Chapitre I
Généralités sur les ensembles ordonnés et les treillis.

1-Ensembles ordonnés

1-1- Fonction caractéristique

Définition : soit dans un référentiel X, un sous-ensemble A. On définit la fonction caractéristique de A, notée χ_A l'application définie par :

$\chi_A : X \to \{0, 1\}$.

$$x \to \begin{cases} 1 \; si \; x \in A; \\ 0 \; si \; x \notin A. \end{cases}$$

1-2- Relation binaire

Définition 1 : la relation binaire T dans un ensemble X est une partie des paires (x, y) des éléments de X, c'est-à-dire $T \subset X^2$.

Et on écrit x T y est équivalente a : $(x, y) \in T$ tel que :

$T(x, y) = 1$ si x T y et $T(x, y) = 0$ si $x \not{T} y$.

Définition 2 : Si A et B sont deux ensembles et il y a une propriété spécifique entre x de A et y de B, cette propriété peut représenter par le couple ordonné (x, y). L'ensemble de tels pairs (x, y), $x \in A$ et $y \in B$ est dit relation T.

1-3- Relation d'ordre[10]

Une relation binaire O sur un ensemble X est un ordre sur X si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. Réflexivité : pour tout $x \in X$, $x \, O \, x$.
2. Antisymétrie : pour tous $x, y \in X$, ($x \, O \, y$ et $y \, O \, x$) impliquent $x = y$.
3. Transitivité : pour tous $x, y, z \in X$, ($x \, O \, y$ et $y \, O \, z$) impliquent $x \, O \, z$

L'ordre O est dit total s'il est tel que pour tous $x, y \in X$, $x \, O \, y$ ou

$y \, O \, x$.

1-4- Ensemble ordonné

Un ensemble ordonné est un couple $P = (X, O)$ où X est un ensemble et O un ordre sur X. Si O est un ordre total, $P = (X, O)$ est alors appelé un ensemble totalement ordonné (ou ensemble linéairement ordonné ou chaîne).

Exemple

1) Soit $X = \{a, b, c, d, e\}$ et $P = (X, O)$ l'ensemble ordonné où O est l'ordre suivant sur X :
   $O = \{(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c)$
   $(d, d), (e, e)\}$.
2) L'ensemble des entiers naturels muni de la division est un ensemble ordonné.
3) L'ensemble A = D(m) des diviseurs d'un entier m >1, muni de la division est un ensemble ordonné.

Contre exemple

L'ensemble des droites du plan muni de :

La relation « est parallèle à » ou bien la relation « est orthogonale à » n'est pas un ensemble ordonné car : la relation « est parallèle à » n'est pas anti symétrique, et la relation « est orthogonale à » n'est pas transitive.

1-5- Diagramme de Hasse [10]

Le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné P = (X, $\leq$) est une représentation de son graphe de couverture dans laquelle les éléments x

de P sont représentés par des points P(x) du plan, de telle sorte que les deux règles suivantes soient respectées :

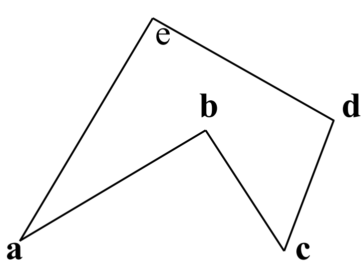
a) Si $x < y$, (l'horizontale passant par) P(x) est au-dessous de (l'horizontale passant par) P(y).
b) P(x) et P(y) sont joints par un segment de droite si et seulement si $x \prec y$.

Exemple

Le diagramme de Hasse de l'ensemble X = {a, b, c, d, e} muni de la relation d'ordre

O = {*(a, b), (a, e), (c, b), (c, d), (c, e), (d, e), (a, a), (b, b), (c, c), (d, d)*

(e, e)} est :



Remarque 1

Il existe une infinité des diagrammes possibles du même ensemble ordonné.

1-6- Eléments particulières d'un ensemble [8]

Soit (X, $\leq$) un ensemble ordonné et A $\subseteq$ X.

1) On dit que $x \in$ X est un minorant de A si $x \leq a$, $\forall\, a \in A$ (l'ensemble des minorants de A, noté par A^L).

2) On dit que $x \in$ X est un majorant de A si $a \leq x$, $\forall\, a \in A$ (l'ensemble des majorants de A noté par A^U).
3) On dit que $m \in A$ est le minimum de A si $m \leq a$, $\forall\, a \in A$ (m = min de A).
4) On dit que $M \in A$ est le maximum de A si $a \leq M$, $\forall\, a \in A$ (noté max(A)).
5) Sup (A) = min (A^U).
6) Inf (A) = max (A^L).
7) L'élément maximal : On dit que $x \in A$ est un élément maximal dans A si $\exists\, a \in A$ tel que $x \leq a \Longrightarrow x = a$.
8) L'élément minimal : On dit que $x \in A$ est un élément minimal dans A si $\exists\, a \in A$ tel que $a \leq x \Longrightarrow a = x$.

Remarque : Le min(A) et le max(A) s'ils existent ils sont uniques.

2-Treillis

2-1- Définition d'un treillis

Définition 1 : Un ensemble ordonné X est un inf-demi-treillis si toute paire $\{x, y\}$ de ses éléments admet un infimum $x \wedge y$. C'est un sup-demi-treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum $x \vee y$. C'est un treillis si toute paire de ses éléments admet un supermum et un infimum donc s'il est à la fois inf-et sup-demi-treillis.

Un treillis sera souvent noté $T = (X, \leq, \wedge, \vee)$.

Définition 2 : Un treillis est un ensemble ordonné $(T, \leq)$ tel que pour tout partie a deux éléments $\{x, y\}$ il existe une borne supérieure notée par $x \vee y$ et une borne inférieure notée par $x \wedge y$.

Exemples

1) Toute chaîne C est un treillis tel que : $\forall\, x, y \in$ C :

   $x \vee y = \max(x, y)$

   $x \wedge y = \min(x, y)$.

2) D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30}, muni de la division est un treillis tel que :

   $x \vee y$ = ppmc (x, y).

   $x \wedge y$ = pgcd (x, y).

3) L'ensemble $(2^X, \subseteq)$ muni de l'union et l'intersection est un treillis ses lois sont définis par : $\forall X, Y \in 2^x : X \vee Y = X \cup Y$.

   $X \wedge Y = X \cap Y$

Propriétés

Dans un treillis quelconque on a :

- $X \leq y \Leftrightarrow x = x \wedge y$.

  $\Leftrightarrow y = x \vee y$.

- Idempotence : $x \wedge x = x \vee x = x$.
- Commutativité : $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$.
- Associativité : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$.

  $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.
- Les lois d'absorptions : $x \wedge (y \vee x) = x$.

  $X \vee (y \wedge x) = x$.

Théorème 1[1]

Soit T un ensemble muni de deux lois internes $\wedge$, $\vee$ et qui sont : idempotentes, commutatives, associatives, et qui vérifient les lois d'absorptions, alors il existe une relation unique d'ordre $(\leq)$ sur T tel que :

T soit un treillis avec : $x \wedge y = \inf(x, y)$.

$X \vee y = \sup(x, y)$.

2-2- Treillis fermés

Définition : Un treillis T est dit fermé s'il possède un plus petit élément noté « 0 » et un plus grand élément noté « 1 ».

Exemples

1. L'ensemble des parties d'un ensemble E, P(E) muni de la relation d'inclusion est un treillis fermé, le plus petit élément est $\emptyset$, et le plus grand élément est E.
2. L'ensemble des diviseurs de 6 : D(6) = {1, 2, 3, 6} est un treillis fermé tel que : le minimum est 1, et le maximum est 6.
3. $(\mathbb{N}^*, |)$ n'est pas un treillis fermé car il ne possède pas un plus grand élément.

2-3-Filtre dans un treillis

Définition 1 :

Soit T un treillis. On appelle filtre dans le treillis T, toute partie non vide F de T vérifiant les deux conditions suivantes :

- ✓ $x \in F, y \geq x \Longrightarrow y \in F$.
- ✓ $x \in F$, et $y \in F \Longrightarrow x \wedge y \in F$.

Exemple

Dans l'ensemble D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} on a :

$F_1 = \{2, 6, 10, 30\}$, $F_2 = \{30\}$, $F_3 = \{6, 30\}$ Sont des filtres.

Remarque 2

1) Un filtre F est dit propre si $F \neq$ T.
2) F propre si et seulement si $0 \notin F$.
3) Soit « 1 » le plus grand élément de T, alors {1} est le plus petit filtre de T.
4) Toute intersection des filtres est un filtre.

Définition 2

Soit G une partie non vide de T. Le filtre engendré par G noté F_G est l'intersection de touts les filtres qui contient G c'est-à-dire c'est le plus petit filtre qui contient G.

On définit F_G comme suite :

F_G est l'ensemble des $x \in T$, tel qu'il existe un nombre fini a_1, a_2, a_3,…, a_n d'éléments de G avec : $x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n$ et on écrit :

$F_G = \{x \in T / x \geq a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \ldots \wedge a_n, a_i \in G\}$.

Si G = ∅, alors $F_G = \{1\}$.

Exemple

On a le treillis D(30) = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30} on prend G = {10} ≠ ∅

Dans ce cas le filtre engendré par G est :

$F_G = \{10, 30\}$.

Définition 3

On appelle filtre principale c'est le filtre engendré par un seul élément, il est défini par : $F_a = \{x \in T / x \geq a\}$.

Exemple

On a le treillis D(6) = {1, 2, 3, 6}.

On prend $a = 2$ donc le filtre principal engendré par *2* est :

$F_2 = \{2, 6\}$.

Définition 4

Par définition, les ultrafiltres sont les filtres propres maximaux pour l'ordre (les filtres propres qui ne sont contenus dans aucun autre filtre propre).

Exemple

Dans D(30) les ultrafiltres sont :

$F_2 = \{x \in D(30) / x \geq 2\} = \{2, 6, 10, 30\}$.

$F_3 = \{x \in D(30) / x \geq 3\} = \{3, 6, 15, 30\}$.

$F_5 = \{x \in D(30) / x \geq 5\} = \{5, 10, 15, 30\}$.

Proposition 1

Soit F un filtre propre les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- F est un ultrafiltre.
- $\forall\, x \in \mathrm{T}, x \notin F \Longrightarrow$ il existe $y \in F$ tel que : $x \wedge y = 0$.

2-4- Idéal dans un treillis

Définition 1 :

On appelle idéal toute partie non vide I de E tel que :

- $x \in \mathrm{I}, y \leq x \Longrightarrow y \in \mathrm{I}$.
- $x, y \in \mathrm{I} \Longrightarrow x \vee y \in \mathrm{I}$.

On dit que I propre si et seulement si $1 \notin \mathrm{I}$.

$\{0\}$ est un idéal c'est le plus petit idéal.

Définition 2 :

Soit G une partie non vide de E. L'idéal engendré par G noté par I_{G} est définie par :

$$\mathrm{I}_{\mathrm{G}} = \{\, x \in \mathrm{E} \,/\, x \leq a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{\mathrm{n}},\, a_{\mathrm{i}} \in \mathrm{G}\}.$$

Définition 3 :

G est une partie $\vee$-compatible si $\mathrm{I}_{\mathrm{G}} \neq \mathrm{E}$.

G est une partie $\vee$-incompatible $\Leftrightarrow \exists\, a_1, a_2, \ldots, a_{\mathrm{n}}$ de G tel que : $a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_{\mathrm{n}} = 1$.

L'ensemble des idéaux propres est inductif, il admet donc des éléments maximaux (idéal maximal).

2-5- Treillis distributif

Définition :

Soit T un treillis, on dit que T est un treillis distributif si tout triplet (x, y, z) de T vérifie l'un de deux conditions :

1/ $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

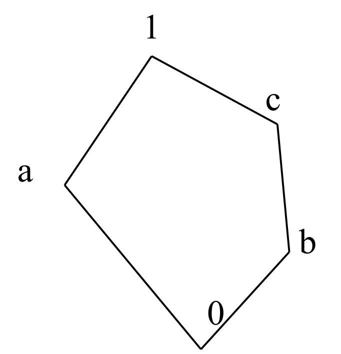
2/ $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

Exemples

- Toute chaîne est un treillis distributif :

Min $(x, \max(y, z)) = \max(\min(x, y), \min(x, z))$.

- $(P(\mathrm{E}), \subseteq)$ est un treillis distributif.
- L'ensemble défini par :



N'est pas un treillis distributif car :

On a : $c \wedge (a \vee b) = c \wedge 1 = c$.

$(c \wedge a) \vee (c \wedge b) = 0 \vee b = b$.

Théorème 2[8]

T est un treillis distributif si et seulement si il vérifié l'une des trois conditions suivantes :

a) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.
b) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.
c) $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x) = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x)$
d) $[x \wedge y = x \wedge z$ et $x \vee y = x \vee z] \Longrightarrow (y=z)$.

2-6- Treillis complémenté

Définition : Soit T un treillis

On dit que le treillis T est complémenté si tout $x \in \mathrm{T}$ admet au moins un complément, c'est-à-dire un élément $x' \in \mathrm{T}$ vérifiant $x \wedge x' = 0$ et

$x \vee x' = 1$.

Exemple

1) $(P(E), \subseteq)$ est complémenté

   $A \cap \complement A = \emptyset, \;\; A \cup \complement A = E.$

2) $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$ est complémenté :

   $2' = 15$, $15' = 2$, $3' = 10$, $10' = 3$, $5' = 6$, $6' = 5$, $1' = 30$, $30' = 1$.

Remarque 2

La distributivité d'un treillis conserve l'unicité de complément s'il existe.

2-7- Treillis de Boole

Définition [5] :

Par définition le treillis de Boole est un treillis distributif fermé et complémenté.

Exemples

- La chaine $u = \{0, 1\}$ est un treillis de Boole.
- $(P(E), \subseteq)$ est un treillis de Boole.
- $D(6) = \{1, 2, 3, 6\}$ est un treillis de Boole.
- L'ensemble des entiers naturels non nuls muni de la division n'est pas un treillis de Boole (n'a pas un plus grand élément).

Théorème 3[1] : Soit B une algèbre de Boole et F un filtre propre, il y a équivalence entre :

- ✓ F est un ultrafiltre.
- ✓ $\forall x \in B$, $x \in F$ ou $\rceil x \in F$.

Théorème 4[1]

Soit F une partie non vide d'une algèbre de Boole.

Pour que F soit un ultrafiltre il faut et suffit qu'elle vérifie :

- ✓ $x \in F \Leftrightarrow \rceil x \notin F$
- ✓ $x, y \in F \Leftrightarrow x \wedge y \in F$.

Théorème 5

Soit F une partie non vide de B (algèbre de Boole) pour que F soit un ultrafiltre il faut et il suffit que sa fonction caractéristique soit χ soit un morphisme booléen de B dans u = {0, 1}.

$$\chi : \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{u} \begin{cases} \chi(x) = 1 \; si \; \mathrm{x} \in \mathrm{F}; \\ \chi(x) = 0 \; si \; \mathrm{x} \notin F. \end{cases}$$

Théorème 6 [1] : (Théorème de représentation de Stone)

Toute algèbre booléenne B est isomorphisme à une sous algèbre booléenne de la forme $P(X)$ tell que :

X est l'ensemble des ultrafiltres de B.