وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة محمد بوضياف- المسيلـــــة-
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
قسم العلوم التجارية

محاضرات في مقياس رياضيات المؤسسة

إعداد : د. إلياس سالم

السنة الجامعية:2017/2016

فهرس المحتويات

الفصل الأول: البرمجة الخطية

1. مفهوم البرمجة الخطية:

تعرف البرمجة الخطية بأنها تقنية رياضية تستعمل لحل مجموعة من المشاكل، فهي تبحث في الحل أو الحلول لمشكلة اقتصادية (إنتاجية، تخزينية، تسويقية...)، و ذلك لإيجاد الطريقة المثلى لتخصيص موارد المؤسسة المحدودة المستعملة لاستخدامات مختلفة من أجل تحقيق هدف معين.

كما تعرف المنظمة العربية للعلوم الإدارية البرمجة الخطية بأنها طريقة رياضية لتخصيص الموارد النادية أو المحدودة من أجل تحقيق هدف معين، بحيث يكون من المستطاع التعبير عن الهدف و القيود التي تحد من القدرة على تحقيقه في صورة معادلات أو متباينات خطية.

2. استخدامات البرمجة الخطية:

- المساعدة في اتخاذ القرارات المختلفة، المتعلقة بالوظائف الرئيسية للمؤسسة.
- التخطيط و الرقابة على الإنتاج.
- المساعدة على تحديد المزيج الإنتاجي الأمثل.
- تساعد في المفاضلة (الاختيار) بين طرق الإنتاج المتاحة.
- المساهمة في تحديد أفضل الطرق لتوزيع الإنتاج،
- توزيع الطاقة الإنتاجية المتاحة (قوى عاملة، مواد أولية، مكائن، مستلزمات الإنتاج المختلفة...) على العمليات الصناعية بما يحقق الاستخدام الأمثل لهذه الموارد (من خلال تحديد التوليفة المثلى للمنتجات).
- تحديد برامج إنتاج بما يضمن تقليل التكاليف/تعظيم الأرباح مع الأخذ في الاعتبار الطلب المتوقع.

3. عناصر البرمجة:

- دالة الهدف: إن الهدف الذي نسعى إلى الوصول إليه من وراء حل المشكلة يتمثل في الوصول إلى الأمثلية (L'optimalité) و التي تأخذ أحد الوجهين:
  - تعظيم maximisation: (الأرباح، العوائد،...).

- تدنية (تقليل) minimisation: (تكاليف، خسائر...).

و يمكن أن نعبر عن هذا الهدف بمعادلة رياضية تسمى دالة الهدف.

- القيود: تعكس القيود في معظم الحالات محدودية الموارد، و تعبر عن مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذ القرار التحكم فيها.
- المتغيرات: و التي تعبر عن متغيرات القرار، و هي المجاهيل التي تعبر عن الشيء المطلوب تحديده في المشكلة قيد البحث.

4. الشكل العام للنموذج الرياضي:

يعد النموذج الرياضي ترجمة رياضية للمشكلة الاقتصادية المراد حلها، و المكونة من دالة الهدف، القيود و المتغيرات، و يشترط في النموذج الرياضي أن يكون خطيا، و الذي يمكن صياغته كما يلي:

$$maxZ_p = \sum_{i=1}^{n} C_i X_i$$

St :

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} X_i \leq b_i$$

$$X_i \geq 0, i = 1,2, \dots, n$$

كما يمكن صياغته على الشكل:

$$maxZp = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n$$

St :

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq b_2$$
$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq b_m$$
$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

حيث: a_{ij}, b_i, c_i ثوابت تحددها معطيات المسألة.

إذا كان b_i يعبر عن الكمية المتوفرة من المورد i فإن a_{ij} هي الاستعمالات من المورد b_i للحصول على وحدة واحدة من المتغير X_i.

c_i: يمثل مساهمة الوحدة الواحدة من X_i في تحقيق هدف البرنامج.

ملاحظة:

يمكن أن يكون هدف البرنامج الخطي على شكل (Min)، كما يمكن أن تأخذ القيود شكل ($\leq, \geq, =$)، و يتوقف ذلك على معطيات المسألة.

حل النموذج الخطي بالطريقة البيانية:

يتصف أسلوب الحل البياني بسهولته و وضوحه إلا أنه يعتبر أسلوبا مفيدا و صالحا للمشاكل التي تحتوي على متغيرين فقط، مثال ذلك: إنتاج سلعتين، و يتم التوصل إلى الحل باعتماد الطريقة البيانية من خلال تطبيق الخطوات التالية:

- تحديد النموذج الرياضي (دالة الهدف و القيود).
- تمثيل القيود بيانيا، على معلم متعامد و متجانس.
- تحديد منطقة الحلول الممكنة.
- المفاضلة بين الحلول البديلة لاختيار البديل الأمثل.

مثال تطبيقي:

ورشة للخياطة تقوم بإنتاج منتوجين سراويل و معاطف، يمر كلا المنتوجين على ماكنتين: ماكنة الخياطة و ماكنة المكواة، لإنتاج وحدة واحدة من السراويل فإنه يلزم استخدام ساعتين من الزمن على ماكنة الخياطة (M1) و ساعدة عمل واحدة على ماكنة المكواة (M2)، بينما تحتاج الوحدة الواحدة من المعاطف إلى ساعة عمل واحدة على كل من الماكنتين، و لأسباب تقنية فإن الماكنة الأولى لا تعمل أكثر من 10 ساعات في اليوم، بينما الماكنة الثانية لا تعمل أكثر من 6 ساعات يوميا.

ولأسباب متعلقة بالطلب السوقي، لا يمكن إنتاج أكثر من 4.5 وحدات من المنتوج الأول (سراويل) يوميا، وكذلك لا يمكن إنتاج أكثر من 4 وحدات يوميا من المنتوج الثاني (معاطف).

الوحدة الواحدة من السراويل تساهم بربح قدره 1.5 و ن، بينما تساهم الوحدة الواحدة من المنتوج الثاني (معطف) بوحدة نقدية واحدة.

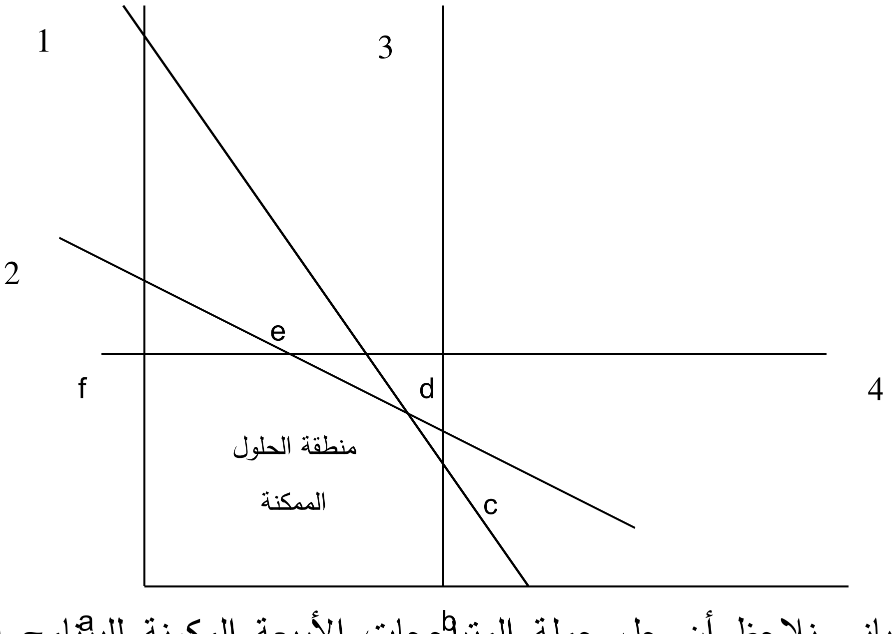
الحل:

صياغة النموذج الرياضي:

$$MaxZ_p = 1.5X_1 + X_2$$

St :

$$2X_1 + 1X_2 \leq 10$$
$$1X_1 + 1X_2 \leq 6$$
$$X_1 \leq 4.5$$
$$X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



من خلال التمثيل البياني نلاحظ أن حل جملة المتراجحات الأربعة المكونة للبرنامج الرياضي للمشكلة الاقتصادية يتمثل في المنطقة abcdef، والتي يطلق عليها: منطقة الحلول الممكنة، و التي تعني أن كل نقطة في هذه المنطقة هي حل ممكن، و أن الحل الأمثل لأي نموذج رياضي ما هو إلا نقطة طرفية من النقاط abcdef، وعليه لإيجاد نقطة الحل الأمثل يكفي حساب إحداثيات نقاط التقاطع (abcdef)، و تعويضها في دالة الهدف، حيث يتحقق الحل الأمثل عند أكبر قيمة لدالة الهدف (هذا في حالة إذا كان هدف البرنامج تعظيم max).

النقطة	X_1	X_2	Z_p
A	0	0	0
B	4.5	0	6.75
C	4.5	1	7.75
D	4	2	8
E	2	4	7
F	0	4	4

نلاحظ من خلال الجدول أعلاه أن أكبر قيمة لدالة الهدف تتحقق عند النقطة d بمعنى أن النقطة d هي نقطة الحل الأمثل $d(4.2)$، و عليه نقول: تنتج هذه الورشة 4 سراويل و معطفين و تحقق ربحا قدره 8 وحدات نقدية.

الهدف تدنية Min:

مثال تطبيقي:

في إحدى المستشفيات الخاصة، طلب من المسؤول عن المطبخ أن تكون وجبة الإفطار الصباحية تستجيب للمتطلبات الغذائية اليومية من البروتين، الفيتامين و الحديد، و تكون بأقل تكلفة ممكنة؛ و بعد الاتصال بمتخصصين في التغذية تم التوصل إلى المعطيات التالية:

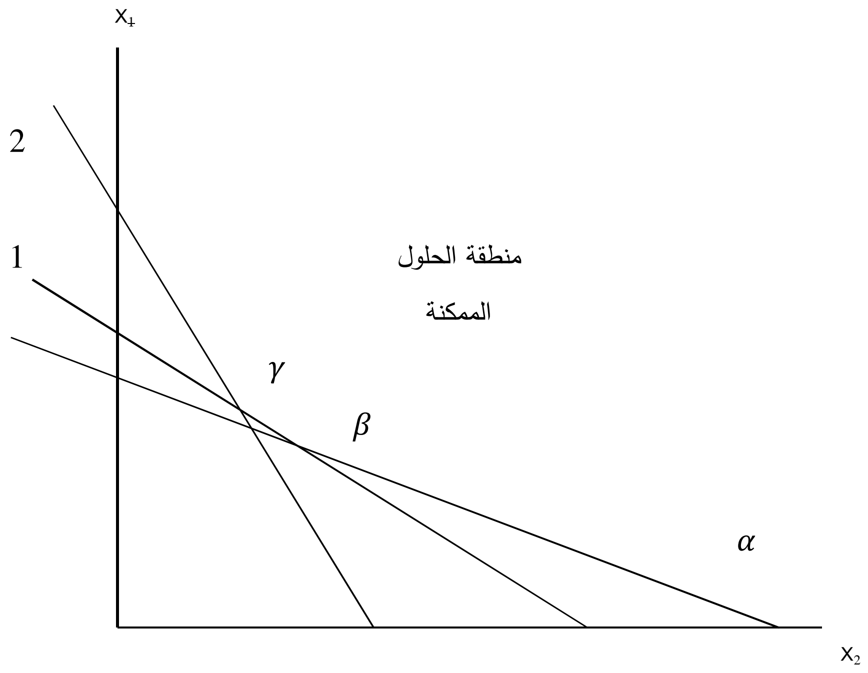
المواد الغذائية	البروتين (وحدة /100 غ)	الفيتامين (وحدة / 100 غ)	الحديد (وحدة/ 100غ)	تكلفة (100غ/ و ن)
المادة X1	2	2	1.33	3
المادة X2	2	1	2	4
الحد الأدنى	10	7	8	/

صياغة النموذج الرياضي:

$$MinZ_p = 3X_1 + 4X_2$$

St :

$$2X_1 + 2X_2 \geq 10$$
$$2X_1 + 1X_2 \geq 7$$
$$1.33X_1 + 2X_2 \geq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$



و الجدول التالي يوضح إحداثيات نقاط التقاطع و قيمة الهدف عند كل نقطة:

التكلفة	X2	X1	النقطة
18	0	6	α
16	1	4	β
18	3	2	γ
28	7	0	δ

نلاحظ أن أصغر تكلفة تتحقق عند النقطة $\beta(4,1)$، و عندها فإن قيمة الهدف تكون:

$$MinZ_p = 3(4) + 4(1) = 16$$

ملاحظة: لو كان البرنامج Max لكانت منطقة الحلول الممكنة غير محدودة (غير منتهية)، مما يعني وجود خطأ في صياغة البرنامج الخطي أو خطأ في الحل لأنه من غير الممكن تعظيم الربح إلى ما لا نهاية.

طريقة السبملكس Simplex:

طورت طريقة السمبلكس عام 1947 من طرف العالم Dantzig لحل مسألة البرمجة الخطية التي يتجاوز عدد المتغيرات فيها متغيران، و ذلك باتباع الخطوات التالية:

- إيجاد الحل الابتدائي.
- اختبار أمثلية الحل.
- تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل.

مثال تطبيقي:

أوجد الحل الأمثل للنموذج الخطي التالي: باستخدام طريقة السمبلكس

$$MaxZ_p = 4X_1 + 3X_2 + 5X_3$$

St :

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 20$$
$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 45$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الخطوة الأولى: إيجاد الحل الابتدائي

تتطلب الخطوة الأولى وضع البرنامج على الصيغة المعيارية و ذلك كما يلي:

$$MaxZ_p = 4X_1 + 3X_2 + 5X_3 + 0S_1 + 0S_2$$

St :

$$X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 20$$
$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 + S_2 = 45$$
$$X_1, X_2, X_3, S_1, S_2 \geq 0$$

تم في الصيغة المعيارية إضافة مجموعة من المتغيرات إلى البرنامج الخطي معبر عنها بـ (S_i) لكل من القيدين الأول و الثاني بمعاملات (1) لكل منهما، و بمعامل (0) في دالة الهدف.

يعبر كل من S_1 و S_2 عن مقدار الفرق بين الطرفين الأيمن و الأيسر للمتراجحتين الأولى و الثانية على التوالي، و التي من تجعل المتراجحة معادلة، و معناها الاقتصادي (S_1 و S_2) عبارة عن طاقة عاطلة أو غير مستغلة (Slack) و أن عائدها يساوي الصفر (قيمته في دالة الهدف).

عمود الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	عمود الموارد T_0
S_1	1	1	1	1	0	20
S_2	2	2	3	0	1	45
Z	4−	3−	5−	0	0	0

الخطوة الثانية: اختبار أمثلية الحل

يمكن اعتبار الحل أمثل إذا كان جميع عناصر السطرZ أكبر أو يساوي الصفر و ذلك في حالة الهدف max، و العكس في حالة البرنامج min أي جميع عناصر السطر z أصغر أو تساوي الصفر.

الخطوة الثالثة: تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل

تحديد المتغير الداخل: أصغر قيمة متبوعة بإشارة (−) في السطر z (أي أكبر قيمة بالقيمة المطلقة) (يحدد ذلك عمود الدوران).

تحديد المتغير الخارج: بقسمة عناصر عمود الموارد على المقابلة لها في عمود الدوران أصغر حاصل قسمة موجب يحدد المتغير الخارج (سطر الدوران).

تقاطع سطر الدوران و عمود الدوران يحدد عنصر الدوران.

يتم حساب الجدول بالعلاقة:

$$\text{العنصر الجديد} = \text{العنصر القديم} - \frac{(\text{العنصر المقابل له في سطر الدوران})\ (\text{العنصر المقابل له في عمود الدوران})}{\text{عنصر الدوران}}$$

عمود الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	عمود الموارد T_1
S_1	1/3	1/3	0	1	−1/3	5
S_2	2/3	2/3	1	0	1/3	15
Z	−2/3	1/3	0	0	5/3	75

عمود الأساسي	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	عمود الموارد T_2
S_1	1	1	0	3	−1	15
S_2	0	0	1	−2	1	5
Z	0	1	0	2	7/3	85

من خلال الجدول T2 نلاحظ أن جميع عناصر السطر Zp أكبر أو تساوي 0 و هذا يعني أن شرط الأمثلية محقق، و الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 15$$
$$X_2 = 5$$
$$Z_p = 85$$

تقنية Big M : **(طريقة الجزاء)**

مثال تطبيقي:

ليكن البرنامج الخطي:

$$MinZ_p = X_1 + 3X_2$$

St :

$$X_1 + X_2 \geq 4$$
$$2X_1 + X_2 \leq 6$$
$$X_2 = 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

حل النماذج الرياضية باستخدام تقنية M يأخذ نفس الخطوات في حل أي نموذج رياضي خطي.

التحويل إلى الصيغة المعيارية:

$$MinZ_p = X_1 + 3X_2 + Mt_1 + Mt_2$$

St :

$$X_1 + X_2 - X_3 + t_1 = 4$$
$$2X_1 + X_2 + S_2 = 6$$
$$X_2 + t_3 = 3$$

X_3: يمثل مقدار الفرق بين الطرفين الأيمن و الأيسر للقيد الأول (مقدار الفائض).

S_2: الطاقة العاطلة أو غير المستغلة.

t_1, t_3: متغير وهمي: لا معنى اقتصادي له، بالضرورة ينعدم أثناء الوصول إلى الحل الأمثل، إضافته تساعدنا على الحل فقط.

معامل t_1 و t_3 في حالة الهدف هو $(M+)$ في حالة Min و $(M-)$ في حالة Max،حيث M هو عدد كبير جدا ثابت.

و بما أننا نفترض أن t بالضرورة ينعدم في الحل الأمثل، فعلينا ابتداء استبعاده من دالة الهدف في شكلها المعياري، من خلال التعويض عن المتغيرات الوهمية بما تساويه في القيود فيكون لدينا:

$$t_1 = 4 - X_1 - X_2 + X_3$$
$$t_3 = 3 - X_2$$

بالتعويض في دالة الهدف نجد:

$$MinZ_p = X_1 + 3X_2 + M(4 - X_1 - X_2 + X_3) + M(3 - X_2)$$
$$= X_1(1 - M) + X_2(3 - 2\text{M}) + MX_3 + 7M$$

الأساس	X_1	X_2	X_3	t_1	S_2	t_2	T_0
t_1	1	1	−1	1	0	0	4
S_2	2	1	0	0	1	0	6
T_3	0	1	0	0	0	1	3
Z	−(1−M)	−(3−2M)	M	0	0	0	7M

نلاحظ فقط أن اختيار المتغير الداخل في حالة Minسيكون على أساس القيمة الأكبر موجبة.

الأساس	X_1	X_2	X_3	t_1	S_2	t_2	T_1
t_1	1	0	−1	0	1	−1	1
S_2	2	0	0	1	0	−1	3
X_3	0	1	0	0	0	1	3
Z	M−1	0	−M	0	0	3−2M	9+M

الأساس	X_1	X_2	X_3	t_1	S_2	t_2	T_2
X_1	1	0	−1	0	1	−1	1
S_2	0	0	2	1	−2	1	1
X_1	0	1	0	0	0	1	3
Z	0	0	−1	0	1−M	2−M	10

من خلال قيم السطر Z نلاحظ أن جميع القيم موجبة، بالإضافة إلى استبعاد قيم t_1 و t_3 من عمود الأساس في الجدول t_2 و عليه فإن الحل الحالي حل أمثل.

ملاحظة:

طريقة السمبلكس المستعملة في المثال السابق طبقت على مسألة على شكل (Max)، أما في حالة (Min)، فإن التعامل معها يختلف فقط مع شرط الأمثلية حين أن المتغير الداخل (عمود الدوران) سيختار من بين المتغيرات التي لها أكبر قيمة موجبة لعناصر السطر Z_p.

بينما اختيار المتغير الداخل و سطر الدوران و كذا شرط العملية و كافة الحسابات يتم التعامل معها بنفس الكيفية مع حالة Max.

حالات خاصة:

حالة الانحراف:

تحدث حالة الانحراف في حالة وجود أكثر من متغير يريد الخروج في نفس الوقت.

مثال:

$$MaxZ_p = 3X_1 + 9X_2$$

St :

$$X_1 + 4X_2 \leq 8$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الشكل المعياري:

$$MaxZ_p = 3X_1 + 9X_2$$

St :

$$X_1 + 4X_2 + S_1 = 8$$

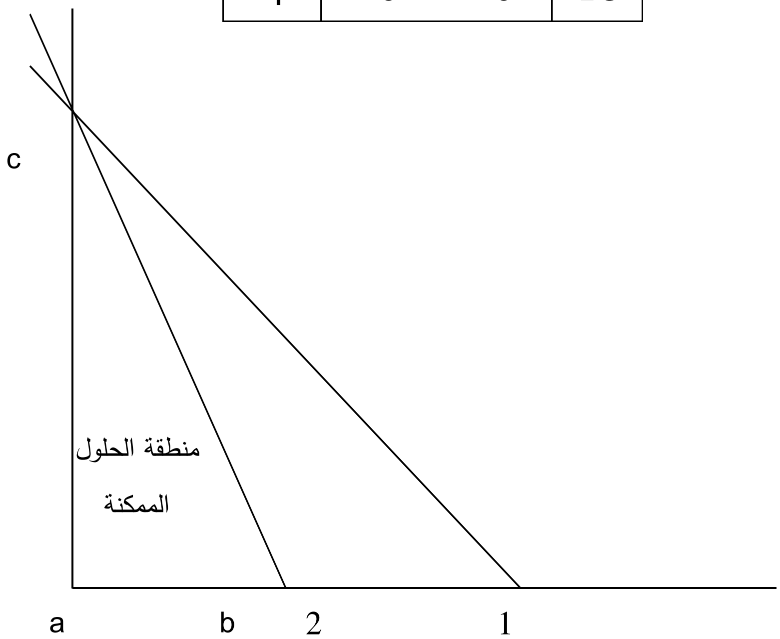
$$X_1 + 2X_2 + S_2 = 4$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	T_0
S_1	1	4	8
S_2	1	2	4
Zp	−3	−9	0

	X_1	X_2	T_1
X_2	¼	1	2
S_2	½	0	0
Zp	−3/4	0	18

	X_1	X_2	T_2
X_2	0	1	2
X_2	1	0	0
Zp	0	0	18

بيانيا:



من الرسم البياني يتضح أن القيد الأول قيد فائض، و عليه فإن البرنامج ليس في حاجة إليه و تسمى هذه الحالة حالة انحراف.

الانحراف المؤقت:

$$MaxZ_p = 3X_1 + 2X_2$$

St :

$$4X_1 + 3X_2 \leq 12$$
$$4X_1 + X_2 \leq 8$$
$$4X_1 - X_2 \leq 8$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الشكل المعياري:

$$MaxZ_p = 3X_1 + 2X_2$$

St :

$$4X_1 + 3X_2 + S_1 = 12$$
$$4X_1 + X_2 + S_2 = 4$$
$$4X_1 - X_2 + S_3 = 4$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

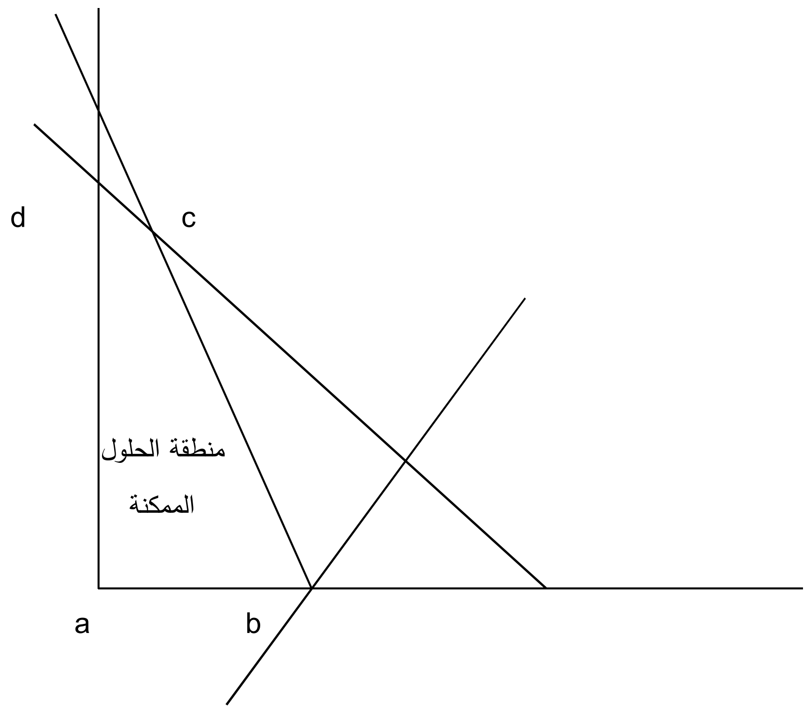
	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_0
S_1	4	3	1	0	0	12
S_2	4	1	0	1	0	8
S_3	4	−1	0	0	1	8
Zp	−3	−2	0	0	0	0

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_1
S_1	0	2	1	1−	0	4
X_2	1	¼	0	1	0	2
S_3	0	−2	0	1−	1	0
Zp	0	−5/4	0	3/4	0	6

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2

X_1	0	1	½	−½	0	2
X_2	1	0	−1/8	9/8	0	3/2
S_3	0	0	1	2−	1	3
Zp	0	0	5/8	1/8	0	17/2

بيانيا:



نلاحظ حدوث انحراف عند النقطة b، ثم حدث حل عند النقطة c.

الحلول المثلى البديلة:

$$MaxZ_p = 2X_1 + 4X_2$$

St :

$$X_1 + 2X_2 \leq 5$$
$$X_1 + X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

	X_1	X_2	T_0
S_1	1	2	5
S_2	1	1	4
Zp	−2	−4	0

	X_1	X_2	T_1
X_1	½	1	5/2
X_2	½	0	3/2
Zp	0	0	10

	X_1	X_2	
X_1	0	1	1
X_2	1	0	3
Zp	1	0	10

تعطى الحلول المثلى البديلة للمؤسسة الفرصة لاختيار الحل الأفضل الذي يناسب حالة المؤسسة دون إحداث أي خلل في قيمة الهدف المحقق.

بيانيا:

تحدث حلول مثلى بديلة عندما يقع حل أمثل على طول قطعة مستقيمة أو على ركنين ممثلين بخط واحد في منقطة ح ع م.

الفصل الثاني: المسائل الثنائية في البرمجة الخطية

إن لفظ الثنائية في البرمجة الخطية يعني أن كل مشكلة يمكن صياغتها في صورة برنامج رياضي خطي بطريقتين، يطلب على الصياغة الأولى التي تتم في الحالة الأولى و تماشيا مع متطلبات المسألة "النموذج الأصلي Modèle primal" و يطلق على الصيغة الثانية بالنموذج الثنائي "Modèle Dual"، و عليه فمن الممكن تحويل أي مسألة أصلية إلى ثنائية بالنظر إلى علاقة التناظر التي تتم بينهما.

خطوات صياغة النموذج الثنائي:

- إذا كانت دالة الهدف في الأصلية Max فإن دالة الهدف في الثنائية Min و العكس صحيح.
- عدد متغيرات الأصلية يساوي عدد قيود الثنائية و العكس صحيح.
- معاملات متغيرات دالة الهدف في الأصلية هي قيم الطرف الأيمن للقيود في الثنائية و العكس صحيح.
- مصفوفة الثنائية هي منقول مصفوفة الأصلية و العكس صحيح.
- إذا كانت القيود في الأصلية (أصغر أو يساوي) فإنها تصبح في الثنائية (أكبر أو يساوي).

مثال تطبيقي:

مزارع له أرض زراعية مساحتها 150 هكتار و في إطار الاستفادة من مياه السد المجاور تمنحه الدولة ما مقداره 440 م^3، و هو ما يكفي لـ 480 ساعة عمل، يمكن زراعة هذه الأرض بالطماطم و الفاصوليا، على أن لا تتجاوز و في كل الظروف المساحة المخصصة للطماطم 90 هكتار، لخصت معطيات المشكلة كم يلي:

الفاصوليا	الطماطم	
2	1	ساعات عمل
200	100	الماء (م3)
2	4	الربح المتوقع للهكتار

المطلوب: إيجاد الثنائية للبرنامج الأصلي

الثنائية	الأصلية
$MinZ_p = 150Y_1 + 440Y_2 + 480Y_3 + 90Y_4$ St : $Y_1 + 4Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 100$ $Y_1 + 2Y_2 + 2Y_3 \geq 200$ $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 \geq 0$	$MaxZ_p = 100X_1 + 200X_2$ St : $X_1 + X_2 \leq 150$ $4X_1 + 2X_2 \leq 440$ $X_1 + 2X_2 \leq 480$ $X_1 \leq 90$ $X_1, X_2 \geq 0$

ملاحظة:

حتى نتجنب الأخطاء المحتملة عند صياغة المسألة الثنائية تقترح القيام بما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف في المسألة الأصلية على شكل Min(Zp) نقوم بتحويلها إلى Max(−Zp) بضرب معاملاتها في (-1).
- تحويل القيود التي هي على شكل $(\geq)$ إن وجدت في المسألة الأصلية إلى $(\leq)$ بضرب طرفيها في (-1).
- أما فيما يخص القيود التي هي في شكل معادلات فلا تحول، و بما أن القيد في الأصلية يقابله متغير في الثنائية فننتظر أن تكون المتغيرات غير مقيدة، أي أنه من الممكن أن تكون موجبة، كما أنه يمكن أن تكون سالبة.

مثال تطبيقي:

أوجد ثنائية المسألة الأصلية التالية:

$$MinZ_p = 4X_1 + 5X_2 + 3X_3$$

St :

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 2500$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \geq 750$$
$$X_1 \geq 250$$
$$X_2 = 300$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

نحول دالة الهدف إلى max بضرب دالة الهدف في (-1) و كذا القيدين الثاني و الثالث.

$$MinZ_p = -4X_1 - 5X_2 - 3X_3$$

St :

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 2500$$
$$-X_1 - X_2 - X_3 \leq -750$$
$$-X_1 \leq -250$$
$$X_2 = 300$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

الثنائية:

$$MinZ_p = 2500Y_1 - 750Y_2 - 250Y_3 + 300Y_4$$

St :

$$2Y_1 - Y_2 - Y_3 + Y_4 \geq -4$$
$$3Y_1 - Y_2 + 0Y_3 + Y_4 \geq -5$$
$$4Y_1 - Y_2 + 0Y_3 + 0Y_4 \geq -3$$

$Y_1 \geq 0, Y_2 \geq 0, Y_3 \geq 0, Y_4$ غير مقيد

علاقة الأصلية بالثنائية:

- إذا كان للأصلية حل فبالضرورة يوجد للثنائية حل.
- هدف الأصلية= هدف الثنائية.
- يمكن إيجاد قيم متغيرات الأصلية من الحل الأمثل للثنائية و العكس صحيح، و هذا بالعلاقة:

[الفرق بين الطرف الأيمن و الأيسر لقيد الثنائية المشارك مع المتغير الأساسي للأصلية]=[عناصر السطر Zp لمصفوفة المتغيرات الأساسية للأصلية]

المعنى الاقتصادي للثنائية:

من أجل الوقوف على المعنى الاقتصادي للمسألة الثنائية سننطلق من مسألة المزارع لنفرض أن هناك مزارع آخر (زبون) لاحظ صاحب المزرعة يمر بظروف خاصة، فقرر شراء إجمالي الموارد المتاحة (الماء، الأرض، ساعات العمل...) (الأرض لا يمكن استغلالها إلا لإنتاج الطماطم و/أو الفاصوليا).

بلا شك أن المزارع الأصلي يستقبل العرض إذا كان السعر المقترح من طرف هذا الزبون يمكنه من الحصول على نفس الربح الذي كان يتحصل عليه عند استغلاله لأرضه بنفسه.

$$Y_1 + 4Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 100$$

Y_1: سعر تأجير الأرض (هكتار واحد).

Y_2: سعر 1 م^3 من الماء.

Y_3: سعر ساعة عمل.

Y_4: سعر الإذن لزراعة هكتار الطماطم.

و بلا شك فإن مسألة الزبون تتمثل في تخفيض تكاليف شراء الموارد إلى أدنى حد ممكن أي:

$$MinZ_p = 150Y_1 + 440Y_2 + 480Y_3 + 90Y_4$$

و ذلك تحت قيد أن الأسعار سترضي المزارع الأصلي.

بالنسبة للمزارع الأصلي فإن هكتار واحد من الأرض و 4 م^3 من الماء و ساعة عمل و هكتار إذن من أجل إنتاج هكتار طماطم، يكافئ دخلا قدره 100 و ن، و هذا يعني أن المزارع لن يكون على استعداد لتأجير (بيع) موارده المتاحة إلا إذا ضمن له:

$$1Y_1 + 4Y_2 + 1Y_3 + 1Y_4$$

دخلا أكبر أو يساوي 100 و ن.

بينما هكتار من الأرض و 2 م^3 من الماء و 4 ساعات عمل تمكنه من الحصول على دخل قدره 200 ون.

و هذا يعني أن المزارع الأصلي لن يكون على استعداد لتأجير (بيع)، موارده المتاحة إلا إذا ضمن له: $1Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3$ دخلا أكبر أو يساوي 200 ون.

وعليه جاءت المسألة الثنائية:

$$MinZ_p = 150Y_1 + 440Y_2 + 480Y_3 + 90Y_4$$

St :

$$Y_1 + 4Y_2 + Y_3 + Y_4 \geq 100$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 4Y_3 \geq 200$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$$

الحل باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية:

مثال تطبيقي: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$MinZ_p = 2X_1 + X_2$$

St :

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$
$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الخطوة الأولى تتطلب تحويل القيود إلى ($\leq$) لتسهيل عملية الحل بضرب القيدين الأول و الثاني في (-1) فنجد:

$$-3X_1 - X_2 \leq -3$$
$$-4X_1 - 3X_2 \leq -6$$
$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

التحويل إلى الشكل المعياري:

$$MinZ_p = 2X_1 + X_2$$

St :

$$-3X_1 - X_2 + S_1 = -3$$
$$-4X_1 - 3X_2 + S_2 = -6$$
$$X_1 + 2X_2 + S_3 = 3$$
$$X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

عمود الأساس	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_0
S_1	−3	−1	1	0	0	−3
S_2	−4	−3	0	1	0	−6
S_3	1	2	0	0	1	3
Zp	−2	−1	0	0	0	0

شروط الحل:

شرط العملية: حتى نستطيع استخدام طريقة السمبلكس للثنائية يجب أن يكون شرط العملية غير محقق، أي وجود قيم سالبة في عمود الموارد.

شرط الأمثلية: و يتحقق عندما يكون جميع عناصر السطر Zp أكبر أو تساوي 0 في حالة Max، و أصغر أو يساوي 0 في حالة Min.

بعد التأكد من عدم تحقق شرط العملية و تحقق شرط الأمثلية ننتقل إلى:

- تحديد المتغير الخارج: أكبر قيمة مسبوقة بإشارة (−) في عمود الموارد (سطر الدوران).
- المتغير الداخل: بقسمة عناصر السطر Zp على المقابل لها في سطر الدوران، أصغر حاصل قسمة يحدد المتغير الداخل:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	
S_1	−5/3	0	1	−1/3	0	−1
X_2	4/3	1	0	−1/3	0	2
S_3	5/3	0	0	2/3	1	−1
Z_p	−2/3	0	0	−1/3	0	2

هنا نجد متغيران يريدان الخروج في آن واحد، لا نختار S_3 لأنه لا يحتوي على قيم سالبة، لأنه يشترط في عنصر الدوران أن يكون سالبا.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	T_2
X_1	1	0	−3/5	1/5	0	3/5
X_2	0	1	4/5	−3/5	0	6/5
S_3	0	0	−1	1	1	0
Z_p	0	0	−2/5	−1/5	0	12/5

من خلال الجدول T_2 نجد أن شرط العملية محقق و شرط الأمثلية محقق، وبالتالي الحل الأمثل هو:

$$X_1=3/5$$

$$X_2=6/5$$

$$Z_p=12/5$$

ملاحظة:

يمكن الانتقال من الحل بطريقة السمبلكس للثنائية إلى طريقة السمبلكس العادية في نفس المسألة.

الفصل الثالث: تحليل الحساسية (تحليل ما بعد الأمثلية)

يقصد بتحليل الحساسية معرفة مدى تأثر الحل الأمثل بالتغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها.

إن التغيرات التي قد تطرأ على المعطيات التي تم إعداد البرنامج الخطي على أساسها يمكن أن تكون:

- على معاملات متغيرات دالة الهدف (C_i).
- على قيم الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة).
- على استخدامات الموارد (a_{ij})

إن لهذه التغيرات تأثيرات على شرط العملية و على شرط الأمثلية، و ذلك كما يلي:

تغيرات لها تأثير على العملية: و تكون:

- تغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة).
- إضافة قيد جديد.

تغيرات لها تأثير على الأمثلية:

- تغيرات في معاملات متغيرات دالة الهدف.
- إضافة نشاط جديد.

مثال تطبيقي:

افترض البرنامج الخطي التالي:

$$MaxZ_p = 3X_1 + 2X_2$$

St :

$$\begin{gathered} X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ 2X_1 + X_2 \leq 8 \\ -X_1 + X_2 \leq 1 \\ X_2 \leq 2 \\ X_1, X_2 \geq 0 \end{gathered}$$

الحل الأمثل للبرنامج معطى كالتالي:

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_1	0	1	2/3	−1/3	0	0	4/3
X_2	1	0	−1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	−1	1	1	0	3
S_4	0	0	−2/3	1/3	0	1	2/3
Zp	0	0	1/3	4/3	0	0	38/3

المطلوب: افترض التغيرات التالية:

1. تغيرات في الطرف الأيمن للقيود:

أ. افترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الأول من 6 إلى 7.

ب.افترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الأول و القيد الثاني من 6 إلى 7 و من 8 إلى 4 على التوالي .

2. إضافة قيد جديد:

أ. افترض إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 3$

ب.افترض إضافة القيد التالي: $X_1 + X_2 \leq 4$

3. تغيرات في معاملات دالة الهدف:

أ. افترض أن دالة الهدف تغيرت إلى: $MaxZ_p = 4X_1 + X_2$

ب.افترض أن دالة الهدف تغيرت إلى: $MaxZ_p = 4X_1 + 3/2X_2$

4. إضافة نشاط جديدة (X_3):

$$MaxZ_p = 3X_1 + 2X_2 + 3/2X_3$$

St :

$$X_1 + 2X_2 + 3/4X_3 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 + 3/4X_3 \leq 8$$
$$-X_1 + X_2 - X_3 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

ما تأثير هذه التغيرات على الحل الأمثل في كل حالة؟

1. تغيرات في الطرف الأيمن للقيود:

أ. افترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الأول من 6 إلى 7:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن قيم عمود الموارد بقيت موجبة، أي أن شرط العملية لم يتأثر، غير أن قيم الحل الأمثل تغيرت إلى:

$$X_1 = 3$$
$$X_2 = 2$$
$$Z_p = 13$$

ب. افترض حدوث تغير في الطرف الأيمن للقيد الأول و القيد الثاني على التوالي: من 6 إلى 7 و من 8 إلى 4:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{bmatrix}$$

نلاحظ من خلال قيم عمود الموارد بعد التغيرات التي طرأت على الطرف الأيمن للقيدين الأول و الثاني ظهور قيم سالبة، أي تأثر الحل الأمثل الحالي.

و عليه باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_1	0	1	2/3	−1/3	0	0	10/3
X_2	1	0	−1/3	2/3	0	0	1/3
S_3	0	0	−1	1	1	0	−2
S_4	0	0	−2/3	1/3	0	1	−4/3
Zp	0	0	1/3	4/3	0	0	23/3

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_1	0	1	0	1/3	2/3	0	2
X_2	1	0	0	1/3	−1/3	0	1
S_1	0	0	1	−1	−1	0	2
S_4	0	0	0	−1/3	2/3	1	8/3
Zp	0	0	0	5/3	1/3	0	7

الحل الأمثل الجديد هو:

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 2$$
$$Z_p = 7$$

2. إضافة قيد جديد:

أ. افترض إضافة القيد التالي: $X_2 \leq 3$

نلاحظ من خلال جدول الحل الأمثل أن قيمة $X_2 = 4/3$ و هي أقل من 3، يعني أن القيد الذي تمت إضافته محقق، أي أنه محتوى في الحل الحالي و عليه فهو لا يؤثر في الحل الأمثل.

ب. افترض إضافة القيد التالي: $X_1 + X_2 = 4$

من جدول الحل الأمثل نلاحظ أن: $X_1 + X_2 = 14/3$

و أن القيد الحالي يشترط أن يكون: $X_1 + X_2 \leq 4$

و هذا يعني أن القيد المضاف غير محتوى في الحل الحالي، و عليه فهو يؤثر في الحل الأمثل.

يتم تحويل القيد المضاف إلى الشكل المعياري:

$$X_1 + X_2 + S_5 = 4$$

ثم نبحث عن قيمته بدلالة المتغيرات القرارية X_1 و X_2 في الحل الأمثل الحالي.

نقوم بتعويض قيمتي X_1 و X_2 بما يساويه في الحل الأمثل الحالي، في الشكل المعياري للقيد المضاف بحيث يكون:

$$X_1 + 0X_2 - 1/3\, S_1 + 2/3\, S_2 = 10/3$$

$$\rightarrow X_1 = \frac{10}{3} + 1/3\, S_1 - 2/3\, S_2$$

$$0X_1 + X_2 - 2/3\, S_1 + 1/3\, S_2 = 4/3$$

$$\rightarrow X_2 = \frac{4}{3} + 2/3\, S_1 + 1/3\, S_2$$

نعوض بعبارتي X_1 و X_2 في القيد المضاف:

$$\frac{10}{3} + 1/3\, S_1 - 2/3\, S_2 + \frac{4}{3} + 2/3\, S_1 + 1/3\, S_2 + S_5 = 4$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
X_1	0	1	2/3	−1/3	0	0	0	4/3
X_2	1	0	−1/3	2/3	0	0	0	10/3
S_3	0	0	−1	1	1	0	0	3
S_4	0	0	−2/3	1/3	0	1	0	2/3
S_5	0	0	−1/3	−1/3	0	0	1	−2/3
Zp	0	0	1/3	4/3	0	0	0	38/3

باستخدام طريقة السبملكس للثنائية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
X_1	0	1	0	0	0	0	−1	2
X_2	1	0	−1	0	0	0	2	2
S_3	0	0	−2	0	1	0	3	1
S_4	0	0	−1	0	0	1	1	0
S_5	0	0	1	1	0	0	−3	2
Zp	0	0	−1	0	0	0	4	10

نلاحظ اختفاء القيم السالبة من عمود الموارد و ظهورها في السطر Zp، أي أن الحل الحالي غير أمثل، و عليه باستخدام طريقة السمبلكس العادية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	
X_1	0	1	0	−1	0	0	2	0
X_2	1	0	0	1	0	0	−1	4
S_3	0	0	0	2	1	0	−3	5
S_4	0	0	0	1	0	1	−2	2
S_1	0	0	1	1	0	0	−3	2
Zp	0	0	0	1	0	0	1	12

الحل الأمثل:

$$X_1 = 4$$
$$X_2 = 0$$
$$Z_p = 12$$

3. تغيرات في معاملات دالة الهدف:

أ. افترض أن دالة الهدف تغيرت إلى: $MaxZ_p = 4X_1 + X_2$

التغير هنا شمل معاملي X_1 و X_2 معا.

تتيح لنا العلاقة بين الأصلية و الثنائية إمكانية إيجاد قيم متغيرات الثنائية من الحل الأمثل للأصلية و العكس صحيح.

و عليه نقوم بحساب قيم متغيرات الثنائية من الحل الأمثل للأصلية، لكن باستخدام معاملات متغيرات دالة الهدف الجديدة.

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (1,4,0,0)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= (-2/3, 7/3, 0, 0)$$
$$Y_1 = -2/3$$
$$Y_2 = 7/3$$
$$Y_3 = 0$$
$$Y_4 = 0$$

الآن يتم حساب معاملات السطر Z_p بعد إدخال التغيرات الجديدة من خلال: الفرق بين الطرف الأيمن و الأيسر لقيود الثنائية المشاركة مع متغيرات الأصلية.

$$X_1: Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - 4 = 0$$
$$X_2: 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 1 = 0$$
$$S_1: Y_1 - 0 = -2/3$$
$$S_2: Y_2 - 0 = 7/3$$
$$S_3: Y_3 - 0 = 0$$
$$S_4: Y_4 - 0 = 0$$

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_1	0	1	2/3	−1/3	0	0	4/3
X_2	1	0	−1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	−1	1	1	0	3
S_4	0	0	−2/3	1/3	0	1	2/3
Zp	0	0	−2/3	7/3	0	0	44/3

نلاحظ من خلال قيم السطر Z_p الجديدة ظهور قيم سالبة، مما يعني أن الحل الحالي غير أمثل، و عليه باستخدام طريقة السمبلكس العادية نواصل الحل لإيجاد الحل الأمثل.

	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	S_4	
S_1	0	3/2	1	−1/2	0	0	2
X_2	1	½	0	½	0	0	4
S_3	0	3/2	0	½	1	0	5
S_4	0	1	0	0	0	1	2
Zp	0	1	0	2	0	0	16

و هو الحل الأمثل:

$$X_1 = 4$$
$$X_2 = 0$$
$$Z_p = 16$$

ب.افترض أن دالة الهدف تغيرت إلى:

$$MaxZ_p = 4X_1 + 3/2$$

نقوم بحساب قيم متغيرات الثنائية باستخدام معاملات متغيرات دالة الهدف الجديدة.

$$(Y_1, Y_2, Y_3, Y_4) = (3/2,4,0,0)\begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{1}{3}, 13/6,0,0\right)$$

ثم نحسب قيم متغيرات الأصلية في السطر Z_p.

$$X_1: Y_1 + 2Y_2 - Y_3 - 4 = 0$$
$$X_2: 2Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 - 3/2 = 0$$
$$S_1: Y_1 - 0 = -1/3$$
$$S_2: Y_2 - 0 = 13/6$$
$$S_3: Y_3 - 0 = 0$$
$$S_4: Y_4 - 0 = 0$$

إذا ما أنه ظهرت لدينا قيم سالبة في متغيرات الأصلية ، فإن الحل الحالي غير أمثل، و عليه نواصل الحل باستخدام طريقة السمبلكس العادية لإيجاد الحل الأمثل، و ذلك بنفس الطريقة في المطلب السابق.

4. إضافة نشاط جديدة (X_3):

$$MaxZ_p = 3X_1 + 2X_2 + 3/2X_3$$

St :

$$X_1 + 2X_2 + 3/4X_3 \leq 6$$
$$2X_1 + X_2 + 3/4X_3 \leq 8$$
$$-X_1 + X_2 - X_3 \leq 1$$
$$X_2 \leq 2$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

في البداية يتم إيجاد قيد الثنائية المشارك مع X_3 ، حيث حسب المتغير الجديد فإن قيد الثنائية يصبح :

$$3/4Y_1 + 3/4Y_2 - Y_3 \geq 3/2$$

ثم إيجاد قيمة X_3 في السطر Z_p في جدول الحل الأمثل، و يتطلب ذلك إيجاد قيم متغيرات الثنائية ابتداء:

$$Y_1 - 0 = \frac{1}{3} \rightarrow Y_1 = 1/3$$
$$Y_2 - 0 = 4/3 \rightarrow Y_2 = 4/3$$
$$Y_3 - 0 = 0 \rightarrow Y_3 = 0$$
$$Y_4 - 0 = 0 \rightarrow Y_4 = 0$$

بالتعويض في قيد الثنائية لمشارك X_3 مع نجد:

$$\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\right) - 0 - \frac{2}{3} = -\frac{1}{4}$$

ثم حساب قيم العمود في جدول الحل الأمثل و ذلك كما يلي:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3/4 \\ 3/4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ -1 \\ -1/4 \end{bmatrix}$$

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_2	0	1	¼	2/3	−1/3	0	0	4/3
X_1	1	0	¼	−1/3	2/3	0	0	10/3
S_3	0	0	−1	−1	1	1	0	3
S_4	0	0	−1/4	−2/3	1/3	0	1	2/3
Zp	0	0	−1/4	1/3	4/3	0	0	38/3

نلاحظ ظهور قيمة سالبة في السطر Zp، وعليه نواصل الحل باستخدام طريقة السمبلكس للثنائية لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
X_3	0	4	1	8/3	4/3	0	0	16/3
X_1	1	−1	0	−1	1	0	0	2
S_3	0	4	0	5/3	−1/3	1	0	25/3
S_4	0	1	0	0	0	0	1	2
Zp	0	1	0	1	1	0	0	18

الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 2$$
$$X_2 = 0$$
$$X_3 = 16/3$$
$$Z_p = 18$$

الفصل الرابع: مسائل النقل

تعد مسائل النقل من المواضيع البالغة الأهمية في المؤسسة، لارتباطها ارتباطا وثيقا بتنافسيتها، حيث تعمل المؤسسة على توزيع أو نقل منتجاتها من مصادرها (مصانع، وحدات إنتاج، مخازن...) إلى مراكز التوزيع (أسواق، مخازن، مصانع...) و بأقل التكاليف الممكنة.

ويمكن استعمال نماذج البرمجة الخطية لإيجاد الحل لمشاكل النقل، على اعتبار أنها إحدى الحالات الخاصة للبرمجة الخطية، غير أن العدد الكبير للقيود و المتغيرات التي تتكون منها مسائل النقل، يجعل من الصعوبة بمكان استعمال البرمجة الخطية لذلك، فنلجأ إلى استعمال نماذج النقل.

و لإيجاد الحل الأمثل لمسألة النقل يجب ابتداء إيجاد حل ابتدائي بإحدى طرق الحل الابتدائي المتمثلة في:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية.
- طريقة التكلفة الأقل.

وهناك طرق أخرى أيضا لإيجاد الحل الابتدائي

ثم تحسين الحل لإيجاد الحل الأمثل بإحدى الطرق:

- طريقة القفز على الصخور.
- طريقة التوزيع المعدلة MODI.

مثال تطبيقي:

مؤسسة صناعية لديها أربعة وحدات إنتاجية موزعة جغرافيا على كل من: وهران، الجزائر، قسنطينة، المسيلة، تريد نقل بضاعتها إلى مستودعاتها الخمسة المتواجدة بولايات: تلمسان، عنابة، ورقلة، تيزي وزو و غرداية، و بأقل تكلفة ممكنة حيث أن الكميات المنتجة هي كما يلي:

المسيلة	قسنطينة	الجزائر	وهران	المصادر
100	250	150	200	الكميات

سعة المخازن التي تمتلكها هذه المؤسسة موضحة في الجدول التالي:

غرداية	تيزي وزو	ورقلة	عنابة	تلمسان	المخازن
110	120	140	160	170	الكميات

تكلفة نقل الوحدة الواحدة المنتجة إلى المخزن مبينة بالجدول التالي:

1.5	3	2	2.5	2
3	2	1.5	1.5	3
1.5	1	2	3	1.5
2	2	2	2	2.5

المطلوب: أوجد تكلفة النقل المثلى لهذه المؤسسة

طرق الحل الابتدائي:

طريقة الزاوية الشمالية:

- يتم الانطلاق من الزاوية الشمالية الغربية بأكبر عدد من الوحدات مراعيا في ذلك الكمية المتاحة و الكمية المطلوبة.
- إذا كانت الكمية المتاحة =0 بعد التشغيل يتم الانتقال عموديا إلى الأسفل.

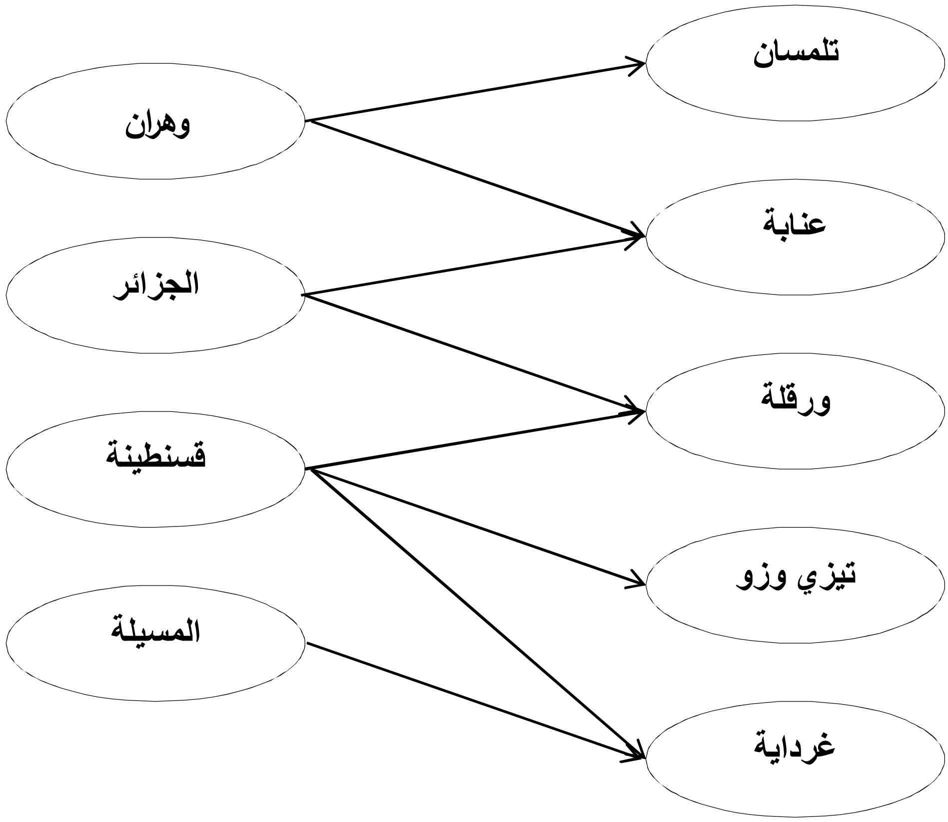
المجموع	غرداية	تيزي وزو	ورقلة	عنابة	تلمسان	المراكز / المصادر
~~200~~	1.5	3	2	$\boxed{30}$ 2.5	$\boxed{170}$ 2	وهران
~~150~~	3	2	$\boxed{20}$ 1.5	$\boxed{130}$ 1.5	3	الجزائر
~~250~~	$\boxed{10}$ 1.5	$\boxed{120}$ 1	$\boxed{120}$ 2	3	1.5	قسنطينة
100	$\boxed{100}$ 2	2	2	2	2.5	المسيلة
700 / 700	110	~~120~~	~~140~~	~~160~~	~~170~~	المجموع

8=(n+m−1)

تكلفة النقل الإجمالية = 170(2)+30(2.5)+ 130(1.5)+ 20(1.5) + 120(2) + 120 (1) +10(1.5) + 100(2) = 1215.

ملاحظة:

يشترط في جدول النقل أن يكون متوازيا، أي أن يكون عدد الوحدات المطلوبة مساويا لعدد الوحدات المعروضة.



طريقة التكلفة الأقل:

- نختار الخلية التي بها أقل تكلفة في الجدول ككل، و تشغيلها بأكثر عدد ممكن من الوحدات مراعيا في ذلك الكميات المعروضة و المطلوبة.
- يتم تكرار الخطوة السابقة حتى نصل إلى نتيجة النقل.

المراكز / المصادر	تلمسان	عنابة	ورقلة	تيزي وزو	غرداية	المجموع
وهران	2	2.5	$\boxed{90}$ 2	3	$\boxed{110}$ 1.5	200
الجزائر	3	$\boxed{150}$ 1.5	1.5	2	3	150
قسنطينة	$\boxed{130}$ 1.5	3	$\boxed{120}$ 2	1	1.5	250
المسيلة	$\boxed{40}$ 2.5	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{50}$ 2	2	2	100
المجموع	170	160	140	120	110	700 / 700

8=(n+m−1)

تكلفة النقل الإجمالية = 90(2) + 110(1.5) + 150 (1.5) + 130 (1.5) + 120 (2) + 40 (1.5) + 10 (2) + 50 (2) = 1105

طرق الحل الأمثل:

طريقة القفز على الصخور (الأحجار المتنقلة)

1. حل النموذج بإحدى طرق الحل الابتدائي.
2. حساب صافي التغير في التكلفة للخلايا الشاغرة، وذلك باتباع خط السير التالي:

- يجب أن يكون التحرك أو ما يطلق عليه مسار الحلقة مغلقا أفقيا يمينا أو يسارا و رأسيا إلى أعلى أو إلى الأسفل، التحرك القطري مرفوض، و أي انعطاف ينتج عنه زاوية قائمة.
- خط السير يمر بخلايا مشغلة فقط ما عدا الخلية المراد تقييمها ، و في حالة الانعطاف الخلايا المشغلة وسط الطريق لا تؤخذ في الحسبان.
- حساب صافي التغير ينتج عنه الإشارات +، −، +، −، + ، −....

3. بعد حساب صافي التغير في التكلفة يمكن الوصول إلى الآتي:

- كل صافي تغير (≤ 0 أكبر أو يساوي) يعني أن الجدول الذي وصلنا إليها هو جدول حل أمثل.
- إذا ظهر صافي التغير في التكلفة لخلية أو أكثر أقل من 0 هذا يعني أن الجدول ليس جدول حل أمثل.
- إذا ظهر صافي التغير في التكلفة لخلية أو أكثر أقل من 0 هذا يعني أن الجدول ليس جدول حل أمثل.
- نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير في التكلفة متبوع بإشارة (−)، و تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات مراعيا في ذلك الكمية المتاحة و الكمية المطلوبة.
- إذا كان هناك صافي تغير في التكلفة سالب في أكثر من خلية نختار الخلية التي بها أقل تكلفة، و إذا كان هناك تساو في التكاليف نختار الخلية التي يمكن تشغيلها بأكبر عدد ممكن من الوحدات.

4. بعد عملية الترحيل (التشغيل) يتم الانتقال إلى جدول جديد مع إهمال الجدول القديم و تكرار الخطوات السابقة من جديد.

المراكز / المصادر	تلمسان	عنابة	ورقلة	تيزي وزو	غرداية	المجموع
وهران	−0.5 / 2	0.5 / 2.5	$\boxed{90}$ −2	1 / 3	$\boxed{110}$ 1.5	~~200~~
الجزائر	1 / 3	$\boxed{150}$ 1.5	0 / 1.5	0.5 / 2	2 / 3	~~150~~
قسنطينة	$\boxed{130}$ 1.5	2 / 3	1 / 2	$\boxed{120}$ 1	1 / 1.5	~~250~~
المسيلة	$\boxed{40}$ −2.5	$\boxed{10}$ 2	$\boxed{50}$ +2	0 / 2	0.5 / 2	~~100~~
المجموع	~~170~~	~~160~~	~~140~~	~~120~~	~~110~~	700 / 700

(8=n+m−1)

تكلفة النقل الإجمالية = 1105

المراكز / المصادر	تلمسان	عنابة	ورقلة	تيزي وزو	غرداية	المجموع
وهران	[40] 2	0.5 / 2.5	[50] 2	1.5 / +3	[110] 1.5	200
الجزائر	1.5 / 3	[150] 1.5	0 / 1.5	1 / 2	2 / 3	150
قسنطينة	[130] 1.5	1.5 / 3	0.5 / 2	[120] 1	0.5 / 1.5	250
المسيلة	0.5 / 2.5	[10] 2	[90] 2	0.5 / 2	0.5 / 2	100
المجموع	170	160	140	120	110	700 / 700

بما أن جميع عناصر صافي التغير في التكلفة ≤ 0 فإن الحل الحالي حل أمثل.

تكلفة النقل الإجمالية = 40(2) + 50 (2) + 140 (1.5) + 150 (10) + 130 (1.5) + 120 (1) + 10 (2) + 90 (2) = 1085.

طريقة التوزيع المعدلة MODI:

1. إيجاد الحل الابتدائي بإحدى طرق الحل الابتدائي.

2. إيجاد المتغيرات U_i و V_j عن طريقة العلاقة: $C_{ij}= U_i+V_j$

. $\mathbf{C_{ij}}$ تمثل تكلفة النقل في الخلية.

. $\mathbf{U_i,V_j}$ تمثل متغيرات الثنائية.

3. إيجاد صافي التغير في التكلفة عن طريق العلاقة $C_{ij}-(U_i+V_j)$ للخلايا غير المشغلة.

4. بعد حساب صافي التغير في التكلفة يمكن الحصول على:

- جميع صافي التغير في التكلفة (≤ 0 أكبر أو يساوي 0) هذا يعني أن الجدول الذي وصلنا إليها جدول حل أمثل.
- إذا ظهر صافي التغير بإشارة سالبة هذا يعني أن الجدول لا يمثل جدول حل أمثل.

5. نختار الخلية التي بها أكبر صافي تغير مسبوق بإشارة (−) ثم يتم تشغيلها بعد وضع الإشارات التي تم التطرق إليها في طريقة القفز على الصخور.

6. بعد عملية الترحيل يتم الرجوع إلى الخطوة (2) مع جدول جديد، و هكذا حتى يتم الوصول إلى الحل الأمثل.

المراكز / المصادر	تلمسان	عنابة	ورقلة	تيزي وزو	غرداية	المجموع	
وهران	−0.5 / 2	0.5 / 2.5	90 / −2	1 / 3	110 / 1.5	200	$U_1=0$
الجزائر	1 / 3	150 / 1.5	0 / 1.5	2.5 / 2	2 / 3	150	$U_2=-0.5$
قسنطينة	130 / 1.5	2 / 3	1 / 2	120 / 1	1 / 1.5	250	$U_3=-1$
المسيلة	40 / −2.5	10 / 2	50 / +2	2 / 2	0.5 / 2	100	$U_4=0$
المجموع	170	160	140	120	110	700 / 700	
	$V_1=2.5$	$V_2=2.5$	$V_3=2$	, $V_4=0$	$V_5=1.5$		

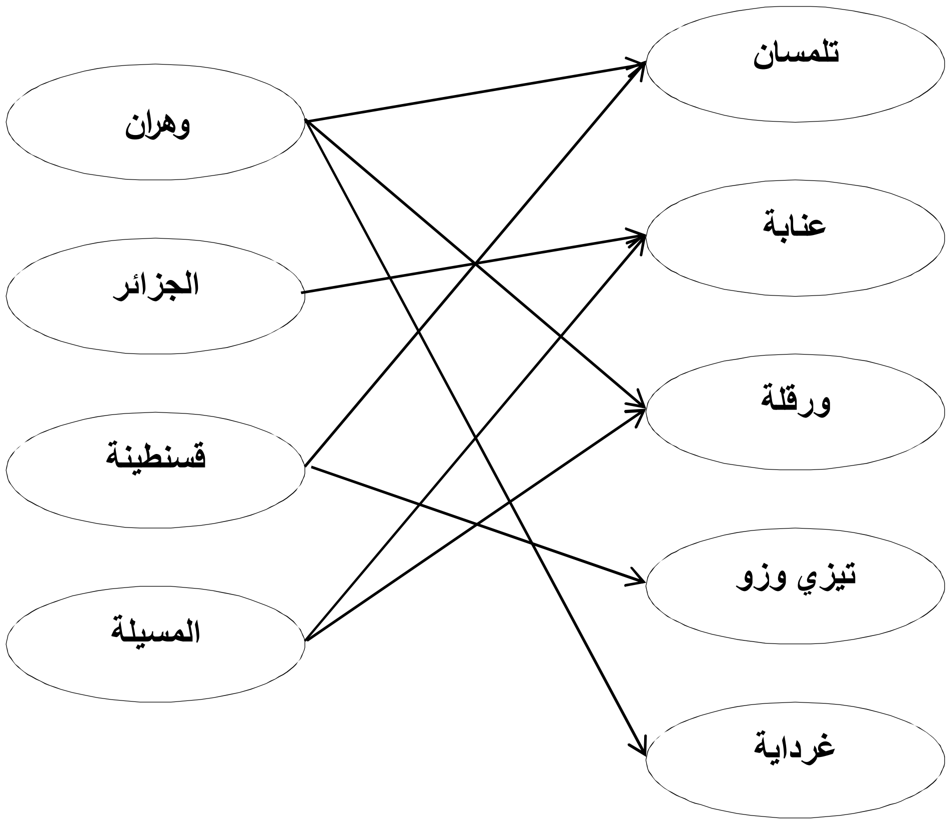
(8=n+m−1)

تكلفة النقل الإجمالية= 1085.

المراكز / المصادر	تلمسان	عنابة	ورقلة	تيزي وزو	غرداية	المجموع	
وهران	40 / 2	0.5 / 2.5	50 / 2	1.5 / 3	110 / 1.5	200	$U_1=0$
الجزائر	1.5 / 3	150 / 1.5	0 / 1.5	1 / 2	2 / 3	150	$U_2=-0.5$
قسنطينة	130 / 1.5	1.5 / 3	0.5 / 2	120 / 1	0.5 / 1.5	250	$U_3=-0.5$
المسيلة	0.5 / −2.5	90 / 2	50 / +2	0.5 / 2	0.5 / 2	100	$U_4=0$
المجموع	170	160	140	120	110	700 / 700	
	$V_1=2$	$V_2=2$	$V_3=2$	$V_4=1.5$	$V_5=1.5$		

$(8=n+m-1)$

تكلفة النقل الإجمالية = 1085.



حالات خاصة:

1. حالة عدم التوازن (عدم تساوي العرض مع الطلب): و يحدث عندما لا تتساوى عدد الكميات المطلوبة مع عدد الكميات المعروضة، حيث يفترض نموذج النقل أن يكون متوازنا، أي عدد الوحدات المطلوبة يساوي عدد الوحدات المعروضة، و عليه:

- إذا كان عدد الوحدات المطلوبة أكبر من عدد الوحدات المعروضة نضيف سطرا وهميا بتكلفة صفر ثم نواصل الحل.
- إذا كان عدد الوحدات المعروضة أكبر من عدد الوحدات المطلوبة نضيف عمودا وهميا بتكلفة صفر ثم نواصل الحل.

2. حالة الإنحلال (حالة عدم الانتظام): و يحدث ذلك عندما يكون عدد الخلايا المشغلة أقل من مجموع المراكز والمصادر، أي أن تكون العلاقة (n+m−1) أقل من عدد الخلايا المشغلة، و في هذه الحالة نقوم بتشغيل الخلية الشاغرة بكمية مقدارها (ع) أي عدد صغير جدا.
3. حالة الطرق الممنوعة: قد تصادف في بعض الحالات عدم الرغبة في التوزيع من مصدر معين إلى مركز معين لسبب ما (طريق غير آمن، طريق غير معبد، عدم توافر المواصفات في منتوج ما...)، و عليه نقوم بوضع تكلفة كبيرة جدا (M) في الخلية المعنية ثم نواصل الحل بالطرق المعروفة.
4. الحلول البديلة: إذا وجد في خلية أو أكثر صافي تغير (0)، صفر، فإنه يوجد حل بديل في هذه الحالة.

الفصل الخامس: مسائل التخصيص (التعيين) L'affectation

تعتبر مسائل التخصيص حالة خاصة من مسائل النقل، و من أبسط البرامج الخطية، إلا أنها كثيرة الاستخدام بصورة أساسية في حالة مسألة التعيين، و سنقوم بتقديم هذه المسألة من وجهة نظر التعيين (التوظيف).

فرضيات النموذج:

- عدد الأسطر يساوي عدد الأعمدة (مصفوفة مربعة).
- عدد المناصب المعروضة يساوي عدد الوظائف المطلوبة و يساوي 1.
- عملية التخصيص يتم بدلالة (التكلفة، الربح،...) و يتم تحديدها سلفا.

حل نماذج التخصيص:

سنقوم بحل مسائل التخصيص باستخدام الطريقة المجرية (الهنغارية)، باتباع الخطوات التالية:

- وضع تكاليف النقل في شكل مصفوفة.
- نقوم بطرح أصغر عنصر في كل صف من جميع عناصر الصف (التخفيض الأول).
- نقوم بطرح أصغر عنصر في كل عمود من جميع عناصر العمود انطلاقا من التخفيض الأول (التخفيض الثاني).
- نؤطر أحد الأصفار في كل سطر يحتوي على أقل عدد من الأصفار، ثم نشطب جميع الأصفار الواقعة في السطر و العمود الذي يقع به ذلك الصفر، حتى لا يبقى لدينا صفر بحاجة إلى تأطير أو تشطيب.
- اختبار الحل: هل يحتوي الجدول على صفر واحد مؤطر في كل سطر و في كل عمود؟

  . إذا كان الجواب **نعم** فإن الحل الناتج هو حل أمثل و يجب أن نتوقف.

  . إذا كان الجواب **لا** ننتقل إلى الخطوة الموالية.
- في هذه الخطوة تستعمل خوارزمية Ford-Fulkerson.

  . نؤشر بعلامة (×) كل الأسطر التي لا تحتوي على أي صفر مؤطر.

. نؤشر بعلامة (×) كل عمود يحتوي على صفر أو أكثر مشطب في سطر مؤشر.

. نؤشر بعلامة (×) كل سطر له صفر مؤطر في عمود مؤشر.

. نشطب كل سطر غير مؤشر.

. نشطب كل عمود مؤشر.

– نحدد أصغر عنصر من العناصر غير المشطوبة، نطرحه من جميع العناصر غير المشطوبة و إضافته لعناصر التقاطع.

مثال تطبيقي:

شركة للطيران لديها 5 طائرات A، B، C، D، E و تريد أن تخصص لها 5 طيارين V، W، X، Y، Z حيث أن أجرة كل طيار بالنسبة لكل طائرة مبينة في الجدول التالي:

	V	W	X	Y	Z
A	7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	7
C	6	5	1	5	∞
D	11	4	∞	11	15
E	∞	4	5	2	10

التخفيض الأول:

4	0	2	4	7
0	∞	∞	2	1
5	4	0	4	∞
7	0	∞	7	11
∞	2	3	0	8

التخفيض الثاني:

		×			
×	4	$\boxed{0}$	2	4	6
	$\boxed{0}$	∞	∞	2	~~0~~
	5	4	$\boxed{0}$	4	∞
×	7	~~0~~	∞	7	10
	∞	2	3	$\boxed{0}$	7

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & & \times & & & \\
\times & 2 & \boxed{0} & 0 & 2 & 4 \\
 & \boxed{0} & \infty & \infty & 2 & \cancel{0} \\
 & 5 & 6 & \boxed{0} & 4 & \infty \\
\times & 5 & \cancel{0} & \infty & 5 & 8 \\
 & \infty & 4 & 3 & \boxed{0} & 7
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
\boxed{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & 2 \\
\cancel{0} & \infty & \infty & 2 & \boxed{0} \\
5 & 8 & \boxed{0} & 4 & \infty \\
3 & \boxed{0} & \infty & 3 & 6 \\
\infty & 6 & 3 & \boxed{0} & 7
\end{bmatrix}$$

التكلفة = 7+7+1+4+2= 21

	V	W	X	Y	Z
A	$\boxed{1}$ 7	3	5	7	10
B	6	∞	∞	8	$\boxed{1}$ 7
C	6	5	$\boxed{1}$ 1	5	∞
D	11	$\boxed{1}$ 4	0	11	15
E	∞	4	5	$\boxed{1}$ 2	10

$V \rightarrow A$
$W \rightarrow E$
$X \rightarrow C$
$Y \rightarrow B$
$Z \rightarrow D$

حالة التعظيم:

في بعض الأحيان قد نكون أمام حالة تعظيم الهدف (المردودية، الإنتاجية،...):

- نحدد أكبر قيمة في المصفوفة، ثم نطرح منها جميع عناصر المصفوفة، فنحصل على الصورة المرافقة للأصلية.
- نتعامل مع المصفوفة الجديدة كأنها حالة تدنية Min.
- عند بلوغ الحل المثل نعود للمصفوفة الأصلية لحساب قيمة الهدف.

المراجع المعتمدة:

1- منعم زمرير الموسوي: اتخاذ القرارات الإدارية، دار اليازوري، عمان، الأردن،1998.

2- حمدي طه: مقدمة في بحوث العمليات، ترجمة أحمد حسين علي حسين، دار المريخ، الرياض، 1996.

3- حامد سعد نور الشمرتي: مدخل إلى بحوث العمليات، دار مجدلاوي، عمان، الاردن، 2007.

4- سليمان محمد مرجان، بحوث العمليات، الجامعة المفتوحة، طرابلس، ليبيا،2002.

5- رابح بوقرة: بحوث العمليات، دون ذكر دار النشر، دون ذكر البلد، 2010.

6- حمودي حاج صحراوي: رياضيات المؤسسة: دار جيطلي للنشر، برج بوعريريج، الجزائر،

7- السعدي رجال: بحوث العمليات،