# Chapitre 1

# RECHERCHE DES RACINES D'UNE FONCTION

**Introduction :**

Bien des équations rencontrées en pratique ou en théorie ne peuvent pas être résolues exactement par des méthodes formelles ou analytiques. En conséquence, seule une solution numérique approchée peut être obtenue en un nombre fini d'opération. Evariste Galois a démontré, en particulier, que l'équation $P_n(x) = 0$ ne possède pas de solution algébrique (sauf accident...) si $P_n(x)$ est un polynôme de degré supérieur à 4. Il existe un grand nombre d'algorithmes permettant de calculer les racines de l'équation $f(x) = 0$ avec une précision théorique arbitraire. Nous n'en verrons que les principaux. Si l'équation à résoudre est mise sous la forme $g(x) = h(x)$, nous traçons les courbes représentant *g* et *h*. Les racines de l'équation $g(x) = h(x)$ étant données par les abscisses des points d'intersection des deux courbes [1].

## 1. Méthode de Newton

De nombreux problèmes de physique se concluent par la résolution d'une équation $f(x)=0$. Bien souvent, il n'est pas possible de résoudre exactement cette équation, et on cherche une valeur approchée de la solution (ou des solutions). Newton a proposé une méthode générale pour obtenir une telle approximation. L'idée est de remplacer la courbe représentative de la fonction par sa tangente. La méthode de Newton est parfois aussi appelée méthode de Newton-Raphson. En fait, Newton dévoile cette méthode dans *Method of Fluxions*, ouvrage publié en 1736 (après sa mort). Cette méthode était aussi décrite par Joseph Raphson dans *Analysis Aequationum* en 1690. Toutefois, il semble que la partie de *Method of Fluxions*qui nous concerne avait été en fait écrite en 1671.

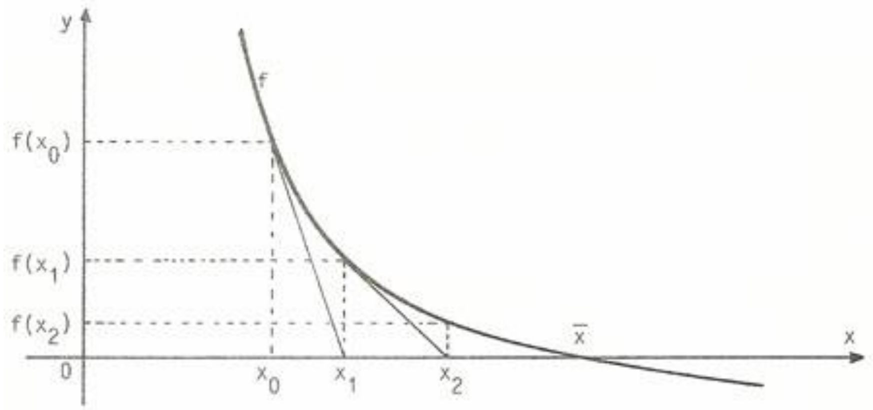
Cependant, Newton et Raphson ne l'appliquent qu'à des polynômes. Sa forme générale est due à Simpson, en 1740 [2].

On part d'un point $x_0$ de l'intervalle de définition de *f*, et on considère la tangente à la courbe représentative de *f* en $(x_0,f(x_0))$. Soit $x1$ l'abscisse de l'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses. Puisque la tangente est proche de la courbe, on peut espérer que $x1$ donne une meilleure estimation d'une solution de l'équation $f(x)=0$ que $x_0$. On recommence alors le procédé à partir de $x_1$, et on construit par récurrence une suite $(x_n)$

définie par :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Considérons la figure suivante:




(57.213)

Si $x_0$ est une approximation de la racine $\bar{x}$, nous remarquons que $x_1$ en est une meilleure. $x_1$ est l'intersection de la tangente à la courbe en $(x_0, f(x_0))$ et de l'axe des abscisses. $x_2$ est encore une meilleure approximation de $\bar{x}$, $x_2$ est obtenu de la même manière que $x_1$ mais à partir de $(x_1, f(x_1))$.

Le méthode de Newton consiste en la formalisation de cette constatation géométrique.

Pour utiliser cette technique, rappelons que si nous prenons une fonction *f* qui est dérivable en $x_0$, alors nous pouvons la réécrire sous la forme:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \vartheta(x - x_0)$$

où $f'(x_0)$ est la dérivée de *f* en $x_0$ et $\vartheta(x - x_0)$ est une fonction qui tend vers 0 comme $(x - x_0)^n$ pour $n \geq 2$ lorsque *x* tend vers $x_0$ (c'est un terme correctif qui sous-tend la suite des termes du développement de Taylor).

En appliquant ce résultat à la résolution de $f(x) = 0$, nous obtenons:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0) + \vartheta(\bar{x} - x_0)$$

La fonction $\vartheta(\bar{x} - x_0)$ empêche la résolution de cette équation par rapport à $\bar{x}$. En négligeant le terme $\vartheta(\bar{x} - x_0)$, l'équation se réécrit:

$$0 = f(\bar{x}) = f(x_0) + f'(x_0)(\bar{x} - x_0)$$

et se résout aisément par rapport à $x_1$:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Mais $x_1$ ne satisfait pas, en générale, l'égalité $f(x_1) = 0$. Mais comme nous l'avons déjà souligné, $|f(x_1)|$ est plus petit que $|f(x_0)|$ si la fonction *f* satisfait à certaines conditions.

La méthode de Newton consiste à remplacer l'équation:

$$0 = f(\overline{x}) = f(x_0) + f'(x_0)(\overline{x} - x_0)$$

par:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)$$ (

et à résoudre itérativement cette équation.

Les conditions suivantes sont suffisantes pour assurer la convergence de la méthode:

Dans un intervalle [*a*,*b*] comprenant $x_0$ et $\overline{x}$ il faut que:

1. La fonction soit deux fois dérivable

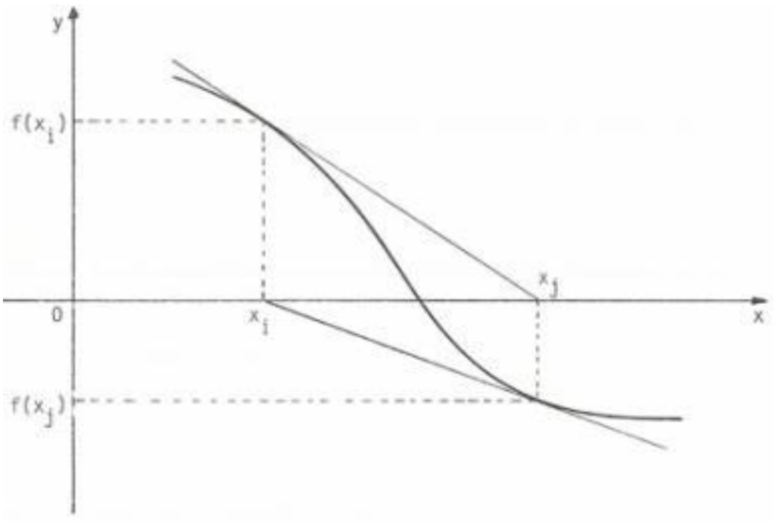
2. La dérivée *f* ' ne s'annule pas (monotonie)

3. La deuxième dérivée soit continue et ne s'annule pas (pas de point d'inflexion)

***<u>Remarque:</u>*** Il suffit souvent de vérifier les conditions (1) et (2) pour que le processus soit convergent.

La condition (2) est évidente, en effet si $f'(x) = 0$ alors l'itération peut conduire à une erreur de calcul (singularité).

La condition (3) est moins évidente, mais le graphique suivant illustre un cas de non-convergence. Dans ce cas, le processus à une boucle calculant alternativement $x_i$ et $x_j$.




Si la fonction *f* est donnée analytiquement, sa dérivée peut-être déterminée analytiquement. Mais dans bien des cas, il est utile, voire indispensable de remplacer $f'(x_n)$ par le quotient différentiel:

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h}$$

où *h* doit être choisi suffisamment petit pour que la différence:

$$\left| f'(x_n) - \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} \right|$$

soit elle aussi suffisamment petite.

L'itération s'écrit alors:

$$x_{n+1} = x_n - h\frac{f(x_0)}{f(x_n + h) - f(x_n)}$$

**Convergence de la méthode:**

Si la méthode de résolution est convergente, l'écart entre $\overline{x}_n$ et $\overline{x}$ diminue à chaque itération. Ceci est assuré, par exemple, si l'intervalle [*a*,*b*] contenant $\overline{x}_n$, voit sa longueur diminuer à chaque étape. La méthode de Newton est intéressante car la convergence est quadratique:

$$|x_{n+1} - \overline{x}| < \alpha |x_n - \overline{x}|^2$$

alors que la convergence des autres méthodes est linéaire:

$$|x_{n+1} - \overline{x}| < \alpha |x_n - \overline{x}|$$

Considérons, par exemple, la méthode de la bissection vue précédemment. A chaque itération la longueur de l'intervalle [*a*,*b*] diminue de moitié. Ceci nous assure que l'écart $|x_{n+1} - \overline{x}|$ est réduit de moitié à chaque étape du calcul:

$$|x_{n+1} - \overline{x}| \le 0.5 |x_n - \overline{x}|$$

Pour démontrer la convergence quadratique de la méthode de Newton, il faut utiliser les développements limités de *f* et *f* ' au voisinage de $\overline{x}$ :

$$f(x_n) \cong \underbrace{f(\overline{x})}_{=0} + \frac{1}{1!}(x_n - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{1}{2!}(x_n - \overline{x})^2 f''(\overline{x})$$

$$f'(x_n) = f'(\overline{x}) + \frac{1}{1!}(x_n - \overline{x})f''(\overline{x})$$

Mais:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

donc:

$$x_{n+1} \cong x_n - \frac{\frac{1}{1!}(x_n - \overline{x})f'(\overline{x}) + \frac{1}{2!}(x_n - \overline{x})^2 f''(\overline{x})}{f'(\overline{x}) + \frac{1}{1!}(x_n - \overline{x})f''(\overline{x})}$$

En soustrayant $\overline{x}$ à gauche et à droite de l'égalité et en mettant les deux termes du seconde membre au même dénominateur, il vient:

$$x_{n+1} - \overline{x} \cong (x_n - \overline{x})^2 \frac{0.5 f''(\overline{x})}{f'(\overline{x}) + (x_n - \overline{x})f''(\overline{x})}$$

et dès que $x_n - \overline{x}$ est assez petit, le dénominateur peut être simplifié.

$$x_{n+1} - \overline{x} \cong (x_n - \overline{x})^2 \, 0.5 \frac{f''(\overline{x})}{f'(\overline{x})}$$

ce qui montre bien que la convergence est quadratique [1].

***Son avantage :*** elle converge très rapidement : approximativement, le nombre de décimales exactes double `a chaque itération [3].

***Son inconvénient :*** elle demande plus d'hypothèses sur f : Nous allons demander que f soit de classe $C_2$ sur un intervalle I = [a, b] et que ***f′*** et ***f″*** gardent un signe constant sur cet intervalle. On demande de plus que f(a) et f(b) soient de signes contraires [3].

## 2. Méthode de Bissection (Dichotomie)

La condition préalable à satisfaire pour cette méthode est de trouver un intervalle $[a,b]$ tel que [1]:

1. $f(x)$ est continue sur $[a,b]$

2. $f(a)\cdot f(b) < 0$

Il faut encore fixer $\varepsilon > 0$ qui est définit comme la borne supérieure de l'erreur admissible.

La méthode consiste à appliquer successivement les 4 étapes suivantes [1]:

1. Calcul de $x = (a+b)/2$

2. Evaluation de $f(x)$

3. Si $|f(x)| < \varepsilon$ alors le travail est terminé, il faut afficher $x$ et $f(x)$

4. Sinon on procède comme suit:

- on remplace *a* par *x* si $f(x)\cdot f(a) > 0$

- on remplace *b* par *x* si $f(x)\cdot f(b) > 0$ ou $f(x)\cdot f(a) < 0$

- on retourne en (1)

L'étape (3) impose la condition $|f(x)| < \varepsilon$ pour l'arrêt des calculs. Il est parfois préférable de choisir un autre critère de fin de calcul. Celui-ci impose à la solution calculée d'être confinée dans un intervalle de longueur $\varepsilon$ contenant $\bar{x}$. Ce test s'énonce comme suit:

Si $|b-a| < \varepsilon$, le travail est terminé et $x = (a+b)/2$ est affiché. Il est bien sûr évident que $|x-\bar{x}| < \varepsilon/2$

***<u>Son avantage :</u>*** elle ne demande que peu d'hypothèse sur f (seulement la continuité) [3]. ***<u>Son inconvénient :</u>*** elle n'est pas tr`es rapide. D'autre part elle nécessite de déterminer le signe des $f(a_n)$ et $f(b_n)$ et donc de calculer une valeur approchée de ces valeurs proches de 0 suffisamment précise [3].

**Autrefois :** chaque fois que les chirurgiens opéraient un patient, ils versaient une certaine somme au médecin généraliste qui le lui avait envoyé. Cette pratique faisait que les généralistes envoyaient leurs patients non pas vers le meilleur chirurgien, mais vers celui qui leur reversait le plus. Elle portait le nom de dichotomie.

## ***Références***


1. http://informatique.coursgratuits.net/methodes-numeriques/recherche-des-racines.php
2. http://www.bibmath.net/dico/index.php?action=affiche&quoi=./n/newton_meth.html
3. U.P.S., I.U.T. A, Département d'Informatique, Année 2009-2010.