

Chapitre 2 : Equations aux Dérivées Partielles

2.1 Introduction

Les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) interviennent dans la description de très nombreux problèmes de l'électronique, physique, chimie, sciences de la terre, biologie...etc. Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances (équation de Black-Scholes). Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale, de la mécanique quantique (équation de Schrödinger), d'électromagnétisme (équations de Maxwell), et de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes), sont également des EDP. Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

Une équation différentielle aux dérivées partielles ou EDP, est une relation faisant intervenir une fonction inconnue u de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , les variables $(x, y, \dots) \in \mathbb{R}^n$ et une ou plusieurs dérivées partielles, qu'on peut écrire sous la forme :

$$F\left(x, y, \dots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, u_{yy}, \dots\right) = 0 \quad (2.1)$$

Exemple

- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x, y) = 2x + y^2$, $u(x, y) = e^{-x} \sin(y)$
- l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $u = u(x, y)$ qui admet comme solutions : $u(x, y) = (x + y)^3$, $u(x, y) = \sin(x - y)$

2.2 Généralités sur les EDP

Définition 1

L'ordre d'une équation aux dérivées partielles est l'ordre de la dérivée partielle le plus élevé intervenant dans l'équation.

Exemple

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \text{ et } \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \text{ 1}^{er} \text{ Ordre}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ 2}^{eme} \text{ Ordre}$$

Définition 2

Si u et ses dérivées partielles apparaissent séparément et "à la puissance 1" dans l'EDP, celle-ci est dite **linéaire**. Si on multiplie par une fonction qui dépend elle-même de la solution, celle-ci est dite **non linéaire**.

Exemple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{EDP Linéaire}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 \text{ et } u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} = y \text{ EDPs Non Linéaire}$$

Définition 3

Une équation aux dérivées partielles est dite **homogène** si elle est vérifiée pour $u = 0$ (tous les termes de l'équation contiennent la fonction u ou l'une de ses dérivées partielles).

2.3 EDP du 1^{er} ordre

La forme la plus générale pour une EDP linéaire de deux variables et du 1^{er} ordre est :

$$A(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} + C(x, y)u = D(x, y) \quad (2.2)$$

Où A, B, C et D sont des fonctions.

2.4 EDP du 2^{ème} ordre

Une EDP linéaire du 2^{ème} ordre, à coefficients constants s'écrit sous la forme :

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + fu + g = 0 \quad (2.3)$$

Les trois premiers termes correspondent à la **partie principale**. a, b, c, d, e, f et g sont des constantes. Le type de l'EDP dépend du signe de $b^2 - 4ac$.

2.4.1 Classification

- Si $b^2 - 4ac > 0$, alors l'EDP est dite **hyperbolique**.
- Si $b^2 - 4ac = 0$, alors l'EDP est dite **parabolique**.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, alors l'EDP est dite **elliptique**.

Exemple

(i) $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $c > 0$.
 $b^2 - 4ac = 4c^2 > 0$. Ainsi l'équation des ondes est hyperbolique.

(ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - d \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ avec $d > 0$.
 $b^2 - 4ac = 4c^2 = 0$. Ainsi l'équation de la diffusion est parabolique.

(iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ avec $c > 0$.
 $b^2 - 4ac = -4 < 0$. Ainsi l'équation de Laplace est elliptique.

(iv) $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ (Equation de Tricomi)
 $b^2 - 4ac = (0)^2 - 4(y)(-1) = 4y$.
 ✓ Si $y > 0 \Rightarrow$ l'EDP est hyperbolique.
 ✓ Si $y = 0 \Rightarrow$ l'EDP est parabolique.
 ✓ Si $y < 0 \Rightarrow$ l'EDP est elliptique.

2.4.2 Condition aux limites

On doit se donner des « conditions aux limites » (CL). L'équation étant vérifiée dans un domaine \mathcal{D} de l'espace (ou espace-temps), on distingue des conditions de 2 types :

- a) **Conditions de Dirichlet** : on impose la valeur de u sur la bordure de \mathcal{D} . Dans le cas où on étudie un problème dépendant du temps, cela inclut des conditions « initiales ».

b) **Conditions de Neumann** : c'est la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial u}{\partial n} = \overrightarrow{\text{grad}u} \cdot \vec{n}$ que l'on impose.

c) **Condition de Cauchy** : on a une combinaison des deux selon différentes parties de la bordure (imposer une double condition Dirichlet/Neumann).

À titre d'exemple pour l'équation de la chaleur :

- Des CL de Dirichlet correspondent à des parois isothermes, qui imposent leur température.
- Des CL de Neumann avec $\overrightarrow{\text{grad}u} \cdot \vec{n}$ annulent le transfert de chaleur : parois adiabatiques (sans perte ou gain de chaleur, **cela n'implique pas pour autant que la température du système reste constante, contrairement au cas isotherme**).

2.5 Méthodes de résolution

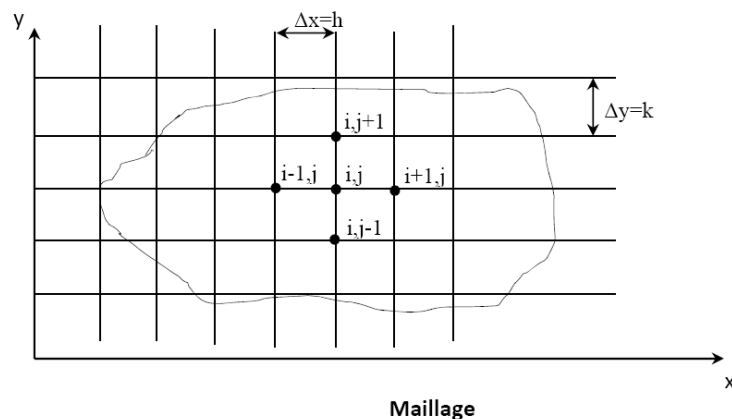
Les méthodes numériques ne donnent pas la solution véritable du problème que l'on cherche à résoudre. Des méthodes numériques mal utilisées peuvent conduire à des résultats totalement faux. Le but est de savoir comment calculer explicitement une solution approchée qui soit facilement calculable tout en ayant une idée assez précise de l'erreur commise par rapport à la solution exacte? Plusieurs méthodes existent pour cet approche citons : la méthode des différences finies, la méthode des éléments finis et la méthode de Galerkin (Ritz),...etc.

2.5.1 Méthode des différences finies (MDF)

La méthode MDF est très classique, simple à mettre en œuvre et convient pour beaucoup de problèmes rencontrés en pratique. Les calculs sont effectués suivant un **maillage** obtenu par un double réseau de parallèles aux axes et régulièrement espacées.

Elle repose sur deux notions : la discrétisation des opérateurs de dérivation ou différentiation et la convergence du schéma numérique ainsi obtenu. Son inconvénient est qu'on se limite à des géométries simples, et qu'il y a des difficultés de prise en compte des conditions aux limites de type Neumann.

Pour obtenir une approximation numérique de la solution de ce problème, nous devons approcher les dérivées partielles de l'E.D.P en chaque nœud du domaine discrétisé (maillage) en utilisant les valeurs de la variable dépendante en ce nœud et aux nœuds avoisinants.



L'intersection de deux droites du maillage définit un nœud M de coordonnées (x_M, y_M) .

Si les parallèles à l'axe x sont espacées de $\Delta x = h$ et les parallèles à l'axe y de $\Delta y = k$, le noeud a comme coordonnées :

$$x_M = i\Delta x = ih \text{ et } y = j\Delta y = jh$$

Ou d'une manière condensée (i, j) .

Ainsi la fonction $u(x, y)$ prend au point $M(x_M, y_m)$ la valeur $u(i\Delta x, j\Delta y) = u(ih, jh) = u_{i,j}$

Remarque1: A chaque étape, nous remarquons que pour calculer la valeur de $u_{i,j}$ au point (x_i, y_j) nous avons besoin de connaître les points $u_{i-1,j}, u_{i,j-1}, u_{i+1,j}, u_{i,j+1}$.

Remarque2: Si $\Delta x = \Delta y$ le **maillage** est dit **régulier** sinon il est **irrégulier**.

2.5.2 Notation indicielle

Durant ces projets nous utiliserons souvent la *notation indicielle*. C'est pourquoi nous voulons en rappeler le principe. Soit un des vecteurs de base du repère (quadrillage) discrétisé, nous noterons le point $x(i)$, qui est la $i^{\text{ème}}$ abscisse par x_i et de même la $j^{\text{ème}}$ ordonnée $y(j)$ sera notée y_j et si u est maintenant la fonction, ici la solution de l'équation aux dérivées partielles dépendant seulement des variables de l'espace, on remplacera $u(x_i, y_j)$ par $u_{i,j}$. Si, en plus des variables de l'espace, il existe une variable temporelle $t(k) = t_k$, alors la fonction $u(x_i, y_j, t_k)$ sera notée $u_{i,j}^k$.

En résumé, les indices des **variables** spatiales resteront en **indices** et celui du **temps** sera en **exposant**. C'est ce qu'on appellera la **notation indicielle**.

2.5.3 Expressions discrètes de la première et deuxième dérivée

La méthode des différences finies pour la résolution des problèmes aux limites remplace chaque dérivée dans l'équation différentielle aux dérivées partielles par une approximation appropriée en termes de rapport aux différences.

En utilisant le développement de Taylor au voisinage du point (x_i, y_i) , on obtient :

a) Première dérivée

- Différence en avant : $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1} - U_i}{h}$

- Différence en arrière : $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_i - U_{i-1}}{h}$

- Différence centrée : $\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \frac{U_{i+1} - U_{i-1}}{2h}$

b) Deuxième dérivée

- Différence en avant : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i,j} - 2U_{i+1,j} + U_{i+2,j}}{h^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j} - 2U_{i,j+1} + U_{i,j+2}}{h^2}$

- Différence en arrière : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i-2,j} - 2U_{i-1,j} + U_{i,j}}{h^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j-2} - 2U_{i,j-1} + U_{i,j}}{h^2}$

- Différence centrée : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h^2}$

Exemple

Soit le problème suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Dans le carré $[0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3]$, vérifiant les conditions suivantes :

$$u(0, y) = 2y, u(0.2, y) = y + 0.2, u(x, 0) = x \text{ et } u(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x.$$

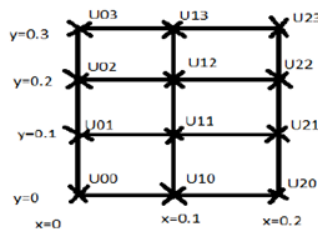
- 1- Donner le type du problème, et séparer ses conditions.
- 2- Résoudre le problème par la méthode des différences finies (MDF) en prenant $\Delta x = h = \Delta y = k = 0.1$.

Solution

1) L'équation est de type elliptique et le problème de type de Dirichlet. Dans ce problème on a seulement des conditions aux limites.

2) Pour résoudre ce problème, on doit suivre les étapes ci-après :

2.1) Tracer le problème : on a $\Delta x = h = \Delta y = 0.1$ et $[0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq 3]$.



2.2) déterminer les connues et les inconnues par les conditions aux limites.

- à l'aide de $U(0, y) = 2y$: $U_{00} = 0, U_{01} = 0.2, U_{02} = 0.4$ et $U_{03} = 0.6$.
- à l'aide de $U(0.2, y) = y + 0.2$: $U_{20} = 0.2, U_{21} = 0.3, U_{22} = 0.4$ et $U_{23} = 0.5$.
- à l'aide de $U(x, 0) = x$: $U_{00} = 0, U_{10} = 0.1, U_{20} = 0.2$.
- à l'aide de $U(x, 0.3) = 0.6 - 0.5x$: $U_{03} = 0.6, U_{13} = 0.55, U_{23} = 0.5$.

En remarque que le problème est bien posé.

2.3) détermination des inconnues : les inconnues sont U_{11} et U_{12} .

2.3) Ecriture de l'algorithme

On remplace les formes discrètes dans la fonction continue, c-à-d, on remplace

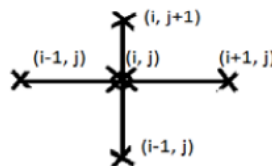
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightarrow \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2}$$

On obtient $\frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h^2} + \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{k^2} = 0$ et $h = k$,

Donc l'approximation de problème (1) est :

$$4U_{i,j} = U_{i+1,j} + U_{i-1,j} + U_{i,j+1} + U_{i,j-1}$$

La valeur de la fonction au point (i, j) est obtenue en faisant la moyenne arithmétique des valeurs aux points $(i + 1, j), (i - 1, j), (i, j + 1)$ et $(i, j - 1)$. Dont voici la maille du calcul est :



2.4) Calculer les inconnues U_{11} et U_{12} : l'intérieur du domaine, on a :

$$\begin{cases} 4U_{11} = U_{21} + U_{01} + U_{12} + U_{10} = 0.3 + 0.2 + U_{12} + 0.1 \\ 4U_{12} = U_{02} + U_{22} + U_{11} + U_{13} = 0.4 + 0.4 + U_{11} + 0.55 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4U_{11} - U_{12} = 0.6 \\ 4U_{12} - U_{11} = 1.35 \end{cases}$$

Sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ 1.35 \end{bmatrix}$$

A l'aide de la méthode de Crammer, on trouve ($U_{11} = 0.25$ et $U_{12} = 0.4$)