

# Chapitre

## 2

### *Écoulement unidimensionnel adiabatique stationnaire d'un fluide compressible*

#### 2.1 Vitesse du son

Le son est produit par des variations faibles de la pression du milieu dans lequel il se propage. Ainsi, la vitesse du son correspond à la propagation de ces variations de pression. Imaginons un milieu fluide, un gaz par exemple, dans lequel on observe localement une différence de pression  $dP$  entre la partie droite 1 et la partie gauche 2 du milieu (figure 2-1) et admettons que la zone de variation soit plane et de dimension infinie. L'onde sonore, se déplace, par définition, à la vitesse du son  $V_s$ . Dans le mouvement relatif onde sonore-fluide, le fluide se déplace par rapport à l'onde à la même vitesse. La section  $\Omega$  de part et d'autre de l'onde de pression étant la même, l'équation (1.3) chapitre 1 s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial v_s}{v_s} = 0 \tag{2.1}$$

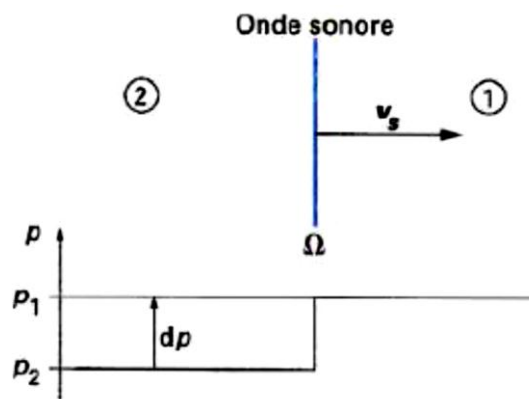


Fig. 2-1 : Propagation d'une onde sonore.

En admettant que la traversée de l'onde de pression se fasse de manière réversible, donc sans frottement compte tenu notamment de la valeur infiniment petite de l'épaisseur du front d'onde, l'équation (1.6) chapitre 1 devient, en négligeant la pesanteur ou en supposant que l'onde se déplace horizontalement :

$$V_s dV_s + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (2.2)$$

La combinaison de ces deux équations [(1) $V_s^2$  – (2)] donne :

$$V_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}} \quad (2.3)$$

Compte tenu que l'on a affaire à un phénomène local rapide, on peut admettre que ce phénomène est adiabatique. Avec l'hypothèse de réversibilité, il est donc isentropique. En admettant que le fluide considéré soit un gaz parfait idéal (*gaz parfait* pour lequel le coefficient  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ , (rapport des capacités thermiques massiques à pression et à volume constants, est constant), l'équation de la transformation isentropique est :

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = cst \quad (2.4)$$

Soit

$$\frac{dP}{d\rho} = \gamma \frac{P}{\rho}$$

Dans ce cas, la vitesse du son a pour expression :

$$V_s = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho}} \quad (2.5)$$

Ou, en tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits :

$$V_s = \sqrt{\gamma r T} \quad (2.6)$$

Si le fluide n'est pas un gaz parfait, en considérant toujours la transformation isentropique, on peut écrire, d'une manière générale :

$$V_s^2 = \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Or, en notant que le coefficient isentropique vaut, par définition :

$$k_s = -\frac{v}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_s = \frac{\rho}{P} \left( \frac{\partial P}{\partial \rho} \right)_s$$

Où  $v = \frac{1}{\rho}$  est le volume massique

On a

$$V_s^2 = k_s \frac{P}{\rho} \quad (2.7)$$

La vitesse du son peut être reliée au coefficient de compressibilité isentropique  $K_s$  du fluide:

$$K_s = -\frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_s = \frac{1}{\rho K_s} \quad (2.8)$$

Soit avec (2.7) 
$$V_s^2 = \frac{1}{\rho K_s} = \frac{\bar{v}}{\bar{M}} \frac{1}{K_s}$$

Où  $\bar{v}$  et  $\bar{M}$  sont respectivement le volume molaire et la masse molaire du fluide.

La vitesse du son est donc d'autant plus faible que la compressibilité du fluide est plus grande.

### 2.2 Condition de stagnation

En supposant que le fluide compressible se décharge d'un réservoir de très grandes dimensions; les conditions dans cet état (générateur) seront appelées les conditions initiales, ce qui entraîne  $V = V_0 \approx 0$  (avec les indices 0 ou i marquant les propriétés au réservoir), et si on considère un gaz parfait :  $C_p = \left. \frac{\partial h}{\partial T} \right|_p$  et  $C_p = cst$

On aura :  $C_p T_i = C_p T_0 = C_p T + \frac{1}{2} V^2$

Sachant que :  $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ ,  $C_p - C_v = R \Rightarrow C_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$

Qui donne  $\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_0}{\rho_0} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} V^2$

Et puisque la vitesse du son pour un gaz parfait est donnée par :

$$a^2 = \gamma R T = \gamma \frac{P}{\rho}, \text{ on obtient :}$$

$$\frac{a_0^2}{\gamma - 1} = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} V^2 \quad (2.9)$$

Où  $a_0$  et  $a$  dénotent respectivement les vitesses du son aux conditions initiales (au réservoir) et statique.

En introduisant le nombre de Mach comme paramètre ( $M = \frac{V}{a}$ ), l'équation (2.9) peut être

réécrite comme suit :  $\frac{a_0^2}{a^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$

Et avec  $a^2 = \gamma R T$  le rapport des températures totale et statique est :

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2$$

Où :  $T_0$  : la température totale

$T$  : la température statique.

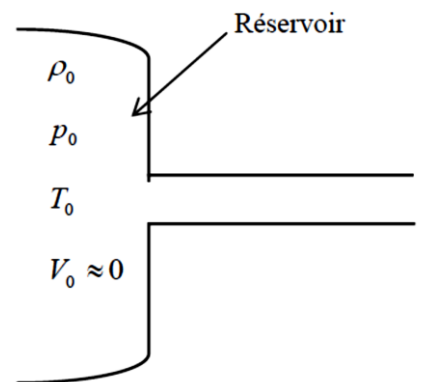


Fig. 2-2 : Conditions initiales.

$M$  : le nombre de Mach.

Si l'écoulement est isentropique  $\frac{P}{\rho^\gamma} = cst$ , on peut écrire :

$$\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho}\right)^{\gamma-1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2$$

Où  $P_0$  et  $\rho_0$  dénotent respectivement la pression et la densité isentropiques de stagnation.

Pour établir la relation entre les caractéristiques de deux points (1) et (2) d'un même écoulement :

$$\text{- En (1) } \frac{T_0}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2$$

$$\text{- En (2) } \frac{T_0}{T_2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2$$

$$\text{Donc : } \frac{T_2}{T_1} = \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}$$

De la même façon on peut établir des relations entre les pressions et les masses volumiques.

Remarque :

Si  $M = 1$  ( $V = a$ ), l'état de l'écoulement est appelé état critique.

Il est déterminé en fonction de l'état générateur :  $\frac{T_0}{T_c} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} = \frac{\gamma+1}{2}$

## 2.3 Différentes formes de l'équation d'énergie

### 2.3.1 Mouvement permanent d'un fluide compressible non visqueux

#### 2.3.1.1 Equation de l'écoulement d'un fluide compressible non visqueux

L'équation générale de l'écoulement d'un fluide non visqueux s'écrit pour une unité de masse :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P \quad (2.10)$$

$\vec{F}$  : force volumique,  $\vec{V}$  : vitesse,  $\vec{\nabla} T = \overrightarrow{grad} T$ ,  $\vec{\nabla} \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \text{div} \vec{V}$ ,

$\nabla \nabla T = \nabla^2 T = \Delta T$  (la placcien)

Si l'écoulement est permanent  $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = 0$  dans un fluide compressible,  $\vec{F}$  (force active) due en générale à la pesanteur est négligeable par rapport à la force de pression l'équation (2.10) devient :

$$\frac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p \quad (2.11)$$

Multipliant scalairement par un déplacement  $\vec{ds} = \vec{V}dt$  pris selon la trajectoire du fluide

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 \cdot \vec{ds} + \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} + \frac{1}{\rho}\vec{ds} \cdot \vec{\nabla}p &= \vec{0} \\ \vec{ds} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} &= \vec{V}dt(\vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V}) = 0 \text{ car le vecteur } \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} \perp \vec{V} \cdot dt \\ \Rightarrow \frac{1}{2}\vec{\nabla}V^2 \cdot \vec{ds} + \frac{1}{\rho}\vec{ds} \cdot \vec{\nabla}p &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

$\Rightarrow \vec{\nabla}\frac{1}{2}V^2 + \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = 0$  on peut écrire cette équation sous la forme :

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \frac{1}{\rho}dP &= 0 \quad (2.13) \\ \Rightarrow \int d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int \frac{dP}{\rho} &= cst \Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \quad (I) \end{aligned}$$

#### a) *Interpretation énergétique*

Intégrant (2.13) entre deux points 1 et 2 d'un fluide

$$\int_{V_1}^{V_2} d\left(\frac{1}{2}V^2\right) + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0 \Rightarrow \frac{V_2^2 - V_1^2}{2} + \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = 0$$

$$\rho = \frac{1}{v}, \quad \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{\rho} = w_T|_1^2 \text{ travail de transvasement par kg de (1) à (2)}$$

Donc l'équation exprime la conservation de l'énergie mécanique pour l'un de masse de fluide, la diminution de l'énergie cinétique entre deux points du même filet fluide ( $\frac{V_2^2 - V_1^2}{2}$ ) est égale au travail de transvasement reçu par le fluide.

#### b) *Cas d'un écoulement isentropique de gaz parfait*

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dP}{\rho} = cst \text{ Écoulement permanent compressible non visqueux.}$$

$$\frac{P}{\rho} = rT, \quad \frac{P}{\rho^\gamma} = cst, \quad P = A \cdot \rho^\gamma \Rightarrow dP = A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{A\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho}{\rho} = \frac{1}{2}V^2 + \int A\gamma\rho^{\gamma-2}d\rho = cst$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} = \frac{1}{2}V^2 + A \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\rho^\gamma}{\rho} = cst \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{P}{\rho} = cst \quad (II)$$

Dite relation de Barré de Saint-Venant ou (BSV) que l'on peut aussi mettre sous la forme :

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} rT = cst$$

Et comme  $C_p = \frac{\gamma r}{\gamma-1}$  chaleur massique spécifique à pression constante.

En intégrant entre deux points 1 et 2 d'un écoulement on peut mettre la relation sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left( \frac{P_2}{\rho_2} - \frac{P_1}{\rho_1} \right) = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \frac{P_2 \rho_1}{\rho_2 P_1} - 1 \right] \\ \frac{V_1^2 - V_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} - 1 \right] = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P_1}{\rho_1} \left[ \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right] \end{aligned} \quad (\text{III})$$

### 2.3.1.2 Equation générale d'écoulement adiabatique d'un fluide compressible visqueux

L'expression générale du premier principe de la thermodynamique appliqué à l'unité de masse d'un écoulement est :

$$(Q_e)_1^2 = H_2 - H_1 + W_{V_2} - W_{V_1} + W_{z_2} - W_{z_1}$$

$Q_e$  : chaleur échange avec l'extérieur.

$H$  : enthalpie du fluide

$W_V$  : Énergie cinétique du fluide

$W_z$  : Énergie potentielle du fluide due à la pesanteur (négligeable).

Pour un écoulement adiabatique ( $Q_e = 0$ ) cette équation devient :

$$H + \frac{V^2}{2} = cst$$

La somme  $H + \frac{V^2}{2}$  est appelée énergie totale du fluide qui est constante dans un écoulement adiabatique. Elle pourra aussi s'appliquer à la vapeur d'eau ou à un fluide frigorigène.

#### a) Gaz parfait en écoulement adiabatique irréversible

Pour un gaz parfait  $H = C_p T = \frac{\gamma}{\gamma - 1} rT$  l'équation de l'écoulement adiabatique s'écrit :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{P}{\rho} + \frac{V^2}{2} = C^{st}, \quad C_p T + \frac{V^2}{2} = C^{st}$$

### 2.3.1.3 Equation générale pour l'écoulement non permanent d'un fluide compressible visqueux

L'équation vectorielle de l'écoulement est :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} V^2 + \vec{\nabla} \wedge \vec{V} \wedge \vec{V} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P + \vec{f}_\eta \quad (\text{V})$$

En multipliant scalairement par un élément de trajectoire  $\overrightarrow{ds} = \overrightarrow{V} dt$ , on obtient, en négligeant  $\overrightarrow{F}$  (due à la pesanteur) :

$$\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} V^2 = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta$$

Le premier terme  $\overrightarrow{V} \cdot dt \cdot \frac{\partial \overrightarrow{V}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2} \right) dt$  représente la variation d'énergie cinétique pendant le temps  $dt$ .

Le premier membre de l'équation de l'énergie devient donc :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{V^2}{2} \right) dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} \left( \frac{V^2}{2} \right) = d \left( \frac{V^2}{2} \right) \quad (a)$$

C'est-à-dire  $d \left( \frac{V^2}{2} \right)$ , différentielle totale de l'énergie cinétique par unité de masse.

- Nous poserons  $\overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{f}_\eta = dW_f = -dQ_f$  (b) : représente le travail des forces de viscosité dans le déplacement  $ds$  toujours négatif. L'énergie correspondante apparaît sous forme d'une quantité de chaleur  $dQ_f$ .
- Pour le travail des forces de pression  $-\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P$ , partant de

$$dP = \frac{\partial P}{\partial t} dt + \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P \Rightarrow -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt - \frac{dP}{\rho}$$

Compte tenu de l'expression différentielle de l'enthalpie

$$dH = TdS + v dP = TdS + \frac{dP}{\rho}$$

$$\text{On obtient ensuite : } -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{ds} \cdot \overrightarrow{\nabla} P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH \quad (c)$$

En remplaçant (a), (b) et (c) dans (V) on obtient :

$$d \left( \frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + TdS - dH - dQ_f$$

Mais d'après la définition de l'entropie  $dS = \frac{dQ_c + dQ_f}{T}$

$$dQ_c = TdS - dQ_f$$

On obtient donc finalement :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} dt + d \left( H + \frac{V^2}{2} \right) = dQ_c \quad (VII)$$

On vérifie immédiatement que pour un écoulement permanent  $\left( \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \right)$  et

adiabatique ( $dQ_c = 0$ ) on retrouve l'équation  $H + \frac{V^2}{2} = C^{st}$

## 2.4 Ecoulement stationnaire isentropique à travers une conduite à section variable

L'écoulement est approximativement unidimensionnel (figure 2-3) avec  $V \approx V(x)$ , ce qui simplifie la théorie.

Pour l'écoulement unidimensionnel stationnaire, l'équation de continuité informe que le débit massique soit constant :  $\dot{m} = \rho VA = C^{st}$

En différentiant logarithmiquement, on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\rho} + \frac{\partial V}{V} + \frac{\partial A}{A} = 0 \quad (2.14)$$

L'équation d'Euler décrivant le mouvement stationnaire le long d'une ligne de courant est :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dP}{d\ell} + \frac{d}{d\ell} \left( \frac{1}{2} V^2 \right) = 0 \quad \text{où : } \ell \text{ est l'abscisse curviligne.}$$

$$\text{Ou bien :} \quad \frac{dP}{\rho} + V dV = 0 \quad (2.15)$$

La vitesse du son est  $a^2 = \frac{dP}{d\rho}$  d'où  $dP = a^2 d\rho$

En éliminant  $dP$  dans l'équation (2.15), on obtient :  $\frac{a^2 d\rho}{\rho} + V dV = 0 \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{V dV}{a^2}$

Puisque  $M^2 = \frac{V^2}{a^2}$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dV}{V} \quad (2.16)$$

Si on substitue  $\frac{d\rho}{\rho}$  dans l'équation (2.14), on aura :

$$\frac{\partial V}{V} = \frac{1}{(M^2 - 1)} \frac{\partial A}{A} \quad (2.17)$$

Qui est la première équation de la théorie d'Hugoniot donnant la relation entre le changement de la section d'une canalisation et la vitesse de l'écoulement compressible.

Aussi on a d'après l'équation (2.15) :

$$\frac{\partial V}{V} = -\frac{1}{M^2 a^2} \frac{\partial \rho}{\rho}$$

et puisque  $a^2 = \frac{\gamma P}{\rho}$

$$\frac{\partial V}{V} = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial P}{P} \quad (2.18)$$

Qui représente la deuxième équation d'Hugoniot.

L'inspection de ces deux équations (2.18) et (2.17) nous révélera un aspect fascinant de l'écoulement compressible : les variations des propriétés ont des sens opposés pour les écoulements subsonique et supersonique à cause du terme  $M^2 - 1$ . Il y'a quatre combinaisons du changement de section et du nombre de Mach.



1. Si  $M = 1$  ; écoulement sonique, puisque une accélération infinie est physiquement impossible (équation 2. 17), donc  $dA = 0$ , qui signifie mathématiquement une section minimale (col) ou maximale (figure 2-3), mais ce dernier cas (maximum) n'a pas de sens physique. Par conséquent, si l'écoulement est sonique, il aura lieu dans la section minimale de la canalisation (appelée le col).
2. Si  $M < 1$  ; écoulement subsonique, quand la section  $A$  augmente la vitesse  $V$  diminue et vice-versa.
3. Si  $M > 1$  ; écoulement supersonique, toute augmentation de la section  $A$  implique une augmentation de la vitesse  $V$  et vice-versa.

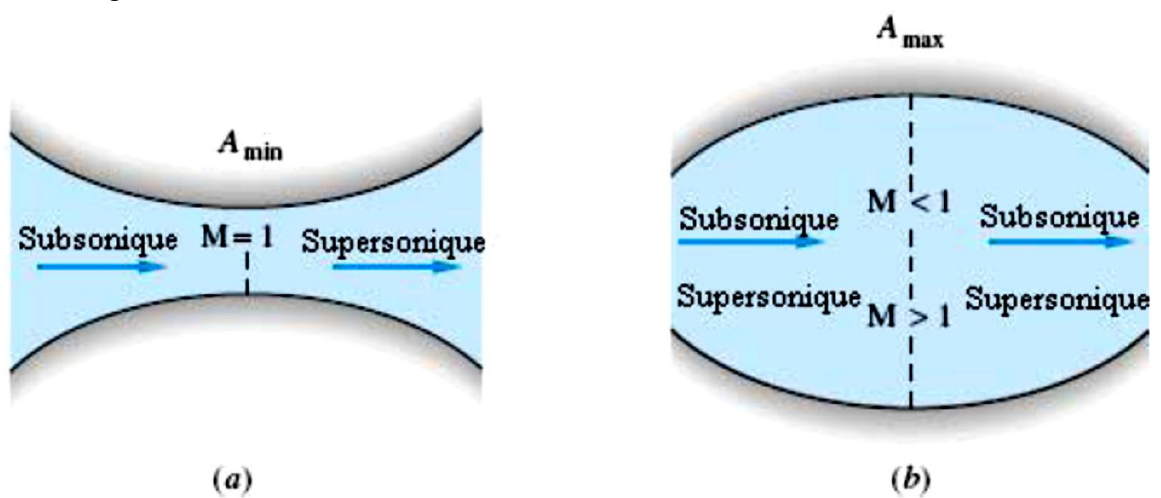


Fig. 2-3 : Écoulement compressible dans une canalisation de section variable : (a) l'écoulement accélère graduellement de l'état subsonique au supersonique; (b) l'écoulement dans cette configuration n'est plus sonique de point de vue physique.

4. Ainsi d'après l'équation (2.18), toute variation de la vitesse  $V$  entraîne une variation de la pression  $P$  dans le sens inverse. La table suivante récapitule les quatre cas déjà cités :

Propriétés	Écoulement			
	Subsonique		Supersonique	
Section	-	+	-	+
Vitesse / nombre de Mach	+	-	-	+
Densité / pression / température	-	+	+	-

### 2.4.1 Débit massique d'une canalisation de section variable

Le point essentiel dans l'étude des écoulements compressibles dans les canalisations avec changement de section, est la détermination du débit massique  $\dot{m}$  en fonction des autres propriétés de l'écoulement, on a l'équation :  $\dot{m} = \rho VA$

Substituons  $V$  par son expression d'après l'équation de Saint-Venant :

$$\dot{m} = \rho A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]}$$

Et puisque l'écoulement est isentropique :  $\frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \frac{P}{\rho^\gamma} = c^{st} \Rightarrow \rho = \rho_0 \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \dot{m} &= \rho_0 A \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right]} \\ &\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \\ &\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}} \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \\ &\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A V_{max} \psi \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\text{Avec : } V_{max} = V_l = \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{P_0}{\rho_0}}$$

$$\text{Et : } \psi = \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \sqrt{1 - \left( \frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

$$\text{Pesons } \frac{P}{P_0} = x \text{ donc : } \frac{d\psi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{P_0} = \left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Quand  $\frac{P}{P_0}$  a la valeur  $\left( \frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$ , la fonction  $\psi$  est maximum, puisque  $\psi = \psi\left(\frac{P}{P_0}\right)$  s'annule si  $P = 0$  et  $P = P_0$  (figure 2-4).

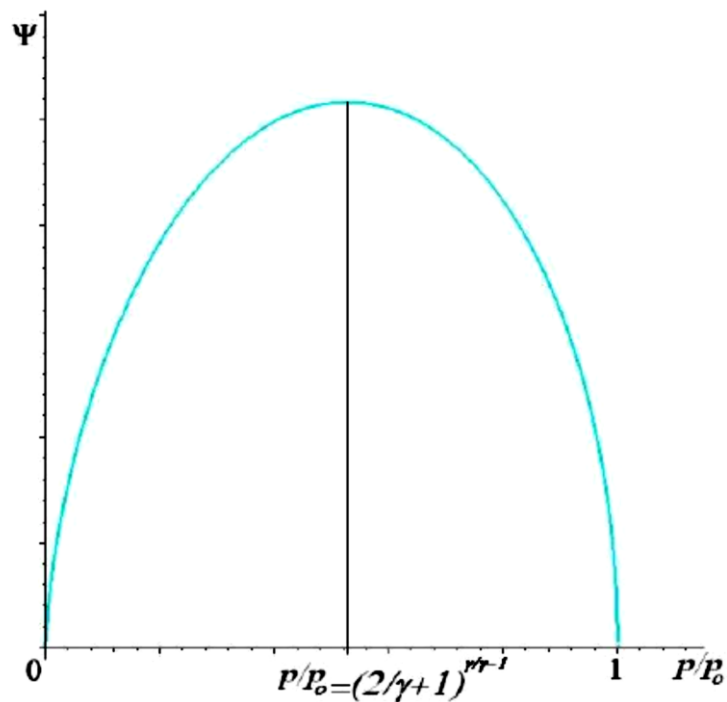


Fig.2-4 : Tracé de la fonction

La pression correspondante est appelée pression critique et s'écrit :  $\frac{P^*}{P_0} = \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

Elle s'obtiendra au col d'après la théorie d'Hugoniot, et le débit massique maximal sera :

$$\dot{m}_{max} = \rho_0 A V_{max} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma+1}}$$

$$\Rightarrow \dot{m} = \rho_0 A \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}} \quad (2.20a)$$

Aussi au col on a :  $a^* = V^*$  où  $V^* = a^* = a_0 \sqrt{\frac{2}{\gamma+1}}$

Et le débit massique critique sera:  $\dot{m}_{max} = \rho^* A^* V^*$

$$\Rightarrow \dot{m}_{max} = A^* \rho_0 a_0 \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (2.20b)$$

Cette expression donne le débit massique maximum au col de la tuyère, où règne les conditions critiques. Pour  $\gamma = 1.4$  on a :  $\Rightarrow \dot{m}_{max} = 0.685 A^* \rho_0 a_0$

## 2.5 Tuyère convergente-divergente

Une tuyère convergente-divergente (aussi appelée tuyère de Laval) est représentée dans la figure (2.5a). Si la pression en aval  $P_b$  est suffisamment faible, il existera un

écoulement supersonique dans la portion divergente de la tuyère aussi qu'une variété de conditions de choc pourra exister.

- ❖ Pour les cas A et B (figure 2-5b), la pression  $P_b$  n'est pas suffisamment faible pour induire un écoulement sonique au col, et l'écoulement est subsonique à travers l'ensemble de la tuyère (convergente-divergente). La distribution de pression est calculée d'après les relations isentropiques déjà établies. La pression de sortie est  $P_e = P_b$  et le jet est subsonique.
- ❖ Pour le cas C, le rapport des sections  $\frac{A_e}{A_{col}}$  est exactement égal à  $\frac{A_e}{A^*}$  pour un nombre de Mach subsonique à la sortie. Le col devient sonique, et le débit massique atteint son maximum (figure 2-5c). l'écoulement dans le reste de la tuyère est subsonique, le jet inclus et  $P_e = P_b$ .

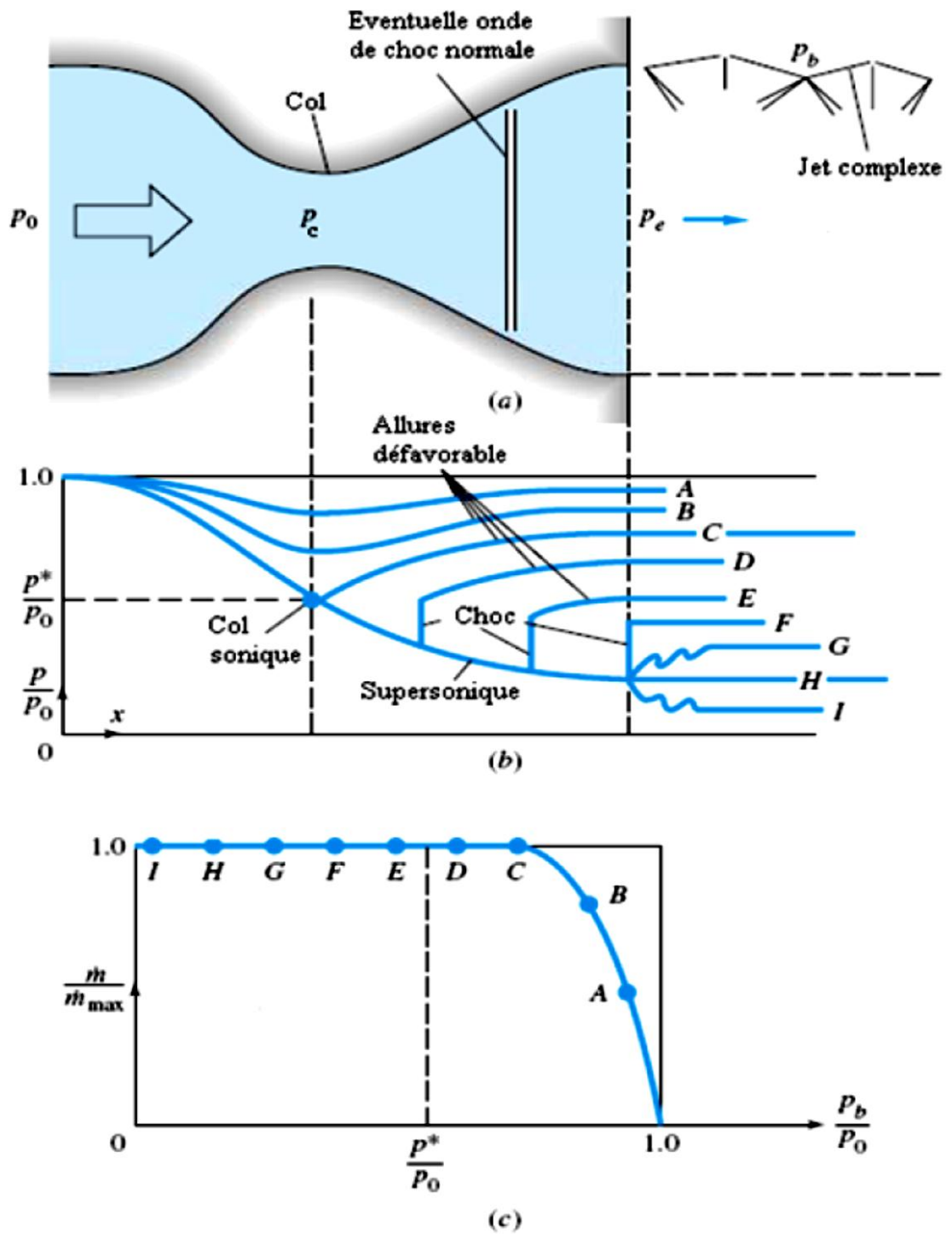


Fig. 2-5 : Tuyère convergente-divergente : (a) Géométrie de la tuyère et configurations possibles; (b) distribution des pressions causée par divers pressions aval  $P_b$  ; (c) débit massique.

- 
- ❖ Supposons dans ce cas que  $P_b$  se trouve entre les cas C et H, qui est impossible d'après les relations de l'écoulement isentropique. Alors, les pressions  $P_b$  des cas D à F ont lieu (figure 2-5b). le col reste suffoqué à la valeur sonique. Le débit massique garde sa valeur maximale (figure 2-5c). A la pression en aval du cas F l'onde de choc normale apparaîtra à la sortie de la tuyère. Dans le cas G, l'écoulement présentera des séries complexes d'ondes de choc obliques jusqu'il atteint la pression  $P_b$ .
  - ❖ Finalement dans le cas I,  $P_b$  est inférieure à celle du cas H, mais la tuyère est suffoquée et ne répond plus. L'écoulement à la sortie s'étend en de complexes séries d'ondes supersoniques.