Chapitre III

Les Séries

Chapitre III : Les Séries

III.1.Série numérique

Généralité

Soit (U_n) une suite de nombre réels, on pose :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots .. U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$$

- (S_n) est appelée suite des sommes partielles de la série.
- La limite de S_n est appelée série de terme générale U_n.
- $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} U_k = U_{n+1} + U_{n+2} + \cdots$

  R_n est appelé le reste d'ordre n de la série.

Notation :

Une série de terme générale U_n est notée $(\sum_{n=0}^{+\infty} U_n)$ ou$(\sum_{n\geq 0} U_n)$.

III.1.1 Convergence

Définition :

Une série de terme générale U_n est dite convergente si la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Dans ce cas la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série est on note :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=0}^{\infty} U_n$$

- Une série qui n'est pas convergente est dite divergente
- En d'autre terme, si on note :

$$l = \underset{n\to\infty}{lim} S_n$$

On a alors $(\sum_{n\geq 0} U_n)$ converge vers l $\Leftrightarrow$

$\lim_{n\to\infty} S_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\mathbb{N}\ \forall\, n\ \in \mathbb{N} : \text{n} \geq N \Rightarrow\ |Sn - l| \leq\ \varepsilon$

$\Leftrightarrow\ \forall\ \varepsilon\ > 0 :\ \exists\ N\ \in \mathbb{N}\ : \forall n \in \mathbb{N} : \text{n} \geq N \Rightarrow 0\ |\sum_{k=0}^{n} U_k - l| < 0$

Exemples :

- ***la série géométrique :*** une série géométrique est une série dont le terme générale est de la forme :

$$U_n = ar^n , \quad a \neq 0$$

Pour ce type de série la somme partielle est donnée par :

$$Sn = a \times \frac{1 - r^{n-1}}{1 - r}$$

Et on remarque que la limite $\lim_{n \to \infty} S_n$ existe si et seulement si : $|r| < 1$ dans ce cas la série est convergente et on a :

$$\sum_{n \geq 0} a.r^n = \frac{a}{1 - r}$$

Exemple 1 :

$$\sum_{n \geq 1} (\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \dots \dots \dots \dots \dots$$

Est une série géométrique.

$a = \frac{1}{2} \quad r = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow$ *la série est convergente*

$$Sn = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1 \Longrightarrow la\ s\acute{e}rie\ est\ convergente$$

Exemple 2 :

La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1}$

$$Sn = 1 - 1 + 1 - \cdots \dots (-1)^{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} Sn = \begin{cases} 0 & si\ n\ est\ pair \\ 1 & si\ n\ est\ impair \end{cases}$$

Donc la limite de S_n n'existe pas, la série est donc divergente.

Proposition 1 :

Soit $(\sum_{n\geq 1} U_n)$ une série convergente alors $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ la réciproque est fausse

Preuve :

Posons

$$l = \sum_{n=0}^{\infty} Un = \lim_{n\to+\infty} Sn = \lim_{n\to+\infty} S_{n-1}$$

$$S_n - S_{n-1} =$$

$$(U_0 + U_n + \cdots \ldots . + U_{n-1} + U_n) - (U_0 + U_n + \cdots \ldots . + U_{n-1}) = U_n$$

Et on a

$$\lim_{n\to\infty}(Sn - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} Un = 0$$

Remarque :

La proposition précédente est utile sous sa forme contre posée, c'est-à-dire :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n \neq 0 \Longrightarrow \sum U_n \ \ diverge$$

- ***Exemple :*** la série $\sum_{n\geq 1} n!$, $\sum_{n\geq 1}(-1)^n$, $\sum_{n\geq 1}$, $\sum \cos(\frac{1}{n})$ sont des séries divergentes.

Tandis que la série numérique ($\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ est divergente bien qu'elle vérifie $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Propositions 2 :

Soit $(\sum_{n\geq 1} U_n)$et $(\sum_{n\geq 1} V_n)$ deux séries convergentes respectivement vers u et v alors :

1- La série $\sum_{n\geq 1}(U_n + V_n)$est convergente et on a :

$$\sum_{n\geq 0}(Un + V_n) = \sum_{n\geq 0} Un + \sum_{n\geq 0} Vn = u + v$$

2- Pour tous $\alpha \in R$, $la\ serie$ $(\sum \alpha\ Un)$ est convergente et on a :

$$\sum_{n\geq 0}(\alpha Un) = \alpha \sum_{n\geq 0} Un = \alpha u$$

Définition 2 (Critère de Cauchy) :

Une série est dite de Cauchy, si la suite des sommes partielles (S_n) est de Cauchy cela revient a dire qu'elle vérifiée de la propriété suivante :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,, \exists\, N \in \mathbb{N} : \forall\, p\,, q \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq N \Rightarrow$$

$$|Sp - Sq| < \left|\sum_{k=0}^{p} U_k - \sum_{k=0}^{q} U_k\right| < \varepsilon$$

Toutes séries réelles de Cauchy sont convergentes.

III.1.2 Séries à termes positifs

Définition : une série ($\sum Un$) est dite série à terme positif si : $U_n \geq 0$ pour tous n $\in N$

Remarque :

Une série ($\sum Un$) est à termes positifs, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante.

En effet $S_n - S_{n-1} = Un \geq 0$ d'où la proposition suivante :

Proposition : Soit ($\sum Un$) une série à termes positifs :

$$\sum Un \;\; Converge \Longrightarrow \; (S_n)\; est\; major\acute{e}e.$$

Critère de convergence et de divergence des séries numérique :

III.1.2.1 Critère de comparaison

Pour des séries de termes non négatifs (tout série de terme général $Un \geq 0 \; \forall\, n \in \mathbb{N}$) soit Un et V_n de R^+ avec $0 \leq Un \leq Vn$.

a) la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} Vn$ $\Rightarrow$ la convergence $\sum_{n\geq 0} Un$
b) la divergence de $\sum_{n\geq 0} Vn$ $\Rightarrow$ la divergence de $\sum_{n\geq 0} Un$

Exemple : Etudier la divergence ou la convergence des séries suivantes :

$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n+1}$, $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln n}$

On à

$\forall\, n \geq 1 : \frac{1}{2^n+1} \leq \frac{1}{2^n}$

Et on a déjà prouvé que la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{2^n}$ est convergente alors la série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{2^n+1}$ et aussi convergente.

Puisque :

$\forall\, n \geq 2 : \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$

Et puisque la série $\sum_{n\geq2} \frac{1}{n}$ est divergente, alors il en est de même de pour $\sum_{n\geq2} \frac{1}{\ln n}$

III.1.2.2 Critère du quotient

Pour des séries de termes positifs soit Un ≥ 0, Vn ≥ 0 et si on a $\lim_{n\to\infty} \frac{Un}{Vn} = k$, alors :

- **a.** si $k = 0$ et $\sum_{n\geq0} Vn$ converge il est de même pour $\sum_{n\geq0} Un$.
- **b.** si $0 < k < +\infty$ alors $\sum_{n\geq0} Vn$ et $\sum_{n\geq0} Un$ sont toutes deux convergentes.
- **c.** $k = +\infty$ et $\sum_{n\geq0} Vn$ diverge il en est de même de $\sum_{n\geq0} Un$.

III.1.2.3 Critère d'intégrale

Pour des séries de termes positifs si $f(x)$ est positif continue et monotone décroissante pour $x \geq 1$, et si elle est telle que $f(x) = Un$ alors $\sum_{n\geq0} Un$ converge ou diverge selon que l'intégrale généralisé

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M f(x)dx.$$

Converge ou diverge.

Exemple 1 :

La série $\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^2}$. Converge puisque :

$\forall\, n \geq 1$: la fonction $f(x) = \frac{1}{n^2}$ est positive contenue décroissante sur $]1, +\infty]$

$\lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x^2} = \ lim_{M\to\infty}(1 - \frac{1}{M}) = 1\ (la\ limite\ existe).$

Exemple 2 :

La série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$

$\forall\ n\ \geq 1$: la fonction f(x) = $\frac{1}{n}$ est positive contenue décroissante sur $]1, +\infty]$

$\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ = $\lim_{M\to\infty}[\ln x]_1^M\ = +\infty$

$$\Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\ \ est\ divergente\ .$$

Les séries de Riemann : Ce sont des séries de la forme

$$\sum_{n\geq 1}^{\infty}\frac{1}{n^p} = \frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots$$

Ou p est une constante, elle converge pour $p > 1$ et diverge pour $p \leq 1$.

La série avec $p\ =\ 1$ appelée série harmonique.

Remarque :

se déduit du critère par comparaison et en est souvent une forme alternative très utile. à partir des propriétés connus de la série de Riemann la théorie suivante :

III.1.2.3 Règle de Riemann

Si en prenant dans le critère de quotient le cas particulier $=\frac{1}{n^p}$, nous obtenons le théorème suivant :

Si $\lim_{n\to\infty} n^p\, u_n\ = k$ Alors :

a. $\sum Un$ converge si $p > 1$ et $0 \leq k < \infty$ $(k\neq\infty)$
b. $\sum Un$ diverge si $p < 1$, $k \neq 0$

Exemple :

$\sum_{n\geq 1}\frac{n}{4n^3-2}$ Converge. Puisque $\lim_{n\to\infty} n^2\ .\ \frac{n}{4n^3-2} = \frac{1}{4}(p = 2 > 1, et\ k \neq +\infty)$

$\sum\frac{\ln n}{\sqrt{n+1}}$ Diverge. Puisque $\lim_{n\to\infty} n^{1/2}\times\frac{\ln n}{(n+1)^{1/2}} = +\infty. (p=\frac{1}{2} < 1, etk \neq 0)$

III.1.2.3 Séries et Equivalents

Soient $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ deux séries numériques à termes positifs telles que $U_n \sim_{\infty} V_n$. Alors $\sum_{n\geq 0} U_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} V_n$ sont de mêmes natures (convergentes ou divergentes).

Exemple : la série $\sum_{n\geq 1} \ln \frac{1}{n} - \ln \sin \frac{1}{n}$, on a :

$$\sin \frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \varepsilon(n)(\lim_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0)$$

Soit $U_n \sim \ln \frac{1}{n} - \ln(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3}) \Rightarrow U_n \sim -\ln\left(1 - \frac{1}{6n^3}\right)$

On a : $\ln(1-x) \sim_{x\to 0} -x - \frac{-x^2}{2} + \ldots$

$\ln\left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) = -\frac{1}{6n^2} \Longrightarrow Un \sim \frac{1}{6n^2}$

La série $\sum_{n\geq 0} U_n$ est équivalente à une série de Riemann$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{6n^2}$ qui est convergente, alors elle est de même $\sum_{n\geq 0} U_n$

III.1.3 Séries à termes Quelconques

III.1.3.1 Séries alternées

On appelle série alternée les termes successifs sont alternativement positives $U_n = (-1)^n \mid U_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) Pour qu'une série alternée converge il suffit (mais n'est pas nécessaire que les deux conditions suivantes soient réalisées :
1) $\lim_{n\to\infty} |U_n| = 0$.
2) La suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit décroissante *pour* $n \geq 1$.

Exemple :

Pour la série :

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n} + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$$

Nous avons : $Un = \frac{(-1)^n}{n}$,la série donnée est une série alternée, on vérifié les deux conditions :

1) $\forall n \in \mathbb{N} :\ \lim_{n\to\infty}|U_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$
2) $\forall n \in \mathbb{N} : \frac{d|U_n|}{dn} = -\frac{1}{n^2} < 0$

Donc $|\mathrm{U_n}|$ est décroissant, par conséquent la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$est convergente.

III.1.3.2 Série absolument convergentes et séries semi convergentes

- La série $\sum U_n$ est appelée absolument convergente si $\sum|U_n|$ converge.
- Si $\sum U_n$ converge mais la série $\sum|U_n|$ diverge alors on dit que la série $\sum U_n$ est semi convergente.

Théorème 2 : Si $\sum|U_n|$ converge, alors $\sum U_n$ converge. En d'autre terme, une série absolument convergente est convergente.

Exemple : La série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots$$

Est absolument convergente, car la série$\sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ est convergente (série de Riemann $p = 2 > 1$)

***Exemple 2** :* La série :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots = \sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Converge (exemple précédent), Mais la séries des valeurs absolues $\sum\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), alors la série $\sum\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est semi convergente.

***Remarque** :*

Tous les critères utilisés pour les séries de termes positives peuvent être utilisés comme critères de convergence absolue.

III.1.3.3 Règle d'Alembert

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on pose : $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lambda$ Alors :

1. La série $\sum U_n$ est absolument convergente si λ<1.
2. La série $\sum U_n$est divergente si λ>1.
3. Le critère est en défaut si λ=1.

Exemple : la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n!}$ est convergente, car et en utilisant le critère de d'Alembert, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!}{(n+1)!}\right| = \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

III.1.3.4 Règle de Cauchy

Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Si on a : $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|}$=λ alors :

1. La série $\sum U_n$ converge absolument si λ<1.
2. La série $\sum U_n$diverge si λ>1.
3. Si λ=1 Le critère est en défaut.

Exemple : la série $\sum_{n\geq 1}\left(a+\frac{1}{n^p}\right)^n$ avec $(a>0, p\geq 0\ )$

en utilisant le critère de d'Alembert, on trouve :

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = \lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{1}{n^p}\right) = \lambda$$

On a les cas suivants :

- Si $p = 0 \Longrightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = a+1 > 1$

Alors la série est divergente.

- Si $p > 0 \Longrightarrow \lambda = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|U_n|} = a$

Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} si\ a<1 & \text{la série est absolument convergente} \\ si\ a>1 & \text{la série est divergente} \end{cases}$$

$$\text{si a} = 1 : \lim_{n\to\infty} U_n = \left(1 + \frac{1}{n^p}\right)^n = \begin{cases} 1 & si\ p > 1 \\ +\infty & si\ p < 1 \\ e & si\ p = 1 \end{cases}$$

c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} U_n \neq 0$, alors la série est divergente pour $a = 1$

III.1.4 Produit des séries

Soit (U_n) et (V_n) deux suites de R, on appelle le produit les deux série $\sum Un$ et $\sum Vn$ la série de terme générale Wn :

$$W_n = \sum_{k=0}^{n} U_k V_{n-k}$$

Théorème :

Soit (Un) et (Vn) deux suites de R, si la série $\sum Un$ est absolument convergente et que la série $\sum Vn$ est aussi absolument convergente alors la série des produit des deux séries $\sum W\,n$ est absolument convergente et on peut écrire :

$$\sum Wn = \left(\sum Un\right) \times \left(\sum Vn\right)$$

III.2 Suites et séries de fonctions

III.2.1 Suites de fonction

Supposons qu'une suite de fonction (f_n) converge vers une fonction f lorsque $n \to \infty$ il faut motionner que des propretés connues la continuité, la dérivabilité ou l'intégralité ne sont pas nécessairement préservées pour cette raison, nous allons décrire le type de convergence existant pour les suites de fonctions.

III.2.1.1 Convergence simple

Soit (f_n) une suite de fonction définie sur l'intervalle I de R.

Définition : On dit que la suite (f_n) converge simplement (on ponctuellement) vers la fonction f sur I pour chaque valeur de $x \in I$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction $f(x)$.

On peut reformuler la définition précédente comme suite :

Définition2 :

On dit que la suite (f_n) converge simplement vers f on que f limite simple de la suite (f_n) sur Isi :

$$\forall\, \varepsilon > 0, \forall\, x \in I, \exists\, n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Nous remarquerons que dans cette formulation, le nombre n dépend à la fois de ε et de x

Exemple :Soit la suite de fonction définie par : f_n(x)=$\frac{\sin nx}{n}$, x ∈ R

Etudions la convergence simple de la suite (f_n)

on fixe , x ∈ R , et on étudie la limite de suite numérique $f_n(x)$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in R : -1 \leq \sin nx \leq +1$

$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in R : \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin nx}{n} \leq \frac{+1}{n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim \frac{\sin nx}{\underset{n\to\infty}{n}} = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \forall\, x \in R$

On dit que la suite $f_n(x)$ converge simplement vers la fonction nulle $f = 0$.

Exemple 2:

Soit f_n définit sur [0,1] par : $\forall\, x \in [0,1]$: $f_n(x) = \frac{1-nx}{1+nx}$

On montre facilement que la suite de fonction f_n converge simplement sur l'intervalle [0,1]

$\forall x \in [0,1]$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x = 0 \\ -1 & si\ x \neq 0 \end{cases}$

Remarquons que dans cet exemple bien que les fonctions f_n soient contenues, la fonction limite f ne l'est pas.

III.2.1.2 Convergence uniforme

Soit f_n une suite de fonction à valeurs réelles ou complexes, définies sur l'intervalle I et soit f une fonction définit sur I. on dit la suite f_n converge uniformément vers f ou f est limite uniforme de la suitef_n , si l'on a la propreté suivante :

$$\forall\, \varepsilon\ > 0 :\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ \forall\, x \in I, n > n_0 :\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Définition 3 :

On dit que la suite f_n converge uniformément vers la fonction f sur I, si on posant :

$a_n = \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)|$

Pour tous n$\in \mathbb{N}$ on obtient une suite qui converge vers 0

$(\lim_{n\to\infty} a_n = 0\ ou\ \lim\limits_{n\to\infty} \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| = 0)$.

De point de vue pratique :

1) On étudié la convergence simple afin de déterminer la limite simple f.
2) On fixe $n \in \mathbb{N}$, on étudié la fonction $g_n(x) = \ |f_n(x) - f(x)|$ et on cherche ensuite

$a_n = sup_{x\in I}\ g_n(x)$. Et On détermine la limite de $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Si la limite $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, alors f_n converge uniformément vers f sur I.

Sinon $(\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0)$ la suite de fonctions $f_n$ne converge pas uniformément vers f sur I.

Exemple 3 : Reprenons la suite de fonctions définie par :

$f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$, x$\in R$

Etudions la convergence uniforme :

Connaissant la fonction limite $f = 0$ de la suite de fonctions f_n

On fixe $n \in \mathbb{N}$, on cherche si possible $a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)|$.

$$a_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{\sin nx}{n}\right|$$

Et Comme $|\sin nx| \leq 1$ alors $-\frac{1}{n} \leq \left|\frac{\sin nx}{n}\right| < +\frac{1}{n} \Rightarrow a_n = \frac{1}{n}$.

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ *donc* la suite de fonctions f_n limite converge uniformément vers f.

Remarque :

On peut prouver que $a_n = \frac{1}{n}$ pour la valeur $x = \frac{\pi}{2n}$.

Exemple 2 :

$f_n(x) = 1 + x + \cdots x^{n-1}$ sur $[-1,1]$

La suite de fonctions $f_n(x)$ est une somme d'une série géométrique, alors on a

$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x}$

$$\forall x \in [-1,1]: \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \frac{1}{1-x}$$

$\forall x \in [-1,1]: g_n(x) = f_n(x) - f(x) = \dfrac{-x^n}{1-x}$

$\sup_{x\in[-1,1]} g_n(x) \Rightarrow x_{sup} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} g_n(0) = 0$

Alors la suite de fonctions converge uniformément sur $[-1,1]$

Théorème 1(continuité d'une fonction limite) :

Soit f_n $[a,b] \to R$ des fonctions continues qui convergent uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction $f:[a,b] \to R$ alors f est continue sur$[a,b]$.

Théorème 2 (intégration d'une fonction limite) :

Soit f_n $[a,b] \to R$ des fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ qui convergent uniformément vers une fonction f $[a,b] \to R$, alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

On a donc interversion de l'intégrale et la limite

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Théorème 3 :

Soit $f_n(x)$ une suite de fonctions de classe C^1 sur un intervalle réel quelconque I de R tell que :

1) Il existe un point x_0 de I tel que la suite $f_n(x_0)$ converge
2) La suite des dérivées $f_n{}'(x)$ converge uniformément sur tout intervalle fermé $[a, b]$ contenue sur I.

Alors :

1) La suite des (f_n) converge simplement sur I vers fonction f.
2) La fonction f est de classe C^1 et sa dérive coïncide avec la limite de la suite $(\acute{f}_n)$.
3) La suite des (f_n) converge uniformément sur tout intervalle $[a, b]$ contenu dans I.

III.3 Série de fonctions

III.3.1 Convergence simple

Définition 1: Soit $\sum_{n\geq 1} U_n$ une série de fonctions définie sur l'intervalle I. on dit que la série est simplement convergente si, pour tout x de I, la suite des sommes partielle $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une série convergente.

$$S_n(x) = U_1(x) + U_2(x) + \cdots\cdots + U_n(x)$$

Et dans ce cas on écrit :

$$\lim_{n\to\infty} S_n\,(x) = S(x)$$

On appelle $S(x)$ somme de la série $\sum_{n\geq 1} U_n$, il s'ensuit que $\sum_{n\geq 1} U_n$converge simplement vers $S(x)$ pour tout x de I si :

$\forall\ \varepsilon\ > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall\ x\ \in I \colon \exists\ n_0\ (\varepsilon, x) \colon n > n_0\ \colon |S_n(x) - \mathrm{S(x)}\ | <\ \varepsilon$

- Si n_0 ne dépend que de ε , la série est dite uniformément convergente sur I.

III.3.2 Convergence uniforme

Définition 2 **:** Soit $\sum_{n\geq 1} U_n$ une série de fonctions, on dit que la série est uniformément convergente, si la suite des fonctions somme partielle d'ordre n c.-à-d. la suite de fonction $(S_n(x))$ définie par :

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} U_k$$

Est une suite de fonctions uniformément convergente.

En d'autre terme, elle vérifié la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I: \exists\, n_0\,(\varepsilon): n > n_0 : |S_n(x) - \mathrm{S(x)}\,| < \varepsilon$$

- Où n_0 dépend uniquement de ε

Remarque :

Si la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} U_n$ est une série qui converge simplement on peut considérer pour tout x la suite des restes d'ordre n de la série$\sum_{n\geq 1} U_n$:

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} U_k$$

Puisque $S(x) - S_n(x) = R_n(x)$ et le reste de la série après le nième terme, on peut dire de façon équivalente que la série $\sum_{n\geq 1} U_n$ est uniformément convergente pour tout x de I si la suite des restes partiels $R_n(x)$converge uniformément vers la fonction nulle sur I.

III.3.3 Théorèmes sur les séries uniformément convergentes

Si une série de fonctions est uniformément convergente, elle possède en commun avec les sommes partielles de fonctions de nombreuses propriétés comme le montrent les théorèmes suivants :

Théorème 1 :

Si les fonctions $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues sur $[a, b]$ alors S(x) est continue sur $[a, b]$ Ex bref, ceci veut dire que la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues est une fonction continue. Ce résultat est souvent utilisé pour démontrer qu'une série donnée n'est pas uniformément convergente en démontrant que la fonction somme S(x) est discontinue en un point, en particulier si x_0 est dans $[a, b]$ alors le théorème établit que :

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n\geq 0}U_n(x)=\sum_{n\geq 0}\lim_{x\to x_0}U_n(x)=\sum_{n\geq 0}U_n(x_0)$$

On utilise la limite à droite ou la limite à gauche si x_0 est à une extrémité de $[a,b]$

Exemple : Soit la série $\sum_{n\geq 1}U_n(x)$ de terme générale $U_n(x)$ définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\forall x\in[0,1]:U_n(x)=\ x^{\frac{1}{2n+1}}-\ x^{\frac{1}{2n-1}}$$

Montrer que la série est simplement convergente et non uniformément.

Solution :

$$S_n(\mathrm{x})=\sum_{k=1}^{n}U_k(x)=U_1(x)+U_k(x)+\cdots\cdots+U_n(x)$$

$$=\left(x^{1/3}-x\quad\right)+\left(x^{1/5}-\ x^{1/3}\right)+\cdots+\left(x^{1/2n-1}-x^{1/2n+1}\right)$$

$$S_n\,(x)=\ x^{1/2n+1}-x$$

Et on a

$$S(x)\ =\lim_{n\to+\infty}S_n(\mathrm{x})=\begin{cases}0 & si\ x=0\\ 1-x & si\ x\neq 0\end{cases}$$

La limite de $S_n(\mathrm{x})$ existe alors la série converge simplement vers (x), mais on remarque que cette limite $S(x)$ n'est pas continue $en\ x=0$

$$\lim_{x\to 0^+}S(\mathrm{x})=1\neq\ S(0)=0$$

$\Longrightarrow$ La série donnée $\sum_{n\geq 1}U_n(x)$ n'est pas uniformément convergente sur $[0,1]$

Théorème 2 :

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues sur $[a\,,b]$, et si $\sum U_n(x)$ converge uniformément vers la somme $S(x)$ sur$[a\,,b]$ alors :

$$\int_a^b S(x)dx=\sum_{n\geq 1}\int_a^b U_n(x)\,dx$$

$$\int_a^b \sum_{n\geq 1} U_n\,(x) = \sum_{n\geq 1} \int_a^b U_n(x)dx$$

En bref une série uniformément convergente de fonctions continues peut être intégrée terme à terme.

Théorème 3 :

Si $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des fonctions continues et ont des dérivées continues sur $[a,b]$, et si $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ converge vers S(x) tandis que $\sum_{n\geq 1} U_n(x)$ est informent convergent sur $[a,b]$ alors

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} U_n'(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n\geq 1} U_n(x)\right] = \sum_{n\geq 1} \frac{d}{dx} U_n(x)$$

Ce théorème donne les conditions pour qu'une série puise être dérivée terme à terme.

- Des théorèmes semblables au théorème ci-dessus peuvent être formulés pour les suites de fonctions.
- Pour exemple, si la suite $U_n(x)$ est uniformément convergente sur $[a,b]$ alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b U_n(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} U_n(x)\,dx$$

III.3.4 Critères particuliers pour la convergence uniforme des séries de Fonctions

1. Critère de Weierstrass (Convergence Normale):

Si on peut trouver une suite numérique de termes positifs$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telles que sur un certain intervalle I on ait :

a- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I :\ |U_n(x)| \leq M_n$

b- $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge

Alors $\sum U_n(x)$ est uniformément et absolument convergent sur c'est intervalle I.

Remarque :

Les séries de fonctions qui réalisent le théorème précèdent s'appellent les séries convergentes normalement.

Exemple : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n^2}$

On a $\forall\, x\ \in R\ :\ \forall\, n\ \in N^*:\left|\frac{\cos nx}{n_2}\right| < \frac{1}{n^2}$

Et on a aussi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n_2}$ est convergente (série de Riemann n=2) $\Longrightarrow$ *la série* $\sum \frac{\cos nx}{n_2}$ converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$ (converge normalement)

Exemple 2 : La série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{3^{2n}}$

On a $\forall\, x\ \in R\ :\ \forall\, n\ \in N^*:\left|\frac{\sin nx}{3^{2n}}\right| < \frac{1}{3^{2n}}$

Et on a aussi la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{3^{2n}}$ est convergente (série géométrique avec $r = \frac{1}{3^2} < 1$) $\Longrightarrow$ *la série* $\sum \frac{\sin nx}{3^{2n}}$ converge uniformément et absolument sur $\mathbb{R}$ (converge normalement)

Remarque :

Ce critère fournit une condition suffisante mais non nécessaire pour la convergence uniforme c'est-à-dire, qu'une série peut être uniformément convergente sans que le critère puise s'appliquer. A cause de ce critère, on peut être conduit à croire qu'une série uniformément convergente doit être absolument convergente, et inversement cependant, ces deux propriétés sont indépendantes.

2. Critère de Dirichlet :

Supposons que :

1) La suit $\{a_n\}$ soit une suite décroissante de constantes positives tendant ver zéro ($\lim_{n\to\infty} a_n =$ *0)*

2) Il existe une constant P, telle que pour tout a$< x < b$, l'on ait :

$$\forall n \geq 1 : |U_1(x) + U_2(x) + \cdots U_n(x)| \leq P$$

Alors la série $\sum_{n\geq 1} a_n\, U_n(x)$ est uniformément convergente pour $a < x <$ b

1- Théorème 3 :

Si on peut trouver une suite numérique ε_n convergente vers zéro $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ telle que :

$\forall\, n \in N^* : \forall\, x \in [a,b] : |R_n(x)| < \varepsilon_n$

Alors la série $\sum U_n(x)$ est uniformément convergente.

$R_n(x)$: est le reste de la série $\sum U_n(x)$ d'ordre n $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k(x)$

Exemple1 : Étudier la convergence uniforme de la série définie par le terme générale :

$f : R^* \to R \quad x : f(x) = \frac{(-1)^n}{n+x}$

On étudié la convergence simple de cette série :

La sérié donnée est une série alternée vérifions les deux conditions :

1- $\forall n \geq 1, \forall x \in R^* : \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x}\right| = 0$
2- $\forall n \geq 1, \forall x \in R^* : \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dn}}|U_n| = \frac{-1}{(n+x)^2} < 0 \Longrightarrow |U_n|\ est\ décroissante\ sur\ R^*$

Les deux conditions sont vérifiées, alors $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+x}$ est simplement convergente sur R^*, par conséquent et étant donné que la série est alternée et convergente on peut écrire :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in R^* : R_n(x) \leq |U_{n+1}|$$

$$\forall n \geq 1, \forall x \in R^* : R_n(x) \leq \frac{1}{n+1+x} < \frac{1}{n+1}$$

Donc il suffit que $\varepsilon_n = \frac{1}{n+1}$ *ou* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ alors la série est uniformément convergente sur R.

Exemple2 : Étudier la convergence uniforme de la série de terme général :

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 x + n^3}$$

III.4 Séries entières

Définition : On appelle série entière d'une variable x une série de la forme :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} X^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n$$

Les coefficients $a_0, a_1, \dots . . a_n sont\ données$

III.4.1 Rayon de convergence

- En générale une série entière converge pour $|x| < R$ et diverge pour$|x| > R$, pour une certaine constante R appelée rayon de convergence de la série pour $|x| = R$ la série peut aussi bien converger que diverger.
- L'intervalle $|x| < R$ on R < x <-R avec inclusions possible des extrémités, s'appelle l'intervalle de convergence de la série
- Le critère de l'Alembert réussisse souvent pour obtenue cet intervalle, il peut être on défaut et on ce cas on doit faire appel à d'autres critères.

Exemple :

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$, d'après le critère de d'Alembert on a :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1} \times n!}{(n+1)! \times x^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{(n+1)}\right| = 0 < 1(si\ x \neq 0)$$

Pour $x \neq 0$La série converge absolument, et Pour x=0 la série devient 0 Et cette série converge$\Longrightarrow$ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge absolument sur $R(]-\infty, +\infty[$

- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est une série géométrique de raison x elle converge pour tout $|x| < 1$ donc l'intervalle $]-1, +1[$ et le rayon de convergence R=1.
- La série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{n^2}$, D'après la règle de d'Alembert :

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2} \frac{n^2}{x^n}\right| = |x|$$

Elle converge si $|x| < 1$, R=1

Calcule du rayon de converge :

Soit la série $\sum_{n>0} a_n x^n$ une série entière, le rayon de convergence de cette série est donnée par l'une des deux relations suivante :

1- $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} sup \sqrt[n]{a_n}}$ (Règle de Cauchy)

2- $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ (Règle de d'Alembert)

Exemple : Trouver le rayon de convergence de la série $\sum_{n>0} \frac{n!}{n^n} x^n$

On utilise

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \times \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$$

Donc le rayon de convergence de cette série est $R = e$ (et l'intervalle de convergence est $x \in]-e, +e[$).

Théorème :

Une série entière converge uniformément et absolument dans intervalle strictement contenu dans l'intervalle de convergence.

III. 4.2 Fonction somme d'une série entière

1- Continuité :

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction définie sur l'intervalle de convergence, somme de la série entière de rayon de convergence R alors f est continue sur un intervalle strictement contenu dans l'intervalle de convergence.

2- Théorème1 :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série de rayon de convergence $R > 0$ pour tous x : $R > |x| \geq 0$ on a

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} . x^{n+1}$$

Théorème 2 :

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ par conséquent la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ a le même rayon de convergence R.

3- Théorème 3 :

La série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et la série dérivée $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ ont le même rayon de convergence R

- Une série entière est indéfiniment dérivable sur $]-R, R[$, par récurrence on trouve

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots .(n-k+1)\, a_n x^{n-k}$$

Et on déduit que :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Ainsi les coefficients de la série entière sont définis de manière unique par la fonction somme $f(x)$.

- Par conséquent, deux série entière de rayon de convergence non nul sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
- Une série entière de rayon de convergence non nul est nulle si et seulement si ses coefficients sont nuls.

Exemple : En dérivant la série géométrique $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{1-x}\right) \Longrightarrow \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

III.4.5 Développement de fonction en série entière

Supposant que $f(x)$ et ses dérivées $f(x), f'(x), \dots \dots f^{(n)}(x)$existent et soient continues dans l'intervalle fermée$[a, b]$ et que $f^{n+1}(x)$ existe dans l'intervalle ouvert a < x < b. Nous avons vu précédemment que :

$$f(x) = f(a) + f(a) \times (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \times (x-a)^2 \dots . + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n + R_n \quad (I)$$

Ou R_n est le reste est donnée par sous l'une ou l'autre des deux formes :

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \textbf{(Forme de Lagrange)}$$

$$R_n = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n)!}(x-\xi)^n(x-a) \qquad \textbf{(Forme de Cauchy)}$$

Ou ξ qui se trouve entre a et x, est en générale différent dans les deux formes.

Quand x varie, ξ varie également en générale. Si pour tous x et tout ξ dans$[a,b]$, nous avons, $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ alors l'équation (I) peut s'écrire :

$$f(x) = f(a) + f(a) \times (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \times (x-a)^2 \ldots. + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \times (x-a)^n \quad (II)$$

Cette série s'appelle la série ou le développement de Taylor de $f(x)$,

- dans le cas ou $a = 0$, elle est souvent désignée sous le nom de série ou développement de Maclaurin. On pouvait être tenté de croire que si toutes les dérivées de $f(x)$ existent au point $x = a$, le développement (I) est valable. En fait ceci n'est pas nécessairement le cas , car bien que l'on peut puisse formellement obtenir la série du nombre de droite de l'équation (I), la série résultante peut ne pas convergé vers $f(x)$.

Quelques exemples importants des séries entières :

On emploie fréquemment dans la pratique, les séries suivantes convergentes vers les fonctions données dans l'intervalle indiqué :

1. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n \qquad -1 < x < 1$
2. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n \qquad -1 < x < 1$
3. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots.. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
4. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} \ldots.. + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
5. $e^x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!} \qquad -\infty < x < +\infty$
6. $\ln|1+x| = \mathrm{x} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \qquad -1 < x < +1$
7. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \mathrm{x} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots.. + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \qquad -1 < x < +1$
8. $Arctg\, x = \mathrm{x} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} \ldots.. + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad -1 < x < +1$

9. $(1+x)^p = 1 - px - \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots \frac{p(p-3)\ldots.(p-n+1)}{n!}x^n$

Cette série est la série de binôme

a) Si p est entier positif ou zéro, la série un nombre fini de terme.

b) Si $p > 0$ mais n'est pas entier la série converge absolument pour $-1 \leq x \leq +1$

c) Si $-1 < p < 0$, la série converge pour $-1 < x \leq +1$

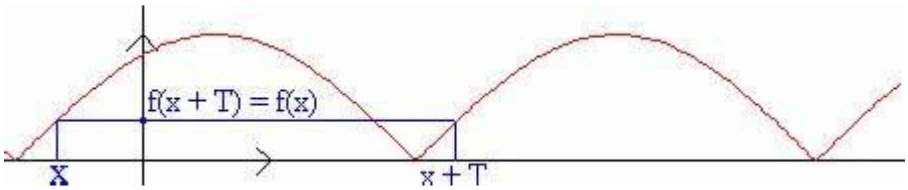
d) Si $p \leq -1$, la série converge pour $-1 < x < +1$

Pour tout p, la série converge certainement pour $-1 < x < +1$

III.3 Séries de Fourier

Fonctions Périodiques : On dit qu'une fonction $f(x)$ a une période T ou est périodique de période T, où T est une constante positive si pour tout x : $f(x) = f(x+T)$

Exemple : les fonctions $sinx$ et $cosx$ ont des périodes : $2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots \ldots$



Séries de Fourier : Soit $f(x)$ une fonction définie sur l'intervalle $]-L, +L[$ et en dehors de cet intervalle par $f(x) = f(x+2L)$ c'est-à-dire périodique de période $2L$, La série de Fourier ou le développement de Fourier correspondant à $f(x)$ est donné par :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n cos\frac{n\pi}{L}x + b_n sin\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (I)$$

Où les coefficients de Fourier a_n et b_n sont donnés par :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{+L} f(x)\, cos\frac{n\pi x}{L} dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{-L}^{+L} f(x)\, sin\frac{n\pi x}{L} dx \end{cases} \qquad (II)$$

Si $f(x)$ a la période $2L$, les coefficients a_n et b_n peuvent être déterminés de manière équivalente par :

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{c}^{c+2L} f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_{c}^{c+2L} f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases} \qquad (III)$$

Ou c est n'importe quel nombre réel, dans le cas particulier ou $c = -L$ (III) devient (II).

Pour déterminer a_0 $dans\ (I), on\ utilise\ (II)\ ou\ (III)\ avec\ n = 0$, par exemple :

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} f(x)\,dx$$

Conditions de Dirichlet :

Supposons que :

1. $f(x)$ est définie et univoque sauf peut être en un nombre fini de points de l'intervalle $\left]-L,+L\right[$.
2. $f(x)$ est périodique en dehors de l'intervalle $\left]-L,+L\right[$ avec la période $2L$.
3. $f(x) et\ f'(x)$ sont continues par morceaux dans de l'intervalle $\left]-L,+L\right[$.

   Alors la série (I) avec les coefficients (II) ou (III) converge vers :

   A. $f(x)$ si x est un point de continuité.

   B. $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ si x est un point de discontinuité.

   Ici $f(x+0)\ et\ f(x-0)$ sont les limites à droite et à gauche de $f(x)$ au point x respectivement.

L'égalité de Parseval : établit que

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L} (f(x))^2\,dx = \frac{{a_0}^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}({a_n}^2 + {b_n}^2) \qquad (IV)$$

Exemple : Soit $f(x) = x$ définie sur $\left]-\pi,+\pi\right[$ de période 2π

On a $f(x)$ est une fonction impaire $\Longrightarrow$ $a_0 = a_n = 0$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x\,sinnxdx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\pi} x\,sinnxdx$$

On intègre par partie on trouve :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[\frac{-x}{n}cosnx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\underbrace{\int_0^{+\pi} cosnxdx}_{=0}\right) = \frac{-2}{n}cosn\pi = \frac{-2}{n}(-1)^n$$

Par conséquent le développement de Fourier correspondant de $f(x)$ est

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n sinnx$$

- En déduire pour $x = \frac{\pi}{2} \in \left]-\pi, +\pi\right[$, $f(x)$ vérifier les conditions de Dirichlet et $x = \frac{\pi}{2}$ est un point de continuité alors :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-2}{n}(-1)^n sinn\frac{\pi}{2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{2n+1}(-1)^n = \frac{\pi}{2}$$

D'où :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$$

- En appliquant l'égalité de Parseval on trouve :

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$