

Chapitre

6

Écoulement de Rayleigh

Cet écoulement, appelé écoulement de Rayleigh, qui a lieu à $A = C^{te}$ en respectant la réversibilité, ne peut se développer qu'avec un échange thermique q contrôlé. Cette nécessité le rend peu fréquent en pratique.

6.1 Écoulement compressible dans les conduites avec transfert de chaleur et sans friction (Théorie de RAYLEIGH)

L'addition ou l'enlèvement de chaleur ont un effet intéressant sur un écoulement compressible. Ici nous limitons l'analyse pour l'écoulement avec transfert de chaleur sans friction dans un conduit de section constante.

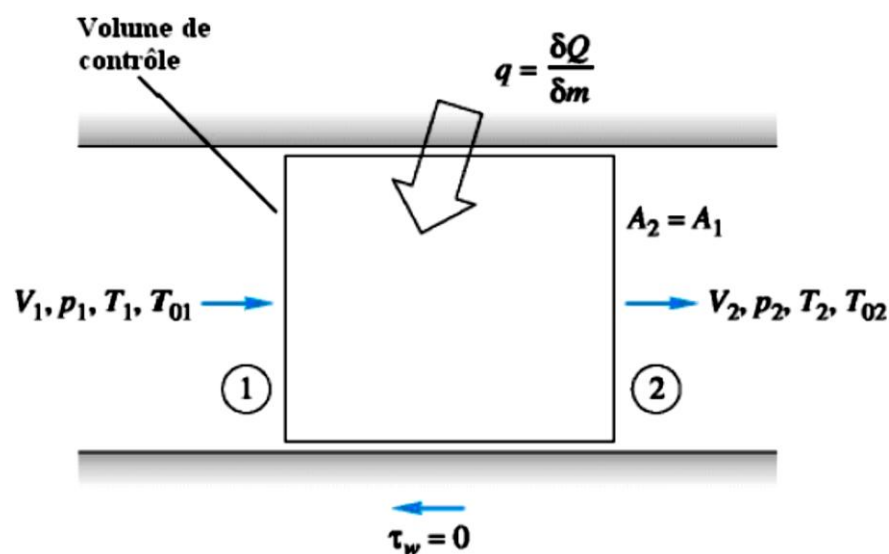


Fig. 6-1 : Volume de contrôle élémentaire pour un écoulement sans friction dans une conduite de section constante avec transfert de chaleur.

Considérez le volume de contrôle élémentaire de la conduite dans la figure 6-1. Entre des sections 1 et 2 une quantité de chaleur δQ est ajoutée (ou enlevée) à chaque masse élémentaire δm passant. Sans friction ou changement de section,

6.2 Équations de l'écoulement de Rayleigh

Les équations générales appliquées à ce cas particulier s'écrivent :

— continuité

$$\rho_1 V_1 = \rho_2 V_2 = \dot{m} = C^{st} \quad (6.1)$$

Ou encore :
$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (6.1a)$$

— bilan de la quantité de mouvement :

$$VdV + \frac{dP}{\rho} = 0 \quad (6.2)$$

— bilan de l'énergie :

$$q_{12} = \Delta h_{12} + \Delta E_{c12} \quad (6.3)$$

Ou :
$$\delta q = dh + VdV \quad (6.4)$$

— équation d'état du fluide :

$$dh = C_p dT \quad (6.5)$$

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT}{T} \quad (6.6)$$

6.3 Évolution du fluide en diagramme entropique

La variation d'entropie d'un gaz parfait idéal s'écrit :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} - r \ln \frac{P}{P_1} \quad (6.7)$$

Où la référence 1 concerne l'état du fluide dans la section 1 de référence.

Dans cette expression, pour exprimer le rapport de pression $\frac{P}{P_1}$ en fonction de \dot{m} , de T_1 , de P_1 et de T , on combine les relations (6.2) et (6.1a), ce qui donne :

$$\frac{d\rho}{\rho} - \frac{dP}{\rho V^2} = 0 \quad (6.8)$$

Soit, avec l'équation (6.1) : $\dot{m}^2 \frac{d\rho}{\rho^2} - dP = 0$

L'intégration de cette relation donne :

$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = C^{st} \quad (6.9)$$

Ou :
$$P + \frac{\dot{m}^2}{\rho} = P_1 + \frac{\dot{m}^2}{\rho_1} \quad (6.10)$$

En utilisant l'équation d'état, on obtient :
$$P + \frac{\dot{m}^2 r T}{P} = P_1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1}$$

Soit :
$$\left(\frac{P}{P_1}\right)^2 - \frac{P}{P_1} \left(1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}\right) + \frac{\dot{m}^2 r T}{P_1^2} = 0$$

Ainsi, le rapport $\frac{P}{P_1}$ est donné par la relation :

$$\frac{P}{P_1} = \frac{1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}\right)^2 - 4 \frac{\dot{m}^2 r T}{P_1^2}}}{2} \tag{6.11}$$

En posant $\alpha = \frac{\dot{m}^2 r T_1}{P_1^2}$, l'équation de l'écoulement est :

$$s - s_1 = C_p \ln \frac{T}{T_1} + r \ln 2 - r \ln \left[1 + \alpha \pm \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4 \alpha \frac{T}{T_1}}\right] \tag{6.12}$$

La courbe correspondante est représentée sur la figure 6-2 pour une valeur de α

6.4 Ligne de Rayleigh et la nature de l'écoulement

La combinaison de l'équation de l'énergie (6.4), de l'équation d'état (6.5) et de la relation entre l'échange thermique et la variation d'entropie en transformation réversible :

$$\delta q = T ds \tag{6.13}$$

Permet d'écrire :

$$T ds = C_p dT + V dV \tag{6.14}$$

En combinant cette relation avec l'équation suivante, dérivée de l'équation de continuité,

$$V dV = -V^2 \frac{d\rho}{\rho}$$

On a :

$$T ds = C_p dT - V^2 \frac{d\rho}{\rho} \tag{6.15}$$

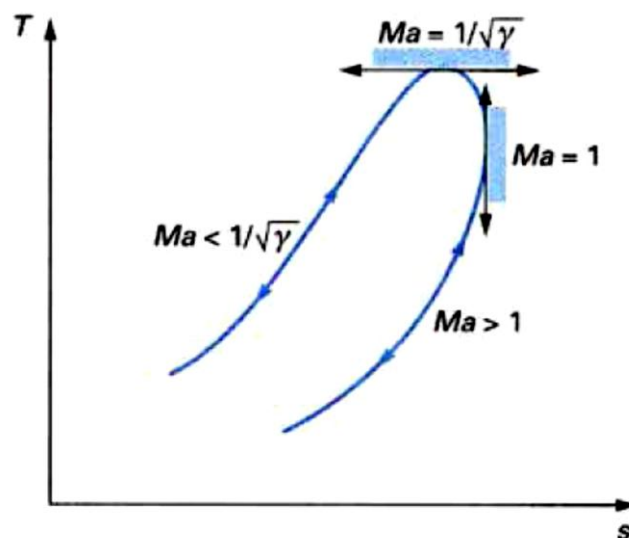


Fig. 6-2 : Évolution des caractéristiques thermodynamiques du fluide lors d'un écoulement de Rayleigh

L'équation $ds = C_v \frac{dT}{T} - r \frac{d\rho}{\rho}$, donnant la variation d'entropie d'un gaz parfait, permet d'écrire :

$$-\frac{d\rho}{\rho} = \frac{ds}{r} - \frac{C_v}{r} \frac{dT}{T} \quad (6.16)$$

En combinant les relations (6.15) et (6.16), on obtient :

$$ds \left(T - \frac{v^2}{2} \right) = \left(C_p - \frac{v^2}{rT} C_v \right) dT \quad (6.17)$$

Ou, en introduisant la vitesse du son $a = \sqrt{\gamma r T}$ et le nombre de Mach M :

$$\frac{dT}{ds} = \frac{T}{C_p} \frac{1 - \gamma M^2}{1 - M^2} \quad (6.18)$$

Cette équation montre que :

- lorsque $M=1$ (écoulement sonique), $\frac{dT}{ds} = \infty$; ainsi, sur la courbe de Rayleigh, le point à tangente verticale correspond à un régime d'écoulement sonique;
- lorsque $M = \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$, la tangente à la courbe $T(s)$ est horizontale et l'écoulement est subsonique il le reste dans toute la partie supérieure de la courbe de Rayleigh où $M < \sqrt{\frac{1}{\gamma}}$;
- dans la partie inférieure de la courbe de Rayleigh, $M > 1$, l'écoulement est supersonique et la pente de la courbe est positive.

Dans ce type d'écoulement, si les conditions amont P_1 , T_1 et le débit \dot{m} sont constants, le point représentatif de l'état du fluide peut évoluer dans le sens s croissant ou décroissant puisque l'écoulement est réversible par définition. Lorsque l'entropie augmente, il y a apport de chaleur et augmentation de la vitesse si l'écoulement est subsonique ou diminution si l'écoulement est supersonique. Un refroidissement entraîne une chute de la vitesse en écoulement subsonique, une augmentation en écoulement supersonique.

TABLE I : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0 / T_0^*	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	p_0 / p_0^*
0.00	0.0000	2.4000	0.0000	∞	1.2679
0.02	0.0019	2.3987	0.0023	1042.2500	1.2675
0.04	0.0076	2.3946	0.0092	261.0000	1.2665
0.06	0.0171	2.3880	0.0205	116.3241	1.2647
0.08	0.0302	2.3787	0.0362	65.6875	1.2623
0.10	0.0468	2.3669	0.0560	42.2500	1.2591
0.12	0.0666	2.3526	0.0797	29.5185	1.2554
0.14	0.0895	2.3359	0.1069	21.8418	1.2510
0.16	0.1151	2.3170	0.1374	16.8594	1.2461
0.18	0.1432	2.2959	0.1708	13.4434	1.2406
0.20	0.1736	2.2727	0.2066	11.0000	1.2346
0.22	0.2057	2.2477	0.2445	9.1922	1.2281
0.24	0.2395	2.2209	0.2841	7.8171	1.2213
0.26	0.2745	2.1925	0.3250	6.7470	1.2140
0.28	0.3104	2.1626	0.3667	5.8980	1.2064
0.30	0.3469	2.1314	0.4089	5.2130	1.1985
0.32	0.3837	2.0991	0.4512	4.6523	1.1904
0.34	0.4206	2.0657	0.4933	4.1877	1.1822
0.36	0.4572	2.0314	0.5348	3.7984	1.1737
0.38	0.4935	1.9964	0.5755	3.4688	1.1652
0.40	0.5290	1.9608	0.6151	3.1875	1.1566
0.42	0.5638	1.9247	0.6535	2.9454	1.1480
0.44	0.5975	1.8882	0.6903	2.7355	1.1394
0.46	0.6301	1.8515	0.7254	2.5525	1.1308
0.48	0.6614	1.8147	0.7587	2.3918	1.1224
0.50	0.6914	1.7778	0.7901	2.2500	1.1141
0.52	0.7199	1.7409	0.8196	2.1243	1.1059
0.54	0.7470	1.7043	0.8469	2.0122	1.0979
0.56	0.7725	1.6678	0.8723	1.9120	1.0901
0.58	0.7965	1.6316	0.8955	1.8219	1.0826
0.60	0.8189	1.5957	0.9167	1.7407	1.0753
0.62	0.8398	1.5603	0.9358	1.6673	1.0682
0.64	0.8592	1.5253	0.9530	1.6006	1.0615
0.66	0.8771	1.4908	0.9682	1.5399	1.0550
0.68	0.8935	1.4569	0.9814	1.4844	1.0489
0.70	0.9085	1.4235	0.9929	1.4337	1.0431
0.72	0.9221	1.3907	1.0026	1.3871	1.0376
0.74	0.9344	1.3585	1.0106	1.3442	1.0325
0.76	0.9455	1.3270	1.0171	1.3047	1.0278
0.78	0.9553	1.2961	1.0220	1.2682	1.0234
0.80	0.9639	1.2658	1.0255	1.2344	1.0193
0.82	0.9715	1.2362	1.0276	1.2030	1.0157
0.84	0.9781	1.2073	1.0285	1.1738	1.0124

TABLE I : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0 / T_0^*	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	P_0 / P_0^*
0.86	0.9836	1.1791	1.0283	1.1467	1.0095
0.88	0.9883	1.1515	1.0269	1.1214	1.0070
0.90	0.9921	1.1246	1.0245	1.0977	1.0049
0.92	0.9951	1.0984	1.0212	1.0756	1.0031
0.94	0.9973	1.0728	1.0170	1.0549	1.0017
0.96	0.9988	1.0479	1.0121	1.0354	1.0008
0.98	0.9997	1.0236	1.0064	1.0172	1.0002
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
1.02	0.9997	0.9770	0.9930	0.9838	1.0002
1.04	0.9989	0.9546	0.9855	0.9686	1.0008
1.06	0.9977	0.9327	0.9776	0.9542	1.0017
1.08	0.9960	0.9115	0.9691	0.9406	1.0031
1.10	0.9939	0.8909	0.9603	0.9277	1.0049
1.12	0.9915	0.8708	0.9512	0.9155	1.0070
1.14	0.9887	0.8512	0.9417	0.9039	1.0095
1.16	0.9856	0.8322	0.9320	0.8930	1.0124
1.18	0.9823	0.8137	0.9220	0.8826	1.0157
1.20	0.9787	0.7958	0.9118	0.8727	1.0194
1.22	0.9749	0.7783	0.9015	0.8633	1.0235
1.24	0.9709	0.7613	0.8911	0.8543	1.0279
1.26	0.9668	0.7447	0.8805	0.8458	1.0328
1.28	0.9624	0.7287	0.8699	0.8376	1.0380
1.30	0.9580	0.7130	0.8592	0.8299	1.0437
1.32	0.9534	0.6978	0.8484	0.8225	1.0497
1.34	0.9487	0.6830	0.8377	0.8154	1.0561
1.36	0.9440	0.6686	0.8269	0.8086	1.0629
1.38	0.9391	0.6546	0.8161	0.8021	1.0701
1.40	0.9343	0.6410	0.8054	0.7959	1.0777
1.42	0.9293	0.6278	0.7947	0.7900	1.0856
1.44	0.9243	0.6149	0.7840	0.7843	1.0940
1.46	0.9193	0.6024	0.7735	0.7788	1.1028
1.48	0.9143	0.5902	0.7629	0.7736	1.1120
1.50	0.9093	0.5783	0.7525	0.7685	1.1215
1.52	0.9042	0.5668	0.7422	0.7637	1.1315
1.54	0.8992	0.5555	0.7319	0.7590	1.1419
1.56	0.8942	0.5446	0.7217	0.7545	1.1527
1.58	0.8892	0.5339	0.7117	0.7502	1.1640
1.60	0.8842	0.5236	0.7017	0.7461	1.1756
1.62	0.8792	0.5135	0.6919	0.7421	1.1877
1.64	0.8743	0.5036	0.6822	0.7383	1.2002
1.66	0.8694	0.4940	0.6726	0.7345	1.2131
1.68	0.8645	0.4847	0.6631	0.7310	1.2264
1.70	0.8597	0.4756	0.6538	0.7275	1.2402
1.72	0.8549	0.4668	0.6445	0.7242	1.2545
1.74	0.8502	0.4581	0.6355	0.7210	1.2692
1.76	0.8455	0.4497	0.6265	0.7178	1.2843
1.78	0.8409	0.4415	0.6176	0.7148	1.2999
1.80	0.8363	0.4335	0.6089	0.7119	1.3159
1.82	0.8317	0.4257	0.6004	0.7091	1.3324
1.84	0.8273	0.4181	0.5919	0.7064	1.3494
1.86	0.8228	0.4107	0.5836	0.7038	1.3669
1.88	0.8185	0.4035	0.5754	0.7012	1.3849
1.90	0.8141	0.3964	0.5673	0.6988	1.4033

TABLE I : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma = 1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0 / T_0^*	p / p^*	T / T^*	ρ / ρ^* V^* / V	p_0 / p_0^*
1.92	0.8099	0.3896	0.5594	0.6964	1.4222
1.94	0.8057	0.3828	0.5516	0.6940	1.4417
1.96	0.8015	0.3763	0.5439	0.6918	1.4616
1.98	0.7974	0.3699	0.5364	0.6896	1.4821
2.00	0.7934	0.3636	0.5289	0.6875	1.5031
2.02	0.7894	0.3575	0.5216	0.6854	1.5246
2.04	0.7855	0.3516	0.5144	0.6835	1.5467
2.06	0.7816	0.3458	0.5074	0.6815	1.5693
2.08	0.7778	0.3401	0.5004	0.6796	1.5924
2.10	0.7741	0.3345	0.4936	0.6778	1.6162
2.12	0.7704	0.3291	0.4868	0.6760	1.6404
2.14	0.7667	0.3238	0.4802	0.6743	1.6653
2.16	0.7631	0.3186	0.4737	0.6726	1.6908
2.18	0.7596	0.3136	0.4673	0.6710	1.7168
2.20	0.7561	0.3086	0.4611	0.6694	1.7434
2.22	0.7527	0.3038	0.4549	0.6679	1.7707
2.24	0.7493	0.2991	0.4488	0.6664	1.7986
2.26	0.7460	0.2945	0.4428	0.6649	1.8271
2.28	0.7428	0.2899	0.4370	0.6635	1.8562
2.30	0.7395	0.2855	0.4312	0.6621	1.8860
2.32	0.7364	0.2812	0.4256	0.6607	1.9165
2.34	0.7333	0.2769	0.4200	0.6594	1.9476
2.36	0.7302	0.2728	0.4145	0.6581	1.9794
2.38	0.7272	0.2688	0.4091	0.6569	2.0119
2.40	0.7242	0.2648	0.4038	0.6557	2.0451
2.42	0.7213	0.2609	0.3986	0.6545	2.0789
2.44	0.7184	0.2571	0.3935	0.6533	2.1136
2.46	0.7156	0.2534	0.3885	0.6522	2.1489
2.48	0.7128	0.2497	0.3836	0.6511	2.1850
2.50	0.7101	0.2462	0.3787	0.6500	2.2218
2.52	0.7074	0.2427	0.3739	0.6489	2.2594
2.54	0.7047	0.2392	0.3692	0.6479	2.2978
2.56	0.7021	0.2359	0.3646	0.6469	2.3370
2.58	0.6995	0.2326	0.3601	0.6459	2.3770
2.60	0.6970	0.2294	0.3556	0.6450	2.4177
2.62	0.6945	0.2262	0.3512	0.6440	2.4593
2.64	0.6921	0.2231	0.3469	0.6431	2.5018
2.66	0.6896	0.2201	0.3427	0.6422	2.5451
2.68	0.6873	0.2171	0.3385	0.6413	2.5892
2.70	0.6849	0.2142	0.3344	0.6405	2.6343
2.72	0.6826	0.2113	0.3304	0.6397	2.6802
2.74	0.6804	0.2085	0.3264	0.6388	2.7270
2.76	0.6781	0.2058	0.3225	0.6380	2.7748
2.78	0.6760	0.2031	0.3186	0.6372	2.8235
2.80	0.6738	0.2004	0.3149	0.6365	2.8731
2.82	0.6717	0.1978	0.3111	0.6357	2.9237
2.84	0.6696	0.1953	0.3075	0.6350	2.9752
2.86	0.6675	0.1927	0.3039	0.6343	3.0277
2.88	0.6655	0.1903	0.3004	0.6336	3.0813
2.90	0.6635	0.1879	0.2969	0.6329	3.1358
2.92	0.6615	0.1855	0.2934	0.6322	3.1914
2.94	0.6596	0.1832	0.2901	0.6315	3.2481
2.96	0.6577	0.1809	0.2868	0.6309	3.3058

TABLE I : Ecoulement compressible non visqueux avec transfert de chaleur dans une canalisation de section constante, gaz parfait ($\gamma=1.4$). (Courbes de Rayleigh).

M	T_0/T_0^*	p/p^*	T/T^*	ρ/ρ^* V^*/V	p_0/p_0^*
2.98	0.6558	0.1787	0.2835	0.6303	3.3646
3.00	0.6540	0.1765	0.2803	0.6296	3.4244
3.02	0.6522	0.1743	0.2771	0.6290	3.4854
3.04	0.6504	0.1722	0.2740	0.6284	3.5476
3.06	0.6486	0.1701	0.2709	0.6278	3.6108
3.08	0.6469	0.1681	0.2679	0.6273	3.6752
3.10	0.6452	0.1660	0.2650	0.6267	3.7408
3.12	0.6435	0.1641	0.2620	0.6261	3.8076
3.14	0.6418	0.1621	0.2592	0.6256	3.8756
3.16	0.6402	0.1602	0.2563	0.6251	3.9449
3.18	0.6386	0.1583	0.2535	0.6245	4.0154
3.20	0.6370	0.1565	0.2508	0.6240	4.0871
3.22	0.6354	0.1547	0.2481	0.6235	4.1601
3.24	0.6339	0.1529	0.2454	0.6230	4.2345
3.26	0.6324	0.1511	0.2428	0.6225	4.3101
3.28	0.6309	0.1494	0.2402	0.6221	4.3871
3.30	0.6294	0.1477	0.2377	0.6216	4.4655
3.32	0.6280	0.1461	0.2352	0.6211	4.5452
3.34	0.6265	0.1444	0.2327	0.6207	4.6263
3.36	0.6251	0.1428	0.2303	0.6202	4.7089
3.38	0.6237	0.1412	0.2279	0.6198	4.7929
3.40	0.6224	0.1397	0.2255	0.6194	4.8783
3.42	0.6210	0.1381	0.2232	0.6190	4.9652
3.44	0.6197	0.1366	0.2209	0.6185	5.0536
3.46	0.6184	0.1351	0.2186	0.6181	5.1435
3.48	0.6171	0.1337	0.2164	0.6177	5.2350
3.50	0.6158	0.1322	0.2142	0.6173	5.3280
3.52	0.6145	0.1308	0.2120	0.6170	5.4226
3.54	0.6133	0.1294	0.2099	0.6166	5.5188
3.56	0.6121	0.1280	0.2078	0.6162	5.6167
3.58	0.6109	0.1267	0.2057	0.6158	5.7161
3.60	0.6097	0.1254	0.2037	0.6155	5.8173
3.62	0.6085	0.1241	0.2017	0.6151	5.9201
3.64	0.6074	0.1228	0.1997	0.6148	6.0247
3.66	0.6062	0.1215	0.1977	0.6144	6.1310
3.68	0.6051	0.1202	0.1958	0.6141	6.2390
3.70	0.6040	0.1190	0.1939	0.6138	6.3488
3.72	0.6029	0.1178	0.1920	0.6134	6.4605
3.74	0.6018	0.1166	0.1902	0.6131	6.5739
3.76	0.6008	0.1154	0.1884	0.6128	6.6892
3.78	0.5997	0.1143	0.1866	0.6125	6.8064
3.80	0.5987	0.1131	0.1848	0.6122	6.9255
3.82	0.5977	0.1120	0.1830	0.6119	7.0466
3.84	0.5967	0.1109	0.1813	0.6116	7.1696
3.86	0.5957	0.1098	0.1796	0.6113	7.2945
3.88	0.5947	0.1087	0.1779	0.6110	7.4215
3.90	0.5937	0.1077	0.1763	0.6107	7.5505
3.92	0.5928	0.1066	0.1746	0.6104	7.6815
3.94	0.5918	0.1056	0.1730	0.6102	7.8147
3.96	0.5909	0.1046	0.1714	0.6099	7.9499
3.98	0.5900	0.1036	0.1699	0.6096	8.0873
4.00	0.5891	0.1026	0.1683	0.6094	8.2268
∞	0.4898	0	0	0.5833	∞