul. Compte tenu de l'hypothèse de symétrie, si ce point existe il appartient à l'axe (G,$\vec{Y}$) et il est tel que :

$$\vec{M}_{G_0} = \vec{M}_G + \overrightarrow{G_0G} \wedge \vec{R} = \vec{0}$$

Ecrivons alors que : $\overrightarrow{GG_0} \wedge \overrightarrow{R} = \vec{M}_G$

Avec les résultants précédents, on obtient : $y_0.\vec{Y} \wedge P_G.S.\vec{X} = \varpi.I_{(G,\vec{Z})}.\vec{Z}$

Ce qui conduit à

$$y_0 = -\frac{\varpi.I_{(G,\vec{Z})}}{P_G.S}$$

G_0 existe, il s'appelle le centre de poussée de la paroi.

Remarque : le centre de poussée est toujours au-dessous du centre de surface G.

Références

[1] **Riadh ben hamouda.** Notions de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés. Centre de Publication Universitaire. 2008.

[2] **Christophe Ancey.** Notes de cours, Mecanique des fluides. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Version 9.2. 2014

[3] A. **Ammari** .Hydraulique Générale

[4] **Sakir Amiroudine**. **Jean-Luc Battaglia.** Mécanique des fluides. Dunod, Paris, 2011, ISBN 978-2-10-056922-9