Chapitre 3

Dynamique des fluides incompressibles parfaits

1 Introduction

Lorsque le fluide est en mouvement, la pression en tout point du fluide est dépendante de l'altitude et de la masse volumique du fluide (on retrouve ici la relation de l'hydrostatique décrite au chapitre 2) mais aussi de la vitesse du fluide.

On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- l'équation de continuité (conservation de la masse),
- le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie) et,
- le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

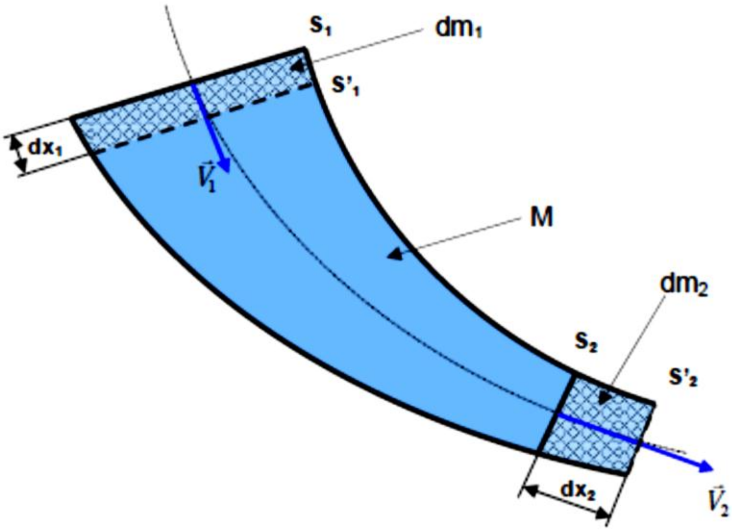
2 Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vecteurs vitesse des particules fluides est constant dans le temps. Notons cependant que cela ne veut pas dire que le champ des vecteurs vitesse est uniforme dans l'espace.

L'écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible est le seul que nous aurons à considérer dans ce cours. Un écoulement non permanent conduirait à considérer les effets d'inertie des masses fluides.

3 Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant *t*,
- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant *t'=(t+dt)*,
- $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_2}$ les vecteurs vitesse d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine.
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps *dt*,
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1,
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2,
- M : masse comprise entre S_1 et S_2,
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1,
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2,

A l'instant *t* : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à (dm_1+ M)

A l'instant *t+dt* : le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à (M+ dm_2).

Par conservation de masse :$dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par M on aura

$dm_1 = dm_2$ Donc $\rho_1 dV_1 = \rho_2 dV_2$ ou encore$\rho_1.S_1.dx_1 = \rho_2.S_2.dx_2$.

En divisant par *dt* on aboutit à :

$\rho_1.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho_2.S_2.\frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 S_1 V_1 = \rho_2 S_2 V_2$.

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$on obtient l'équation de continuité suivante :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \qquad (1)$$

4 Notion de débit

4.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand *dt* tend vers 0.

$q_m = \frac{dm}{dt}$

Où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- *dm* : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps *dt* .

- *dt* : intervalle de temps en (s)

En tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho.S_1.\frac{dx_1}{dt} = \rho.S_2.\frac{dx_2}{dt} \qquad (2)$$

Avec :

$\frac{dx_1}{dt} = V_1 = \left\|\overrightarrow{V_1}\right\|$: vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à traversS_1.

$\frac{dx_2}{dt} = V_2 = \left\|\overrightarrow{V_2}\right\|$: vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à traversS_2.

D'après (2) :

$$\boldsymbol{q_m = \rho.S_1.V_1 = \rho.S_2.V_2} \qquad (3)$$

Où :

q_m : Débit massique en (kg/s)

ρ : Masse volumique en (kg/m^3)

S : Section de la veine fluide en (m^2)

V : Vitesse moyenne du fluide à travers (*S*) en (m/s)

4.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand *dt* tend vers 0.

$q_V = \frac{dV}{dt}$

Où :

- q_V : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- *dm* : volume élémentaire en (m^3), ayant traversé une surface *S* pendant un intervalle de temps *dt*.

- *dt* : intervalle de temps en (s)

D'après la relation (3) et en notant que $dV = \frac{dm}{\rho}$ on peut écrire également que $q_V = \frac{q_m}{\rho}$ soit $q_V = S.V$

4.3.Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$q_m = \rho . q_V$

5 Théorème de Bernoulli – cas d'un écoulement sans échange de travail-

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 3 avec les mêmes notations et les hypothèses suivantes:

- Le fluide est parfait et incompressible.

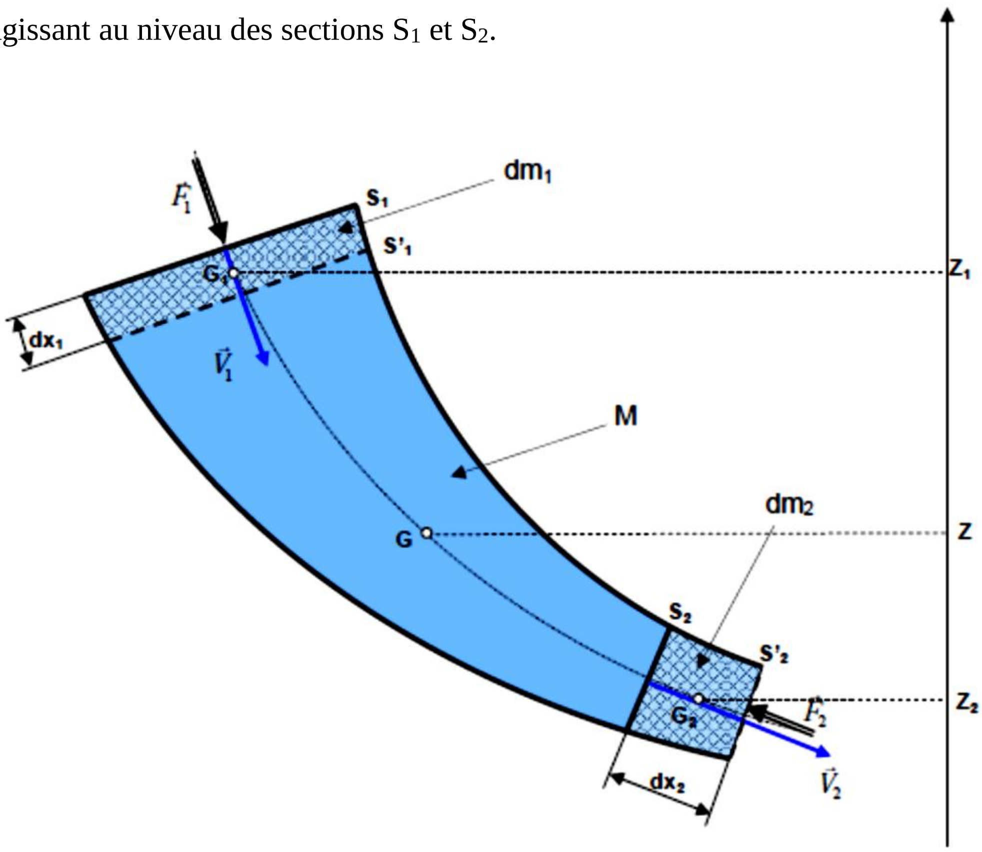
- L'écoulement est permanent.

- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe $\vec{Z}$vertical dirigé vers le haut.

On note Z_1, Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2 et M.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.



A l'instant *t* le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est :

$$E_m = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2}$$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S_1' et S_2'. Son énergie mécanique est :

$$E_m' = E_{pot}' + E_{cin}' = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' : « La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »

$$E_m' - E_m = W_{force\ de\ pression} = F_1dx_1 - F_2dx_2 \Leftrightarrow E_m' - E_m = P_1S_1dx_1 - P_2S_2dx_2$$

$$E_m' - E_m = P_1dV_1 - P_2dV_2$$

En simplifiant on obtient :

$$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}dm_1V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2$$

Par conservation de la masse : $dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. On obtient l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = 0 \qquad (4)$$

L'unité de chaque terme de la relation (4) est le joule par kilogramme (J/kg) D'après la relation (4) on peut alors écrire :

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gZ_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gZ_1$$

6 Théorème de Bernoulli – cas d'un écoulement avec échange de travail-

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe 4 avec les mêmes notations et les mêmes hypothèses. On suppose en plus qu'une machine hydraulique est placée entre les sections S_1 et S_2. Cette machine est caractérisée par une puissance nette P_{net} échangée avec le fluide, une puissance sur l'arbre P_a et un certain rendement η. Cette machine peut être soit une turbine soit une pompe.

- Dans le cas d'une pompe : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{\mathbb{P}_{net}}{\mathbb{P}_a}$$

- Dans le cas d'une turbine : le rendement est donné par l'expression suivante :

$$\eta = \frac{\mathbb{P}_a}{\mathbb{P}_{net}}$$

Entre les instant t et t'=(t+dt), le fluide a échangé un travail net $W_{net} = \mathbb{P}_{net}$. Avec la machine hydraulique. W_{net} est supposé positif s'il s'agit d'une pompe et négatif s'il s'agit d'une turbine.

On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2.

A l'instant t le fluide de masse (dm_1 + M) est compris entre S_1 et S_2. Son énergie mécanique est : $E_m = E_{pot} + E_{cin} = (dm_1.g.Z_1 + MgZ) + \frac{1}{2}dm_1V_1^2 + \int_{S_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2}$

A l'instant t'=(t+dt) le fluide de masse (M+dm_2) est compris entre S'_1 et S'_2. Son énergie mécanique est :

$$E'_m = E'_{pot} + E'_{cin} = (MgZ + dm_2.g.Z_2) + \int_{S_1}^{S_2}\frac{dm.V^2}{2} + \frac{1}{2}dm_2V_2^2$$

On applique le théorème de l'énergie mécanique au fluide entre t et t' :« La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces extérieures. »,en considérant cette fois ci le travail de la machine hydraulique.

$$E'_m - E_m = F_1dx_1 - F_2dx_2 + \mathbb{P}_{net}.dt$$

$$E'_m - E_m = P_1S_1dx_1 - P_2S_2dx_2 + \mathbb{P}_{net}.dt = P_1dV_1 - P_2dV_2 + \mathbb{P}_{net}.dt$$

En simplifiant on aura :

$$dm_2.g.Z_2 + \frac{1}{2}dm_2V_2^2 - dm_1.g.Z_1 - \frac{1}{2}dm_1V_1^2 = \frac{P_1}{\rho_1}.dm_1 - \frac{P_2}{\rho_2}.dm_2 + \mathbb{P}_{net}.dt$$

Par conservation de la masse :$dm_1 = dm_2 = dm$ et puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. On aboutit à l'équation de Bernoulli :

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \frac{P_2 - P_1}{\rho} + g(Z_2 - Z_1) = \frac{\mathbb{P}_{nett}}{q_m} \qquad (5)$$

7 Théorème d'Euler

<u>Enoncé</u>

La résultante ($\sum \vec{F}_{exter}$) des actions mécaniques extérieures exercées sur un fluide isolé (fluide contenu dans l'enveloppe limitée par S_1 et S_2) est égale à la variation de la quantité de mouvement du fluide qui entre en S_1 à une vitesse $\overrightarrow{V_1}$ et sort par S_2 à une vitesse $\overrightarrow{V_2}$.

$$\sum \vec{F}_{exter} = q_m(\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1})$$

Références

[1] **Riadh ben hamouda.** Notions de mécanique des fluides, cours et exercices corrigés. Centre de Publication Universitaire. 2008.

[2] **Christophe Ancey.** Notes de cours, Mecanique des fluides. École Polytechnique Fédérale de Lausanne. Version 9.2. 2014

[3] A. **Ammari** .Hydraulique Générale

[4] **Sakir Amiroudine**. **Jean-Luc Battaglia.** Mécanique des fluides. Dunod, Paris, 2011, ISBN 978-2-10-056922-9