# Chapitre II

# Intégrales Impropres

# CHAPITRE II : Intégrales Impropres

## II.1 Définition de l'intégrale impropre

L'intégral impropre $\int_a^b f(x)dx$ est dite intégrale impropre si :

①$f(x)$ est continue et si $a=-\infty$ Ou $b=+\infty$, où les deux ($a=-\infty$ et $b=+\infty$), c'est-à-dire si un ou les deux bornes d'intégrations est infinie

②$f(x)$ n'est pas borné en un ou plusieurs points $\in [a,b]$, de tels points sont appelés singularités de $f(x)$.

***Remarque :*** Les intégrales correspondant à ① ou à ②s'appellent intégrales impropres de première ou de deuxième espèce respectivement.

Les intégrales correspondant aux deux conditions ① et ② s'appellent intégrales impropres de troisième espèce.

***Exemples :***

1. $\int_0^{+\infty} sin^2x dx$ est une intégrale impropre de première espèce ($b=+\infty$).
2. $\int_0^4 \frac{dx}{x-3}$ est une intégrale impropre de deuxième espèce ($f(x)$ n'est pas borné en $x=3 \ \in [a,b]$)
3. $\int_0^1 \frac{sinx}{x} dx$ est une intégrale propre (puisque $\lim_{x\to 0} \frac{sinx}{x} = 1 \neq \infty$ donc $f(x)$ est borné en $x=0$)

## II.2 Intégrale impropre sur un intervalle non borné (1er espèce)

***Définition :*** Soit $f$ une fonction continue sur $[a,+\infty[$ pour tout x appartenant à $[a,+\infty[$ , on dit que l'intégrale impropre de $f$ sur $[a,+\infty[$ notée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ existe et elle est finie.

I. Dans le cas ou $\lim_{M\to+\infty} \int_a^M f(x)dx$ n'existe pas on dit que l'intégrale est divergente.
II. De même, per définition $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx$ est convergente ou divergente selon que la limite existe ou n'existe pas.
III. D'une manière semblable, on définit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx \qquad (1)$$

Ou $x_0$ est un nombre réel, et l'on dit que l'intégrale est convergente ou divergente selon que les intégrales du membre droite de l'égalité (1) convergent ou non, selon les définitions (I) et (II).

***Exemple 1:***

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = 1$$

Si bien que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$converge vers 1

***Exemple 2:***

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx = \lim_{a\to+\infty} \int_a^{0} e^{-x}dx = \lim_{a\to-\infty} [-e^{-x}]_a^0 = -1$$

Si bien que $\int_{-\infty}^{0} e^{-x}dx =$converge vers -1

***Exemple 3:***

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^{b} \frac{dx}{x} = \lim_{b\to+\infty} [lnx]_1^b = +\infty$$

Si bien que $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est divergente.

## *II.2 .1 Critères de Convergence pour les intégrales impropres de première espèce* :

Les critères suivant sont données pour le cas ou une borne d'intégration est $+\infty$. Des critères similaires existent quand une borne d'intégration est $-\infty$ (un changement de variable $x = -y$ change la borne en $+\infty$) .

Nous supposons que f(x) est continue, donc intégrable sur tout intervalle finie $a \leq x \leq b$ :

1. **Critère de Comparaison** :

   Pour les intégrales avec intégrandes non négatif :

   i. ***Convergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$ et supposons que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors si : $0 \leq g(x) \leq f(x)\ \ \forall x > a$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge également.

   ii. ***Divergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $x \geq a$ et supposons que $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, alors si : $0 \leq f(x) \leq g(x)\ \ \forall x > a$ $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge également.

***Exemples :***

1) *Puisque* $\forall x \in [0, +\infty[ : \frac{1}{1+e^x} \leq \frac{1}{e^x}$ *et que* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x} dx$ converge alors $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^x} dx$ converge aussi.
2) *Puisque* $\forall x \in [2, +\infty[ : \frac{1}{ln} \geq \frac{1}{x}$ *et que* $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge alors $\int_2^{+\infty} \frac{1}{lnx} dx$ diverge également.

2. **Critère de Quotient** :

Pour les intégrales avec intégrandes non négatif :

i. Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ et si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0\ et \neq \infty$ Alors :

$\int_a^{+\infty} f(x)dx\ et\ \int_a^{+\infty} g(x)dx$ ont la même nature c-à-dire convergent toutes deux ou divergent toutes deux.

ii. Si $k = 0$ dans $(i)$ et si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge également.

iii. Si $k = \infty$ dans $(i)$ et si $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge également.

3. **Critère de Riemann** :

Pour $g(x) = \frac{1}{x^p}$ et soit :

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} x^p \times f(x) = k}$$

i. Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $p > 1\ et\ si\ k$ est finie $(k \neq \infty)$.

ii. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si $p \leq 1\ et\ si\ k \neq 0\ (\ k\ peut\ etre\ infiniek = \infty)$ est finie.

***Exemple :*** $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{4x^4+25} dx$ converge puisque :

$$\lim_{x\to\infty} x^p \times \frac{x^2}{4x^4+25} = \frac{1}{4} \qquad (p = 2\ et\ k = 1/4)$$

## *II.2 .2 Convergence Absolue et Semi convergence*

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.
- Et si $\int_a^b f(x)dx$ converge mais $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est semi convergente.

***Exemple :***

$\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{1+x^2} dx$ converge absolument et donc converge puisque :

$$\forall x \in [0, +\infty[ : \left|\frac{cosx}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{1+x^2}$$

Et on a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ converge alors $\int_0^{+\infty} \left|\frac{cosx}{1+x^2}\right| dx$ converge également, et par conséquent $\int_0^{+\infty} \frac{cosx}{1+x^2} dx$ converge absolument.

***Remarque :***

Tous les critères utilisés pour les intégrales avec des intégrants non négatifs peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

## II.3 Intégrale impropre de seconde espèce

***Définition :***

— Si $f$ une fonction n'est pas bornée (n'est pas continue) seulement à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors on propose par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (I)$$

Si la limite du membre droite de (I) existe, on dit que l'intégrale de membre gauche est convergente, sinon elle est dite divergente.

— De même si $f$ une fonction n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = b$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors on propose par définition :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \qquad (II)$$

En pareil cas, l'intégrale du membre gauche de (II) est dite convergente ou divergente selon que la limite de membre de droite existe ou n'existe pas.

— Si $f$ une fonction n'est pas bornée seulement en un point intérieur $x = x_0$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$, alors par définition on pose:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0^-} \int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)dx \qquad (III)$$

L'intégrale du membre gauche de (III) converge ou diverge selon que les limites de membre de droite existent ou n'existent pas.

### II.3.1 Intégrales impropres de seconde espèce de fonctions particulières

1. $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$ converge si $p < 1$ et diverge si $p \geq 1$.
2. $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$ converge si $p < 1$ et diverge si $p \geq 1$.

On appelle ces intégrales puissances de seconde espèce (remarquons quand $p \leq 0$ les intégrales sont propres.

### III.3.2 Critères de Convergence pour les intégrales impropres de seconde espèce

Les critères suivant sont données pour le cas ou $f(x)$ n'est pas bornée seulement à l'extrémité $x = a$ de l'intervalle $a \leq x \leq b$. Des critères similaires existent si $f(x)$ est non bornée en $x = b$ ou $x = x_0$ où $a < x_0 < b$.

1. **Critère de Comparaison** :

   Pour les intégrales avec intégrandes non négatif :

   i. ***Convergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$ et supposons que $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors si : $0 \leq g(x) \leq f(x)$ $\forall x > a$ $\int_a^b f(x)dx$ converge également.

***Exemple :*** Etudier la convergence de l'intégrale $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$.

***Solution :*** *On a* $\forall x \in ]1,5]$: $\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ *et on a aussi* $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx$ converge ($p = \frac{1}{2} < 1$)

alors $\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ converge aussi.

   ii. ***Divergence :*** soit $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x \leq b$ et supposons que $\int_a^b g(x)dx$ diverge, alors si : $0 \leq f(x) \leq g(x)$ $\forall x > a$ $\int_a^b f(x)dx$ diverge également.

***Exemple : :*** Etudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)^3}dx$.

***Solution :*** *On a* $\forall x \in [0,1[$ : $\frac{1}{x(1-x)^3} \geq \frac{1}{(1-x)^3}$ *et on a aussi* $\int_0^1 \frac{1}{(1-x)^3}dx$ diverge ($p = 3 > 1$)

alors $\int_0^1 \frac{1}{x(1-x)^3}dx$ diverge également.

2. **Critère de Quotient** :

   Pour les intégrales avec intégrandes non négatif :

   i. Si $f(x) \geq 0$ et $g(x) \geq 0$ pour tout $a < x < b$ et si $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0\ et \neq \infty$ Alors :

      $\int_a^b f(x)dx\ \ et\ \ \int_a^b g(x)dx$ ont la même nature c-à-dire convergent toutes deux ou divergent toutes deux.

   ii. Si $k = 0$ dans $(i)$ et si $\int_a^b g(x)dx$ converge, alors $\int_a^b f(x)dx$ converge également.

   iii. Si $k = \infty$ dans $(i)$ et si $\int_a^b g(x)dx$ diverge, alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge également.

3. **Critère de Riemann** :

   Si en prenant le cas particulier de $g(x) = \frac{1}{(x-a)^p}$ dans le critère de quotient on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to a^+}(x-a)^p \times f(x) = k}$$

   i. Alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge si $p < 1\ et\ si\ k$ est finie $(k \neq \infty)$.

   ii. $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge si $p \geq 1\ et\ si\ k \neq 0\ (\ k\ peut\ etre\ infinie\ k = \infty)$.

***Exemples :***

- $\int_1^2 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ converge puisque :

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^p \times f(x) = \lim_{x\to 1^+}(x-1)^p \times \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4-1}} = 1 \qquad \left(p = \frac{1}{2}\ < 1\ et\ k = 1 \neq \infty\right)$$

- $\int_0^3 \frac{dx}{(3-x)\sqrt{x^2+1}}$ diverge puisque :

$$\lim_{x\to 3^-}(3-x)^p \times f(x) = \lim_{x\to 3^-}(3-x)^p \times \frac{1}{(3-x)\sqrt{x^2+1}} = 1 \qquad (p = 1\ \ et\ k = 2 \neq 0)$$

## *III.3.3 Convergence Absolue et Semi convergence*

- On dit que l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente.

- Et si $\int_a^b f(x)dx$ converge mais $\int_a^b |f(x)|dx$ diverge, on dit que $\int_a^b f(x)dx$ est semi convergente.

***Exemples :***

- $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$ converge absolument et donc converge puisque :

$$\forall x > \pi : \left|\frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}$$

Et on a $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{1}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$ converge $\left(p = \frac{1}{3} < 1 \ et \ k = 1 \neq \infty\right)$alors $\int_{\pi}^{4\pi} \left|\frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}\right| dx$ converge également, et par conséquent $\int_{\pi}^{4\pi} \frac{sinx}{\sqrt[3]{x-\pi}}dx$ converge absolument.