UNIVERSITE MOHAMED BOUDIAFDE-M'SILA
Faculté des Mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques

Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Master : Analyse Fonctionnelle

Cours polycopié pour le module

Espaces de suites et leurs opérateurs

Dahmane Achour

E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Année 2020-2021

Table des matières

0.1 Introduction

Cours polycopié pour le module Espaces de suites et leurs opérateurs.
Dahmane Achour. E-mail: dahmane.achour@univ-msila.dz

Le présent polycopié reprend un cours de deuxième année Master "Analyse Fonctionnelle" donné à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila pendant les années 2018-2020. Ce cours vise à fournir aux étudiants les propriétés essentielles concernant les espaces de suites de Banach $\ell_p(X)$, $\ell_p^w(X)$, $\ell_p \langle X \rangle$ et les idéaux d'opérateurs (au sens de Pietsch). Comme tout cours de Mathématique, il doit être lu avec un stylo et une feuille de papier blanche à la main pour vérifier pas à pas que toutes les assertions sont correctes. Chaque chapitre de ce cours se termine par des exercices non corrigés.

Objectifs. Le but de ce cours est de fournir les outils nécessaires et largement utilisées dans la théorie des idéaux d'opérateurs. Il a aussi pour objectif fondamental de guider l'étudiant dans la résolution des problèmes parfois difficiles.

Connaissances préalables recommandées. Il est conseillé de connaitre les notions de base de l'analyse fonctionnelle.

Mode d'évaluation: a) une épreuve écrite. b) travail continu.

Les documents dont il est largement inspiré sont:

• J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

• J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

• A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

• M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

• A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.

0.2 Espace de Banach

Définition 0.2.1 *(Suite de cauchy)*
Soit (X, d) un espace métrique. On appelle suite de cauchy dans X une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall m, n \geq n_0 : \; d(x_m, x_n) \leq \epsilon$$

Définition 0.2.2 *(Espace complet)*
Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est complet si toute suite de cauchy converge dans X.

Définition 0.2.3 *Soit X un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Une fonction $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+$ est dite norme si pour tous $x, y \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K}$*

1. $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0,$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|,$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

Autrement dit, toute norme est positivement homogène, c'est-à-dire vérifie (2) et satisfait l'inégalité triangulaire (3). Un espace vectoriel muni d'une norme est dit normé.

Définition 0.2.4 *(Espace de Banach)*
On appelle espace de Banach un espace vectoriel normé complet.

Définition 0.2.5 *Soient X un espace normé et $(x_n)_n$ est une suite d'éléments de X. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ est dite absolument convergente dans X si la série numérique $\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$ est convergente.*

Théorème 0.2.1 *Un espace normé X est de Banach si et seulement si toute série de X absolument convergente est convergente.*

Soient X et Y deux espaces vectoriels normés. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y

Proposition 0.2.1 *$(\mathcal{L}(X,Y), \|\cdot\|_{\mathcal{L}(X,Y)})$ est un espace vectoriel normé pour la norme*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \sup_{x \neq y} \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Définition 0.2.6 *(Convexité) Soit X un espace vectoriel et A une partie de X.*

1) On dit que A est convexe si

$$\forall x, y \in A \text{ et } \forall \lambda \in]0,1[: \lambda x + (1-\lambda)y \in A$$

2) Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit convexe si son épigraphe est convexe.

De façon équivalente, on dira que φ est convexe si $\forall x, y \in X, \forall \lambda \in]0,1[\, \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y)$.

Définition 0.2.7 *(Semi-continue inferieure) Soit X un espace topologique. Une fonction $\varphi : X \longrightarrow]-\infty, +\infty[$ est dit semi-continue infieurement si l'une des trois propriétés sont vérifiée:*

i) *L'épigraphe $epi(\varphi) = \{(x,y) \in X \times \mathbb{R}, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans $X \times \mathbb{R}$*

ii) *L'ensemble $\{x \in X, \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé dans X pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*

iii) *Pour tout $x \in X$, tout suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers x, on a:*

$$\lim_{n \to \infty} \inf \varphi(x_n) = \lim_{n \to \infty} (\inf_{k \geq n} \varphi(x_k)) \geq \varphi(x)$$

Exemple 0.2.1 *1. toute fonction continue est semi-continue infieurement.*

2. une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est continue $\Longleftrightarrow$ si f et $(-f)$ sont semi-continue infieurement.

Définition 0.2.8 *Un hyperplan (affine) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in X : f(x) = \alpha\} \qquad (H \text{ est fermé} \Leftrightarrow f \text{ bornée})$$

Théorème 0.2.2 *(Théoreme de Hahn Banach, forme géométrique) Soient A et B deux ensembles convexes non vides et disjoints d'un espace vectoriel normé réel X. Si A est ouvert,il existe une forme linéaire continue f sur X ($f \in X^*$).et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, on ait $f(a) < \alpha \leq f(b)$. En particulier, A et B sont séparés par l'hypothèse affine fermé H.*

Définition 0.2.9 *(Théoreme de graphe férmé)*
Soient X et Y deux espaces de Banach et $T : X \longrightarrow Y$ est une application linéaire. Alors, T est continue si et seulement si son graphe $G(T)$ est fermé dans l'espace de Banach $X \times Y$.

Définition 0.2.10 *(Théoreme de Banach-Steinhauss) Soient X et Y deux espaces vectoriels normés, et $(T_n)_n$ une famille de suites dans $\mathcal{L}(X, Y)$. On suppose que X est complet et que, pour tout $x \in X$,*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\|_Y < \infty.$$

On a alors

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Exercice 0.2.1 *1) Soit $\alpha_j \geq 0, 1 \leq j \leq m$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_m}, r, r_j \in]0, +\infty]$ on a*

$$\frac{1}{r}\prod\nolimits_{j=1}^{m} \alpha_j^r \leq \sum\nolimits_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j}\alpha_j^{r_j}$$

Cas particuliere pour $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*}$ $(m = 2, r = 1, r_1 = p \quad , r_2 = p^*)$ on a

$$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p^*}\beta^{p^*} \tag{0.2.1}$$

2)

$$\prod\nolimits_{j=1}^{m} \alpha_j^{\frac{r}{r_j}} \leq r\sum\nolimits_{j=1}^{m} \frac{1}{r_j}\alpha_j, \alpha_j \geq 0$$

et

$$(\sum\nolimits_{i=1}^{n}\prod\nolimits_{j=1}^{m} \alpha_{i,j}^r)^{\frac{1}{r}} \leq \prod\nolimits_{j=1}^{m}(\sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_{i,j}^{r_j})^{\frac{1}{r_j}}, \alpha_{i,j}^r \geq 0$$

Preuve. Le cas particuliere. La fonction exponentielle étant convexe, on a

$$\exp(tx + (1-t)y) \leq t\exp(x) + (1-t)\exp(y)$$

pur tout $x, y \in \mathbb{R}$ et $t \in [0, 1]$, et l'inégalité cherchée s'obtient en prenant x et y tel que $\exp(x) = \alpha^p$ et $\exp(y) = \beta^{p^*}$ et $t = \frac{1}{p}, (1-t) = \frac{1}{p^*}$ ■

0.3 La convergence faible

Définition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach. La suite $(x_n)_n$ de X est dite converge faiblement vers $x \in X$ si*

$$\forall f \in X^* : \lim_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = f(x)$$

et on écrit $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposition 0.3.1 *Soit X un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite de X. On a*

a) Si $(x_n)_n$ converge vers x fortement, alors elle est convergente faiblement vers x, i.e.,

$$\left(\lim_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n - x\| = 0\right) \Longrightarrow \left(x_n \xrightarrow{w} x\right)$$

b) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée. De plus on a

$$\|x\| \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} \|x_n\| .$$

c) d) Si $x_n \xrightarrow{w} x$, et $f_n \longrightarrow f$ fortement $(\|f_n - f\|_{E^*} \longmapsto 0)$ dans E^*, alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$

On notera X et Y deux espaces de Banach. La norme sur X est usuellement notée $\|.\|_X$ ou simplement $\|.\|$, l'orsqu'un seul espace est en jeu. La boule unité fermée de X sera notée B_X. On désigne par X^* le dual topologique de X : l'espace des formes linéaires continues sur X muni de la norme duale $\|f\|_{X^*} = \sup_{x \in X} |f(x)|$. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires continues de X dans Y.

On dira que deux espaces de Banach X, Y sont isomorphes $(X \sim Y)$ si il existe un opérateur invertible I (dit isomorphisme) de X dans Y. Un opérateur linéaire continu $T : X \longrightarrow Y$ tel que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ pour quelques $c > 0$ et tout $x \in X$ est dit isomorphisme.

Une isométrie est un opérateur linéaire continu $I : X \longrightarrow Y$ telle que $\|I(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Deux espaces de Banach X, Y sont isométriques $(X \simeq Y)$ s'il existe une isométrie entre X et Y.

Chapitre 1

Espaces de suites de Banach

1.1 Espaces de suites classique

Soit p un nombre réel tel que $1 \leq p \leq +\infty$. Soit

$$\mathcal{S} = \left\{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$\mathcal{S}$ muni de le loi $(+)$

$$(x + y) = (x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$$

et le loi $(.)$

$$\lambda x = \lambda \, (x_n)_n = (\lambda x_n)_n \, , \lambda \in \mathbb{K}$$

est un espace véctoriel.

Soit les sous espaces suivants

$$\ell_\infty(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$
$$c_0(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n \to \infty}{\to} 0 \right\}$$
$$c(\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_n \in \mathcal{S} : x_n \underset{n \to \infty}{\to} \ell \in \mathbb{C} \right\}$$

ℓ_∞ : l'espace des suites bornées.

c_0 : l'espace des suites convergents vers 0.

c : l'espace des suites convergents.

Théorème 1.1.1 *Les ensembles ℓ_∞, c_0, c munis de la norme*

$$\|x\|_\infty = \|x\|_{\ell_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|, \forall n \in \mathbb{N}$$

sont des espaces de Banach.

Remarque 1.1.1 *L'espace c_0 c'est un sous-espace fermé de ℓ_∞ donc un espace de Banach.*

Rappelons que $\ell_p(\mathbb{K}) = \ell_p$ est l'espace vectoriel des suites de scalaires $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour lesquelles la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p$ converge.
Alors $\ell_p(\mathbb{K})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$ définie par:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

pour tout $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$.

Proposition 1.1.1 *Soit $1 \leq p \leq +\infty$. Alors*
1) $(c_0)^* = \ell_1$ isomorphisme isometrique. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_1 = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_\infty \leq 1\right\}. \tag{1.1.1}$$

2) $(\ell_p)^* = \ell_{p^*}$ isomorphisme isometrique pour $p \geq 1$. De plus on a

$$\|(x_n)_n\|_p = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right| : (\alpha_i)_i \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_n)_n\|_{p^*} \leq 1\right\}. \tag{1.1.2}$$

1.2 Espaces de suites p-sommable

Tout d'abord, si X un espace de Banach, nous noterons $X^{\mathbb{N}}$ l'espace de toute les suites $(x_i)_i$ d'éléments de X. L'ensemble $X^{\mathbb{N}}$ est espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi d'addition

$$(x_n)_n + (x_n)_n := (x_n + y_n)_n,$$

et la loi

$$\lambda.(x_n)_n := (\lambda x_n)_n, \text{ où } \lambda \in \mathbb{K}.$$

Définition 1.2.1 *(L'espace des suites p-sommables). Une suite (x_n) (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X est absolument p-sommables si la suite scalaire $(\|x_n\|)$ (resp.$(\|x_i\|)_{1\leq i\leq n}$) est dans ℓ_p. On note $\ell_p(X)$ (resp.$\ell_p^n\ (X)$) l'espace de suites $(x_n)_n$ (resp.$(x_i)_{1\leq i\leq n}$) dans X absolument p-sommables. Pour tout $x=(x_n)_n \in \ell_p(X)$, on pose*

$$\begin{aligned} \|(x_n)_n\|_p &= \|(x_n)_n\|_{\ell_p(X)} &&= \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}} && si\ 1\leq p<\infty \\ \|(x_n)_n\|_\infty &= \|(x_n)_n\|_{\ell_\infty(X)} &&= \sup_n \|x_n\| && si\ p=\infty \end{aligned}$$

Proposition 1.2.1 *(Inégalité de Hölder). Soient X un espace vectoriel normé et $1\leq p\leq +\infty$. On a*

i) $\sum_{i=1}^n \|x_i\|\,\|y_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$

et $\sum_{i=1}^n \|x_i\|\,\|y_i\| \leq \sup\limits_{1\leq i\leq n}\|y_i\| \sum_{i=1}^n \|x_i\|$ *pour* $p=1$.

ii) Soient $(x_n)_n \in \ell_p(X), (y_n)_n \in \ell_q(X)$ et $s,q,r \in [1,+\infty[$ avec $\frac{1}{r}=\frac{1}{s}+\frac{1}{q}$. Alors $(\|x_n\|\,\|y_i\|)_i \in \ell_r$. De plus on a

$$\left\|(\|x_i\|\,\|y_i\|)_{i=1}^n\right\|_r \leq \left\|(x_i)_{i=1}^n\right\|_s . \left\|(y_i)_{i=1}^n\right\|_q . \tag{1.2.1}$$

Preuve. Les cas $p=1$ et $p=\infty$ étant immédiats par la définition, supposons que $1<p<+\infty$.

i) On suppose que $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \neq 0$ ou $\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*} \neq 0$. On pose

$$c_i = \frac{\|x_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}}\ ,\ 1\leq i\leq n$$

et

$$d_i = \frac{\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}}\ ,\ 1\leq i\leq n.$$

D'après (0.2.1) on a

$$c_i d_i \leq \frac{1}{p}c_i^p + \frac{1}{p^*}d_i^{p^*}.$$

Ce qui implique

$$\frac{\|x_i\|\,\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p} + \frac{1}{p^*}\frac{\|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^n \|y_i\|^{p^*}} \forall\ 1\leq i\leq n$$

On utilise la somme sur les deux coté

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\|}{\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}} \leq \frac{1}{p}\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p}{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p}+\frac{1}{p^*}\frac{\sum_{i=1}^{n}\|x_{yi}\|^{p^*}}{\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}}.$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|\|y_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

ii) $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q} \Rightarrow 1=\frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)}+\frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)} \Rightarrow p>r$ ou $q>r$. On pose : $\|X_i\|=\|x_i\|^r$ et $\|Y_i\|=\|y_i\|^r$. D'après *(i)* ona :

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\|y_i\|^r &= \sum_{i=1}^{n}\|X_i\|\|Y_i\| \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|X_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{r}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|Y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{r}{q}}\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^r\|y_i\|^r\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^{\frac{p}{r}}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{\frac{q}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\|^{q}\right)^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Si $p=r,(q=+\infty)$ on utiliser (ii). ■

Proposition 1.2.2 *Soient* $(x_n)\in\ell_p(X)$,$(y_n)\in\ell_q(Y)$ *et* , $r,p,q\in\,]0,+\infty[$ *tel que* $\frac{1}{r}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$. *Alors*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^r\|y_n\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \|(x_n)\|_p\|(y_n)\|_q$$

Preuve. Il suffit d'utiliser l'inégalité de Hölder (1.2.1) pour n fixé et passer à la limite pour n tend vers $+\infty$. ■

Théorème 1.2.1 *Soit* $p\geq 1$. $\left(\ell_p(X),\|\cdot\|_p\right)$ *est un espace de Banach.*

Preuve. Soient $x=(x_n)_n$, $y=(y_n)_n\in\ell_p(X)$ et $\lambda\in\mathbb{K}$. On a

$$\|\lambda x\|_p=\|(\lambda x_n)_n\|_p=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\lambda x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\lambda|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

alors $\lambda x \in \ell_p(X)$ et $\|\lambda x\|_p = |\lambda| \, \|x\|_p$.
Pour $p = 1$ on a,

$$\begin{aligned}
\|x+y\|_1 &= \|(x_n+y_n)_n\|_1 \\
&= \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n}\|x_i+y_i\| \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| + \lim_{n\longrightarrow+\infty}\sum_{i=1}^{n}\|y_i\| = \|(x_n)_n\|_1 + \|(y_n)_n\|_1 .
\end{aligned}$$

Soit maintenant $p > 1$. Puisque $\|x_n+y_n\|^p = \|x_n+y_n\| \, \|x_n+y_n\|^{p-1}$, on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_n+y_n\|^p \leq \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_i\| \, \|x_n+y_n\|^{p-1}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n}\|y_i\| \, \|x_n+y_n\|^{p-1}\right).$$

D'après l'inégalité de Hölder on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\|x_n\| \, \|x_n+y_n\|^{p-1} &\leq \|(x_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_n+y_n\|^{p^*(p-1)}\right)^{\frac{1}{p^*}} \text{ et} \\
\sum_{i=1}^{n}\|y_n\| \, \|x_n+y_n\|^{p-1} &\leq \|(y_n)_n\|_p \left(\sum_{i=1}^{n}\|x_n+y_n\|^{p^*(p-1)}\right)^{\frac{1}{p^*}},
\end{aligned}$$

de puis $p = p^*(p-1)$ on a

$$\sum_{i=1}^{n}\|x_n+y_n\|^p \leq \left(\|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p^*}},$$

il s'ensuit que

$$\|(x_n)_n + (y_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_p + \|(y_n)_n\|_p < \infty,$$

et aussi $\|(x_n)_n\|_p = 0$ implique que $\|x_n\| = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc $(x_n)_n = 0$. Ce qui montre que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est un espace vectoriel normé.
Montrons que $\left(\ell_p(X), \|\cdot\|_p\right)$ est complet. Soit $(x^{(n)})_n$ (où $x^{(n)} = (x_i^{(n)})_i \in \ell_p(X)$) est une suite de Cauchy dans $\ell_p(X)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\|_p^p = \sum_{i=1}^{\infty}\left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\|^p \leq \varepsilon^p, \tag{1.2.2}$$

alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$ on a

$$\left\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\right\| \leq \varepsilon,$$

On en déduit d'abord que pour chaque i fixé, $(x_i^{(n)})_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach X, donc elle converge vers un certain $x_i \in X$, posons $x = (x_i)_i$. Montrons que $x \in \ell_p(X)$. D'après (1.2.2) ceci revient à dire que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$m, n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| x_i^{(n)} - x_i^{(m)} \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre m vers $+\infty$ on déduit que

$$n \geq n_0 \Longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{N} \left\| x_i^{(n)} - x_i \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon,$$

maintenant en faisant $N \longrightarrow +\infty$ on obtient

$$\left\| x - x^{(n)} \right\|_p \leq \varepsilon, \text{ pour tout } n \geq n_0. \tag{1.2.3}$$

Alors, $x^{(n_0)} - x = \left(x_i^{(n_0)} - x_i \right)_i \in \ell_p(X)$ et enfin puisque $x^{(n_0)} \in \ell_p(X)$ on a

$$x = x^{(n_0)} - (x^{(n_0)} - x) \in \ell_p(X),$$

et d'après (1.2.3), nous avons $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} x^{(n)} = x$. Donc $\ell_p(X)$ est un espace de Banach. ■

Proposition 1.2.3 *Si* $(1 \leq q \leq p \leq \infty)$ *alors*

$$\ell_q(X) \subset \ell_p(X)$$

et

$$\left\| (x_n)_n \right\|_p \leq \left\| (x_n)_n \right\|_q, \textit{ pour tout } (x_n)_n \in \ell_q(X),$$

de plus, l'inclusion $I : \ell_q(X) \hookrightarrow \ell_p(X)$, $I((x_n)_n) = (x_n)_n$ *n'est pas une isométrie.*

Preuve. Soit $(x_n)_n \in \ell_q(X)$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

$$\|x_n\| \leq 1 \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

$\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} \|x_n\| = 0\right.$. Alors, pour $\varepsilon = 1$ donné $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq tel que:$n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n\| \leq 1$). Donc pour $n \geq n_0$ on a $\|x_n\|^p \leq \|x_n\|^q$, par conséquent

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p = \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=n_0}^{k} \|x_n\|^p \leq \lim_{k \longrightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{k} \|x_n\|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^q < \infty,$$

ceci implique que

$$(x_n)_n \in \ell_p(X) \quad \text{et} \quad \|(x_n)_n\|_p \leq \|(x_n)_n\|_q \ .$$

Soit $(x_n)_n = (x, x, 0, 0, ..) \in \ell_q(X)$ avec $x \in X, x \neq 0$. Alors si $p < \infty$,

$$\|I\left((x_n)_n\right)\|_p = 2^{\frac{1}{p}} \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| \, ,$$

et si $p = \infty$,

$$\|I\left((x_n)_n\right)\|_\infty = \|x\| \neq \|(x_n)_n\|_q = 2^{\frac{1}{q}} \|x\| \, ,$$

ce qui montre que I n'est pas une isométrie. ■

Maintenant on note par $c_0(X)$ l'espace de suites $(x_n)_n$ d'éléménts de X convergeant vers zéros. i.e.,

$$c_0(X) = \left\{(x_n)_n \subset X : \lim_n \|x_n\| = 0\right\}.$$

Proposition 1.2.4 *$c_0(X)$ est un sous-espace fermé de $\ell_\infty(X)$.*

Preuve. En effet , soit $(x^{(n)})_n$ une suite dans $c_0(X)$ telle que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x^{(n)} = x \in \ell_\infty(X),$$

notons que $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_k \in c_0(X)$ et $x = (x_k)_k$ et montrons que $(x_k)_k \in c_0(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|x^{(n)} - x\right\|_\infty = \sup_k \left\|x_k^{(n)} - x_k\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } n \geq n_0.$$

De plus il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\left\|x_k^{(n)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \text{ pour tout } k \geq k_0.$$

Par suite, por tout $k \geq k_0$ on a

$$\|x_k\| \leq \left\|x_k^{(n_0)} - x_k\right\| + \left\|x_k^{(n_0)}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\lim_{k \longrightarrow +\infty} x_k = 0$ ce qui donne $(x_k)_k = x \in c_0(X)$. ■

1.3 Le dual de $\ell_p(X)$

Si $x^* = (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$ où p^* est l'exposant conjugué de p, alors la formule

$$\psi_{x^*}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n), x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X) \tag{1.3.1}$$

définit une forme $\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^*$.

En effet, en appliquant l'inégalité de Hôlder, on obtient que $\psi_{x^*}(x)$ est bien défini et

$$|\psi_{x^*}(x)| \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \, \|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*}.$$

Par conséquent,

$$\psi_{x^*} \in [\ell_p(X)]^* \, et \, \|\psi_{x^*}\| \leq \|x^*\|_{p^*} \text{ pour tout } x^* \in \ell_{p^*}(X^*).$$

Ainsi, l'application linéaire $J : \ell_{p^*}(X^*) \to [\ell_p(X)]^*$ définie par $J(x^*) = \psi_{x^*}$ est continue, de norme ≤ 1. Comme $c_0(X)$ est un sous-espace de $\ell_\infty(X)$, les mêmes formules définissent aussi une application linéaire continue $J : \ell_1(X^*) \to [c_0(X)]^*$ de norme ≤ 1.

Théorème 1.3.1 *Soit $1 < p < +\infty$. Alors $(\ell_p(X))^*$ est isomorphisme isometrique à $\ell_{p^*}(X^*)$, où une suite $x^* = (x_n^*)_n$ dans $\ell_{p^*}(X^*)$ est identifiée à la fonctionnelle linéaire f donnée par*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \text{ pour tout } x = (x_n)_n \in \ell_p(X). \tag{1.3.2}$$

Preuve. On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccc} J: & \ell_{p^*}(X^*) & \longrightarrow & (\ell_p(X))^* \\ & (x_n^*)_n & \longmapsto & J((x_n^*)_n) = f, \end{array}$$

telle que f est la fonctionnelle linéaire comme dans (**??**). De plus, pour $(x_j)_j \in \ell_p(X)$ et par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}|f((x_j)_j)| &= \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_j)\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\| \|x_j\| \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left\|x_j^*\right\|^{p^*}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*} \|(x_j)_j\|_p .\end{aligned}$$

Ainsi, f est bien défini, continue et $\|f\| \leq \left\|(x_j^*)_j\right\|_{p^*}$. Par conséquent, J est bien définit, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part, nous définissons l'application linéaire I par

$$I : (\ell_p(X))^* \longrightarrow \ell_{p^*}(X^*),\ I(T) = (T \circ I_k)_k ,$$

où I_k est l'opérateur linéaire de X dans $\ell_p(X)$ donné par $I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \cdots)$, où x est la k-ème position dans la suite $I_k(x)$. L'application I_k est bien définie, linéaire et continue, avec $\|I_k(x)\|_p = \|x\|$ pour tout $x \in X$. Il est claire que $T \circ I_k = x_k^* \in X^*$, pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. On montre que $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}(X^*)$, donc (d'après (1.1.2)) il suffit de montrer que

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| < \infty \text{ pour tout } (\alpha_k)_k \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_k)_k\|_p \leq 1.$$

Pour $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in X, \|x_k\| \leq 1$, telle que ($\|T \circ I_k\| = \sup_{x_k \in B_X} |T \circ I_k(x_k)|$)

$$\|T \circ I_k\| \leq |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} .$$

Soit $(\beta_k)_k \subset \mathbb{K}$ avec $|\beta_k| = 1$ et $|T \circ I_k(x_k)| = T \circ I_k(x_k)\beta_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour chaque $(\alpha_k)_k \in B_{\ell_p}$, et par l'inégalité de Hölder on obtien

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}}\right) |\alpha_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| |\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| \\ &\qquad \left(\text{car } \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k = T((\alpha_n x_n)_n) \text{ et } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p^*}}} |\alpha_k| < \infty\right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| |\alpha_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^{p^*}}{2^k}\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{\infty} T\circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| &= |T((\alpha_k\beta_k x_k)_k)|\\ &\leq \|T\| \, \|(\alpha_k\beta_k x_k)_k\|_p\\ &\leq \|T\| \, \|(\alpha_k)_k\|_p\,,\end{aligned}$$

nous pouvons conclure que

$$(*) \leq (\|T\| + \varepsilon) \, \|(\alpha_k)_k\|_p\,.$$

Donc

$$\|(\|T\circ I_k\|)_k\|_{p^*} = \sup_{\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|\in B_{\ell_p}} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \|T\circ I_k\| \, \alpha_k\right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Ce qui implique que $(\|T\circ I_k\|)_k \in \ell_{p^*}$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, nous avons $(T\circ I_k)_k \in \ell_{p^*}(X^*)$, avec $\|(T\circ I_k)_k\|_{p^*} \leq \|T\|$ pour tout $T \in (\ell_p(X))^*$. Donc, I est bien définit, continue et $\|I\| \leq 1$.

En fin puisque $I\circ J = id_{\ell_{p^*}(X^*)}$ et $J\circ I = id_{(\ell_p(X))^*}$. Par conséquent, $\ell_{p^*}(X^*)$ et $(\ell_p(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Théorème 1.3.2 *On a l'identification isomorphisme isometrique*

$$(c_0\,(X))^* = \ell_1(X^*).$$

Preuve. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère l'opérateur linéaire

$$I_k : X \longrightarrow c_0\,(X)\,,\ \ I_k\,(x) = (0,\ldots,0,x,0,\ldots)\,,$$

où x est dans la k-ème position. Il est clair que cet opérateur est linéaire borné et

$$\|I_k\,(x)\|_{\infty} = \|x\|\,,\ \text{pour tout } x \in X.$$

Soit l'opérateur linéaire

$$I : (c_0\,(X))^* \longrightarrow \ell_1(X^*),\ \ I(T) = (T\circ I_k)_k\,.$$

Montrons que I est bien défini c'est-à-dire montrons que

$$(T \circ I_k)_k \in \ell_1(X^*) \text{ pour tout } T \in (c_0(X))^*,$$

donc (d'après (1.1.1)) il suffit de montrer que

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| < \infty \text{ pour tout } (\alpha_k)_k \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_k)_k\|_\infty \leq 1.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $T \circ I_k \in X^*$, de plus on a

$$\|T \circ I_k\| \leq \|T\| \|I_k\| = \|T\|.$$

D'où, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_k \in B_X$, telle que

$$\|T \circ I_k\| \leq |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Pour chaque $(\alpha_k)_k \subset \mathbb{K}, \|(\alpha_k)_k\|_\infty \leq 1$, on peut écrit

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| |\alpha_k| + \tfrac{\varepsilon}{2^k} |\alpha_k| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{\varepsilon}{2^k} |\alpha_k| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_\infty \\
&= (*).
\end{aligned}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $\beta_k \in \mathbb{K}$, $|\beta_k| = 1$, telle que

$$|T \circ I_k(x_k)| = T \circ I_k(x_k)\beta_k.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned}
(*) &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\beta_k \right| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_\infty \\
&\leq \|T\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} I_k(\beta_k x_k) \right\| + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_\infty \\
&\leq \|T\| \|(\alpha_k)_k\|_\infty + \varepsilon \|(\alpha_k)_k\|_\infty .
\end{aligned}$$

Ce qui conclut que

$$\|(\|T \circ I_k\|)_k\|_1 = \sup_{\|(\alpha_k)_k\|_\infty \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \|T \circ I_k\| \alpha_k \right| \leq \|T\| + \varepsilon < \infty.$$

Cela montre que $(\|T \circ I_k\|)_k \in \ell_1$, et bien sûr $(T \circ I_k)_k \in \ell_1(X^*)$, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on a

$$\|I(T)\| = \|(T \circ I_k)_k\|_1 \leq \|T\| \text{ pour tout } T \in (c_0(X))^*.$$

Alors I est continue avec une norme $\|I\| \leq 1$. D'autre part, on définit un opérateur linéaire

$$J : \ell_1(X^*) \longrightarrow (c_0(X))^*,$$

tel que

$$J(x^*)(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k),$$

pour tout $x^* = (x_k^*)_k \in \ell_1(X^*)$ et $x = (x_k)_k \in c_0(X)$. Avec ces notations on obtien

$$\begin{aligned}
|J(x^*)(x)| &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(x_k)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\| \|x_k\| \\
&\leq \|(x_k)_k\|_\infty \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\| \\
&= \|x^*\|_1 \|x\|_\infty < \infty.
\end{aligned}$$

Puisque $x \in c_0(X)$ est arbitraire on déduit que J est bien défini, continu et $\|J\| \leq 1$. D'autre part l'application I est une bejection et $I^{-1} = J$ car

$$I \circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J \circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^* \in \ell_1(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_1 = \|I \circ J(x^*)\|_1 \leq \|J(x^*)\|,$$

d'où $\|J(x^*)\| = \|x^*\|_1$, alors J est une isométrie et par conséquent $I : (c_0(X))^* \longrightarrow \ell_1(X^*)$ est une isométrie. Par conséquent, $\ell_1(X^*)$ et $(c_0(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Exercice 1.3.1 $(\ell_1(X))^* = \ell_\infty(X^*)$ *isomorphisme isometrique.*

Preuve. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_1(X)$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position et $I : (\ell_1(X))^* \longrightarrow \ell_\infty(X^*)$ par $I(T) = (T \circ I_k)_{k=1}^{\infty}$. Cet opérateur est bien défini, linéaire et continu avec

$$\|I(T)\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} \|T \circ I_k\| \leq \|T\|,$$

pour tout $T \in (\ell_1(X))^*$, ce qui entraine que $\|I\| \leq 1$. Maintenent on définit l'opérateur $J : \ell_\infty(X^*) \longrightarrow (\ell_1(X))^*$ par

$$J(x^*)(x) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j^*(x_j).$$

Où $x^* = \left(x_j^*\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(X^*)$ et $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1(X)$. J est linéaire, bien définie et continue, avec $\|J\| \leq 1$. Puisque $|J(x^*)(x)| \leq \|x^*\|_\infty \|x\|_1$.

D'autre part on a

$$I \circ J = id_{\ell_1(X^*)} \text{ et } J \circ I = id_{(c_0(X))^*}.$$

Ainsi, pour tout $x^* \in \ell_\infty(X^*)$ on a

$$\|x^*\|_\infty = \|I \circ J(x^*)\|_\infty \leq \|J(x^*)\| \leq \|x^*\|_\infty,$$

Donc J (et par conséquent I) est une isométrie. Par conséquent, $\ell_\infty(X^*)$ et $(\ell_1(X))^*$ sont isomorphes isométriquement. ■

Corollaire 1.3.1 *Si* $1 \leq p < \infty$, *on a*

$$\| (x_n)_n \|_p = \sup \left\{ \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| : (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in X^*, \| (x_n^*)_{n=1}^{\infty} \|_{p^*} \leq 1 \right\}. \tag{1.3.3}$$

Proposition 1.3.1 $\| (x_n)_n \|_{p,\omega} = \sup \left\{ \left\| \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n x_n \right\| : \| (\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \|_{p^*} \leq 1 \right\}.$

1.4 Espaces de suites faiblement p-sommable

Définition 1.4.1 *(L'espace des suites faiblement p-sommables) Une suite* (x_n) *(resp.*$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$*) dans* X *est faiblement p-sommables si la suite scalaire* $(x^*(x_n))$ *(resp.*$(x^*(x_i)_{1 \leq i \leq n}$*) est dans* ℓ_p *pour tout* $x^* \in X^*$. *On note* $\ell_p^w(X)$*(resp.*$\ell_p^{n\ w}(X)$*) l'espace des suites* (x_i) *(resp.*$(x_i)_{1 \leq i \leq n}$*) dans* X *faiblement p-sommables telle que*

$$\ell_p^w(X) := \{(x_n)_n \subset X : (\langle x^*, x_n \rangle)_n \in \ell_p, x^* \in X^*\}.$$

Pour tout $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, *on pose*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \|(x_n)_n\|_{\ell_p^w(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \quad si \quad 1 \leq p < \infty$$
$$\|(x_n)_n\|_{\ell_\infty^w(X)} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \sup_n |\langle x^*; x_n\rangle| \quad si \quad p = \infty$$

Théorème 1.4.1 *L'expression*

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup_{x^* \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}$$

est finie. De plus, $\|\cdot\|_{p,w}$ *définit une norme sur* $\ell_p^w(X)$.

Preuve. Soit $x = (x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, on peut associeé à x l'opérateur

$$T : X^* \longrightarrow \ell_p$$

défini par

$$T(x^*) = (x^*(x_n))_n.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x^*; x_n\rangle|^p < \infty$ pour tout $x^* \in X^* \Longrightarrow (x^*(x_n))_n \in \ell_p$ pour tout $x^* \in X^*$ et donc T est bien défini et linéaire. Comme X^* et ℓ_p sont des espaces de Banach, nous pouvons utiliser le théorème du graphe fermé pour montrer sa continuité. Il s'agit de montrer que si

$$\begin{cases} x_k^* \to_k x^* \\ T(x_k^*) \to_k \eta = (\eta_n)_n \text{ dans } \ell_p, \text{ alors } T(x^*) = \eta. \end{cases}$$

Pour tout $n \geq 1$, on a

$$|x_k^*(x_n) - \eta_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_k^*(x_i) - \eta_i|^p \to_k 0,$$

donc $x_k^*(x_n) \to_k \eta_n$ pour tout $n \geq 1$.

D'autre part

$$|x_k^*(x_n) - x^*(x_n)| \leq \|x_n\| \, \|x_k^* - x^*\|_{X^*} \to_k 0.$$

(i.e, $(x_k^*)_k$ converge vers $x^* \in X^*$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ la suite $(x_k^*(x_n))_k$ est converge vers $x^*(x_n)$).

Il en resulte que $x^*(x_n) = \eta_n$ pour tout $n \geq 1$. D'où $T(x^*) = (x^*(x_n))_n = (\eta_n)_n = \eta$. Par conséquent T est de graphe fermé et donc borné, en d'autre terme

$$\|(x_n)_n\|_{p,w} = \sup \left\{ (\sum_{n \in \mathbb{N}} |x^*(x_n)|^p)^{\frac{1}{p}} : x^* \in B_{X^*} \right\} = \|T\| < \infty$$

qui est ce qui nous voulions. On peut conclure facilement que $\|\cdot\|_{p,w}$ est une norme sur $\ell_p^w(X)$. ■

Exemple 1.4.1 *Soit* $(e_n)_n$ *est la base canonique de* ℓ_{p^*}, *alors* $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ *et* $\|(e_n)_n\|_{p,w} = 1$.

Nous considérons les relations entre les espaces de suites.

Théorème 1.4.2 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$. *Alors*

i) $\ell_\infty^w(X) = \ell_\infty(X)$,

ii) $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

iii) $\ell_p(X) = \ell_p^w(X)$ *pour tout* $1 \leq p < \infty$ *si et seulement si* $\dim(X)$ *est finie.*

Démonstration. iii) Puisque $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$, il suffit de montrer que $\ell_p^w(X) \subset \ell_p(X)$. On suppose que $\dim X = m$, alors X est isomorphe à $\mathbb{K}^m$ muni de la norme $\|\cdot\|_p$. Soit $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$, $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^m)$ et π_i désigne la i-ème projection de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_n\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|_{\mathbb{K}^m}^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{j=1}^{m} |x_n^j|^p\right)^{\frac{p}{p}}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{m} |\pi_j(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{+\infty} |\pi_j(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= m^{\frac{1}{q}} \|(x_n)_n\|_{p,w}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.4.3 $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_p)$ *est un espace de Banach.*

Démonstration. *$\ell_p^w(X)$ est complet. Si $p = \infty$ on a $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$, il est donc que $\ell_\infty^w(X)$ est un Banach. Pour $1 \leq p < \infty$. Ici, nous utilisons un raisonnement direct; un peu plus tard (voir Proposition 1.3), nous allons indique une façon différante). Soit $(x^k)_k$ où $x^k = (x_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$, une suite de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq: $\forall k, k' \geq N$ on a :*

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n^k\right\rangle - \left\langle x^*, x_n^{k'}\right\rangle\right|^p \leq \epsilon^p, \forall x^* \in B_{X^*}. \tag{1.4.1}$$

Pour tout $x^* \in B_{X^*}$.chaque terme de cette série est dominée par ϵ^p,donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\|x_n^k - x_n^{k'}\right\| = \sup\left\{\left|\left\langle x_n^k, x^*\right\rangle - \left\langle x_n^{k'}, x^*\right\rangle\right| : x^* \in B_{X^*}\right\} \leq \epsilon.$$

Ce qui montre que la suite $(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans X, comme X est complet , elle est donc convergente vers une limite x_n ,ça nous permet d'associer à chaque composante une limite, donc la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$converge vers une limite qui est $x = (x_n)_n$. Il reste de vérifier que $x \in \ell_p^w(X)$.D'après (1.4.1) et soit k'tend vers l'infinie. Alors, quand $k' \geq N$ on a

$$(\sum_{n\in\mathbb{N}} \left|\left\langle x^*, x_n - x_n^k\right\rangle\right|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall x^* \in B_{X^*}$$

donc $x - x^k$ et x appartient a $\ell_p^w(X)$. ■

■

Lemme 1.4.1 *Soient $(x_n)_n \in \ell_p^w(X)$ et $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$. Alors, la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ est convergente dans X.*

Preuve. Pour $k \in \mathbb{N}$, d'après le théorème de Hahn-Banach et l'inégalité de Hölderon a

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n x_n\right\|_X \\
&= \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left|\sum_{n=m+1}^{k} \alpha_n \psi\left(x_n\right)\right| \\
&\leq \left(\sum_{n=m+1}^{k} \left|\alpha_n\right|^{p^*}\right)^{\frac{1}{q^*}} \sup_{x^*\in B_{X^*}} \left(\sum_{n=m+1}^{k} \left(\left|x^*\left(x_n\right)\right|\right)^q\right)^{\frac{1}{q}}.
\end{aligned}$$

Maintenant en prenant la limite lorsque $k, m \to \infty$, on obtient que $(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_n x_n)_n$ est une suite de Cauchy sequence dans X, qui est un espace Banach. Par conséquent, la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \alpha_n x_n$ est convergente dans X. ■

Proposition 1.4.1 *(TD) Soientt X un espace de Banach et $1 \leq p \leq \infty$. Alors*

1) $\ell_p^w(X) = \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ isomorphisme isometrique pour $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1^w(X) = \mathcal{L}(c_{0,}X)$ isomorphisme isometrique pour $p = 1$.

Proposition 1.4.2 *On a*

$$\|(y_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{y\in B_Y}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|y\left(y_n^*\right)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour tout } (y_n^*)_n \in \ell_p^w(Y^*)$$

1.5 Espaces de suites fortement p-sommables

Définition 1.5.1 *Soit $1 < p \leq \infty$. On dit que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ est une suite Cohen fortement p-sommables si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^*\left(x_n\right)$ est convergente pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$. L'espace des suites Cohen fortement p-sommables sera noté $\ell_p\left\langle X\right\rangle$.*

Théorème 1.5.1 *L'espace $\ell_p\left\langle X\right\rangle$ est un espace normé et la norme est donnée par*

$$\left\|(x_n)_{n\geq 1}\right\|_{\langle p\rangle} = \sup\left\{\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*\left(x_n\right)\right| : \|\ (x_n^*)_{n\geq 1}\ \|_{p^*,\omega} \leq 1\right\}. \quad \text{(norme-coh)}$$

Preuve. Soit $(x_n)_{n\geq 1} \in \ell_p\left\langle X\right\rangle$. Montrons que $\|\cdot\|_{\langle p\rangle}$ est fini.
On peut considérer la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ comme une forme lineaire $f \in [\ell_{p^*,\omega}(X^*)]^*$ définit par

$$f : \ell_{p^*,\omega}(X^*) \to \mathbb{K}; f\left((x_n^*)_{n=1}^{\infty}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*\left(x_n\right)$$

On définit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ la suite des formes lineaire dans $\ell_{p^*}^w(X^*)$ par

$$f_n((x_n^*)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*\left(x_i\right).$$

Il est facile de remarquer que toutes les f_n sont continues, et par définition de f_n et f, on a f_n converge vers f pour tout les points de $\ell_{p^*}^w(X^*)$, et comme $\ell_{p^*}^w(X^*)$ est complet; on applique le théorème de Banach Steinhaus, on obtient: f est continue et $\|\ (x_n)_{n=1}^{\infty}\ \|_{\langle p\rangle} = \sup\limits_{\|(x_n^*)_{n=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega}\leq 1}\left|\sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*\left(x_n\right)\right| = \|\ f\ \| < \infty$. ■

Proposition 1.5.1 *Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$. La série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} x_n^*\left(x_n\right)$ est convergete pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$ si et seulement si la série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|x_n^*\left(x_n\right)|$ est convergete aussi pour tout $(x_n^*)_{n\geq 1} \in \ell_{p^*}^w(X^*)$.*

Dans ce cas

$$\left\|(x_n)_{n\geq 1}\right\|_{\langle p\rangle} = \sup\left\{\sum_{n=1}^{+\infty}|x_n^*\left(x_n\right)| : \|\ (x_n^*)_{n\geq 1}\ \|_{p^*,w} \leq 1\right\}$$

Preuve. La première inégalité ($\leq$) dans (**??**) est évidente. Pour l'inégalité inverse,pour tout $(x_n^*)_n \in B_{\ell_{p^*}^w(^*)}$, on peut choisir une suite scalaire $(\lambda_n)_n$, avec $|\lambda_n| = 1$, por tout n tel que

$$x_n^*(x_n) = \lambda_n x_n^*(x_n) = |\psi_n(x_n)|.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n)$$

et puisque $\|(x_n^*)_n\|_{p^*,\omega} = \|(\psi_n)_n\|_{p^*,\omega}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\sup_{\|(\varphi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^*(x_n)| &= \sup_{\|(\psi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n) \\ &\leq \sup_{\|(\psi_n)_n\|_{p^*,q^*}^w \leq 1} \left|\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(x_n)\right|.\end{aligned}$$

■

Proposition 1.5.2 *$(\ell_p\langle X\rangle, \|\cdot\|_{\langle p\rangle})$ est un espace de Banach.*

Preuve. D'après le Théorème **??** $\|\cdot\|_{\langle p\rangle}$ est une norme. Donc, il suffit de montrer que $\ell_p\langle X\rangle$ est un sous-espace vectoriel complet.
Soit $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de Cauchy dans $\ell_p\langle X\rangle$ telle que $x_n = (x_{n,i})_{i=1}^{\infty}$:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, m > n_0 : \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

d'après la Proposition 1.5.1 on a

$$\| x_n - x_m \|_p \leq \| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} < \varepsilon$$

donc $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $l_p(X)$. On pose

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x, \text{ et } x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$$

on a

$$\| x_n - x_m \|_{\langle p\rangle} = \sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in B_{l_{p^*,w}(X)}} \left|\sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_{m,i})\right| < \varepsilon$$

pour $m \longrightarrow \infty$, cela donne

$$\sup_{(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i} - x_i) \right| < \varepsilon$$

Ce qui implique que $\| x_n - x \|_{\langle p \rangle} < \varepsilon$, alors

$$\begin{aligned}
&\| x \|_{\langle p \rangle} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^* (x_i) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\
&= \sup \left\{ \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^* (x_i - x_{n,i}) + x_i^*(x_{i,n}) \right| : \| (x_i^*)_{i=1}^{\infty} \|_{p^*,\omega} \leq 1 \right\} \\
&\leq \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_i - x_{n,i}) \right| + \sup_{\|(x_i^*)_{i=1}^{\infty}\|_{p^*,\omega} \leq 1} \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^*(x_{n,i}) \right| \\
&< \varepsilon + \| x_n \|_{\langle p \rangle}
\end{aligned}$$

donc, $x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$, alors, $\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = x$ dans $\ell_p \langle X \rangle$, d'où $\ell_p \langle X \rangle$ est complet. ∎

Exercice 1.5.1 *Soit* $1 \leq p \leq +\infty$, *Montrer que*

1) $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p (X) \subset \ell_p^w (X)$ *et*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p,\omega} \leq \| \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \| \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle},$$

pour tout $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$ *et* $1 < p \leq +\infty$.

2) $\ell_1 \langle X \rangle = \ell_1 (X)$ *et*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle 1 \rangle}$$

Preuve. 1) On a: $\ell_p (X) \subset \ell_p^w (X)$ et $\|(x_n)_n\|_{p,\omega} \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p$ *pour tout* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X)$.

D'autre part, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p \langle X \rangle$, d'après (1.3.3) et comme $B_{\ell_{p^*}(X)} \subset B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}$ on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&\leq \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{p^*,\omega}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle}
\end{aligned}$$

alors, $\ell_p \langle X \rangle \subset \ell_p\ (X)$ et $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle p \rangle}$
2) Pour $p = 1, p^* = \infty$, soit $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \langle X \rangle$, d'après (1.3.3) on a

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_\infty(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&= \sup_{(x_n^*)_{n=1}^{\infty} \in B_{\ell_{\infty,\omega}(X)}} \left| \sum_{n=1}^{+\infty} x_n^*(x_n) \right| \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\langle 1 \rangle}
\end{aligned}$$

■

1.6 Les énoncés d'exercices

Exercice 1

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty$ $(1 \leq p < \infty)$ (i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$). Montrer que:
a- si $1 \leq p \leq q \leq \infty$, alors $\ell_p(X) \subset \ell_q(X)$ et

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_q \leq \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p, \text{ pour tout } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X).$$

b- l'inclusion $i : \ell_p(X) \hookrightarrow \ell_q(X)$, $i((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas une isométrie.

Exercice 2

Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X telle que $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)|^p < +\infty$ pour toute $\psi \in X^*$ (i.e., $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p^w(X)$).
a- En utilisant le théorème du graphe fermé, montrer que l'aplication linéaire

$$\begin{array}{rccl}
T & : & X^* & \longrightarrow & \ell_p \\
& & \psi & \longmapsto & (\psi(x_n))_n
\end{array}$$

est continue.
b- En déduire que $\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = \sup_{\psi \in B_{X^*}} (\sum_{n=1}^{\infty} |\psi(x_n)| < +\infty.$

Exercice 3

i) Soit X un espace de Banach réel et $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que

a- $\ell_p(X) \subset \ell_p^w(X)$.

b- $\ell_\infty(X) = \ell_\infty^w(X)$ et $\|(x_n)_n\|_\infty = \|(x_n)_n\|_{\infty,w}$.

ii) Soit $X = c_0$ l'espace des suites réelles qui convergente vers 0. Cet espace est muni de sa norme usuelle $\|.\|_\infty$. On considère les suites $(e_n)_n$ où $e_n = (0, ...0, \underbrace{1}_{n-ième}, ..., 0, ...)$. Montrer que

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|e_n\|_\infty = 1$ et $e_n \in c_0$.

b) $(e_n)_n \notin \ell_1(c_0)$.

c) $(e_n)_n \in \ell_1^w(c_0)$.

iii) En déduire que l''inclusion (2.a) est stricte.

Exercice 4

Soit $1 < p < \infty$. On considère l'opérateur

$$\begin{array}{cccc} T & : & \mathcal{L}(\ell_{p^*}, X) & \longrightarrow & \ell_p^w(X) \\ & & u & \longmapsto & (u(e_n))_n \end{array}$$

où $(e_n)_n$ est la base canonique de ℓ_{p^*}. Montrer que

a) $(e_n)_n \in \ell_p^w(\ell_{p^*})$ et $\|(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{p,w} = 1$.

b) T est linéaire et bien défini.

c) la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n u(e_n)$ est convergente pour tout $(\alpha_n)_n \in \ell_{p^*}(\mathbb{K})$.

d) $\|T(u)\| = \|u\|$.

e) T est surjective

f) En déduire que $\mathcal{L}(\ell_{p^*}, X)$ et $\ell_{p,w}(X)$ sont isomorphe isométrique et $(\ell_p^w(X), \|\cdot\|_{p,w})$ est un espace de Banach.

Exercice 5

Soit $(x_n^*)_n \in \ell_p^w(X^*)$. Montrer que

$$\|(x_n^*)_n\|_{p,w} = \sup_{x\in B_X} (\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x_n^*, x\rangle|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Exercice 6

Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On peut associeé à T les opérateurs linéires

$$\begin{array}{rccl} \widehat{T}^p & : & \ell_p(X) & \longrightarrow & \ell_p(Y) \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccl} \widehat{T}^{p,w} & : & \ell_p^w(X) & \longrightarrow & \ell_p^w(Y) \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^{p,w}((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^p$ et $\widehat{T}^{p,w}$ sont continus et $\left\|\widehat{T}^p\right\| = \left\|\widehat{T}^{p,w}\right\| = \|T\|$.

Exercice 7

1) Soient X un espace de Banach et $1 < p < \infty$. On définit les opérateurs $I_k : X \longrightarrow \ell_p \langle X \rangle$ par

$$I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \text{ pour tout } k \in \mathbb{N},$$

où x est dans la k-ème position. Montrer que I_k est bien défini, linéaire et continu et $\|I_k(x)\|_{\langle p \rangle} = \|x\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) Soit $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. On peut associeé à T l'opérateur linéire

$$\begin{array}{rccl} \widehat{T}^{\langle p \rangle} & : & \ell_p \langle X \rangle & \longrightarrow & \ell_p \langle Y \rangle \\ & & (x_n)_n & \longmapsto & \widehat{T}^p((x_n)_n) = (T(x_n))_n \end{array}$$

Montrer que $\widehat{T}^{\langle p \rangle}$ est continu et $\left\|\widehat{T}^{\langle p \rangle}\right\| = \|T\|$.

Bibliographie

[1] J. Cohen, Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates, Math. Ann. 201 (1973) 177-200.

[2] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, Absolutely Summing Operators.Cambridage University press, Cambridage(1995)

[3] A. Grothendieck, Sur certaines classes des suites dans les espaces de Banach, et le théorème de Dvoretzky-Rogers, Bol.Soc.Mat.S˜ao Paulo.8(1956) 81-110., C. R. Math. Acad. Sci. Paris 233 (1951) 1556-1558.

[4] M.C. Matos, Absolutely summing mappings, nuclear mappings and convolution equations (2005).

[5] A. Pietsch, Operator ideals. Deutsch. Verlag Wiss, Berlin, 1978; North-Holland, Amsterdam-London-New York-Tokyo, 1980.