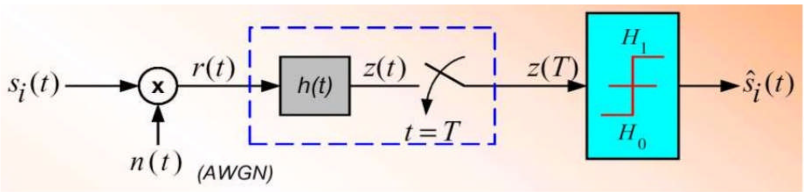
3-Récepteurs AWGN : Démodulateur et Détecteur

Détection d'un signal binaire dans un bruit AWGN (Additif White Gaussian Noise) :

Pour un canal binaire, le signal transmit dans un intervalle de temps [0, T] est :

$$s_i(t) = \begin{cases} s_1(t) & pour\ 1 \\ s_2(t) & pour\ 0 \end{cases}$$



Le récepteur réalise les fonctions suivantes :

-le filtre de réception h(t) : maximise le rapport SNR (signal sur bruit).

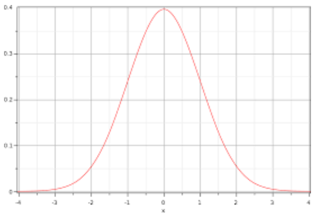
-l'échantillonneur : la sortie de du filtre de réception sera échantillonnée à t=T, cela rendre le signal reçu en une seule variable z(T) appelée test statistique.

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T)$$

$a_i(t)$ est le signal désiré et $n_0(T)$ est le bruit AWGN.

Le bruit AWGN $n_0(T)$ est supposé de moyenne 0, sa PDF est :

$$p(n_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{n_0^{\ 2}}{2\sigma_0^{\ 2}}\right)$$



de fonction de densité de probabilité $f(x)$:

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

*La récupération du signal est faite par les étapes :

-filtrage : réduction de l'effet du bruit : maximiser le rapport SNR (filtre de réception)

-l'échantillonnage : la sortie du filtre sera échantillonnée à $t=nT$ cela rendre le signal reçu en une seule variable $z(T)$.

-Le détecteur : compare $z(T)$ avec un seuil γ :

$$z(T) \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

où H_1 et H_0 sont les deux hypothèses possibles.

à la sortie de l'échantillonneur l'échantillon $z(T)$ est :

$$z(T) = a_i(T) + n_0(T)$$

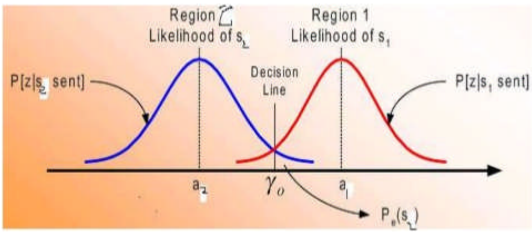
$a_i(t)$ est le signal désiré et $n_0(T)$ est le bruit AWGN :

$$p(n_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{n_0^{\ 2}}{2\sigma_0^{\ 2}} \right)$$

donc la sortie est aussi un processus aléatoire gaussien avec les densités conditionnelles:

$$p(z/a_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_0^{\ 2}} \right) \text{ sous } H_1$$

$$p(z/a_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_0^{\ 2}} \right) \text{ sous } H_2$$

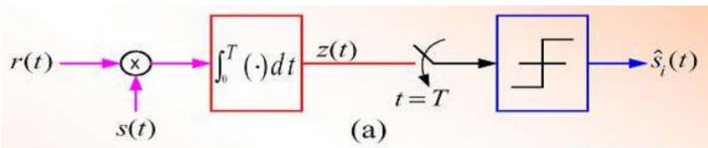


Le rapport SNR à la sortie de l'échantillonneur est :

$$\left(\frac{S}{N} \right)_T = \frac{a_i^{\ 2}}{\sigma_0^{\ 2}}$$

Pour maximiser le SNR on utilise à la réception un filtre adapté (matched filter) ou un corrélateur.

a- Le corrélateur :



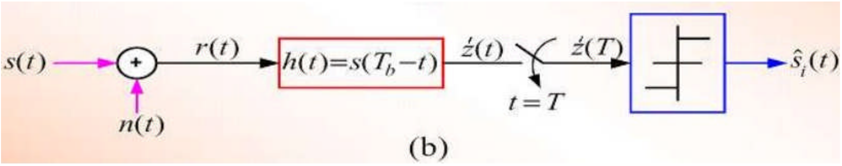
Le signal à la sortie du corrélateur est :

$$z(t) = \int_0^T r(t)s(t)dt$$

à l'instant $t=T$:

$$z(T)=\int_0^T r(t)s(t)dt$$

b- Le filtre adapté :



-Le signal à la $a_i(t)$ à la sortie du filtre peut être écrit par :

$$a_i(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi ft}df \qquad \text{(TFI)}$$

-La puissance d'un bruit à la sortie du filtre est donnée par :

$$\sigma_0{}^2=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df$$ où $N_0/2$ est la DSP du bruit.

Donc le SNR est :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T=\frac{\left|\int_{-\infty}^{+\infty} H(f)S(f)e^{j2\pi fT}df\right|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}|H(f)|^2 df}$$

Utilisant l'inégalité de schwarz : $\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x)f_2(x)dx\right|^2 \le \int_{-\infty}^{+\infty}|f_1(x)|^2 dx\int_{-\infty}^{+\infty}|f_2(x)|^2 dx$, l'égalité est satisfaite si $f_1(x)=kf_2{}^*(x)$ où k est un constant et * est le conjugué.

Si on pose : $f_1(x)=H(f)$ et $f_2(x)=S(f)e^{j2\pi fT}$ on obtient :

$$\left(\frac{S}{N}\right)_T \le \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty}|S(f)|^2 df$$

Donc : $\max\left(\frac{S}{N}\right)_T \le \frac{2E}{N_0}$

$$E=\int_{-\infty}^{+\infty}|S(f)|^2 df$$

Le SNR dépend de l'énergie E du signal d'entrée *s(t)*

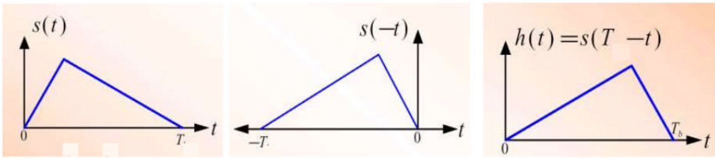
La fonction de transfert pour le filtre *H(f)* est obtenu si l'égalité est satisfaite $f_1(x) = kf_2^*(x)$:

$$H(f) = kS^*(f)e^{-j2\pi fT}$$

$$h(t) = TF^{-1}[kS^*(f)e^{-j2\pi fT}]$$

$$h(t) = \begin{cases} ks(T-t) & 0 \le t \le T \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

La réponse impulsionnelle du filtre adapté qui maximise le SNR est l'image du signal d'entrée (*s(-t)*) décalée par une durée d'un symbole *T* (*s(T-t)*).



Donc le signal à la sortie du filtre adapté est :

$$z(t) = r(t) * h(t) \ , \quad z(t) = \int_0^t r(\tau)h(t-\tau)d\tau \ , \quad z(t) = \int_0^t r(\tau)s(T-(t-\tau))d\tau \ , \quad z(t) = \int_0^t r(\tau)s(T-t+\tau)d\tau$$

à l'instant *t=T* :

$$z(T) = \int_0^T r(\tau)s(T-T+\tau)d\tau \ , \quad z(T) = \int_0^T r(\tau)s(\tau)d\tau$$

Donc le signal à la sortie du filtre adapté est : $z(T) = \int_0^T r(t)s(t)dt$

On observe que le corrélateur et le filtre adapté donnent le même résultat.

La détection :

$$z(T) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \gamma$$

La détection est basée sur le détecteur ML (Maximum Likelihood ou maximum de vraisemblance) qui utilise la théorie de la décision statistique pour former la règle de la décision.

Les probabilités utilisées sont :

$p(s_1)$, $p(s_2)$: les probabilités *a priori* (elles sont connues avant la transmission).

$p(z)$: la probabilité de l'échantillon reçu.

$p(z/s_1)$, $p(z/s_2)$: les PDFs conditionnelles du signal reçu.

$p(s_1/z)$, $p(s_2/z)$: les probabilités *a postériori* (basées sur les informations précédentes, elles sont inconnues).

$p(s_1/s_2)$, $p(s_2/s_1)$: décisions erronées.

$p(s_1/s_1)$, $p(s_2/s_2)$: décisions correctes.

Le critère MAP (maximum *a posteriori*) :

Si $p(s_1/z) > p(s_2/z) \Rightarrow H_1$

Sinon $p(s_2/z) > p(s_1/z) \Rightarrow H_2$

$$\Rightarrow p(z/s_1) \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} p(z/s_2)$$

Les probabilités *a postériori* ne sont pas connues, on utilise le théorème de bay's :

$$p(s_i/z) = \frac{p(z/s_i)\,p(s_i)}{p(z)}$$

Et si les symboles sont équiprobables : $p(s_1) = p(s_2)$

$$\Rightarrow \frac{p(z/s_1)\,p(s_1)}{p(z)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{p(z/s_2)\,p(s_2)}{p(z)}$$

$$\Rightarrow \frac{p(z/s_1)}{p(z/s_2)} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

remplaçant les PDFs:

$$H_1 : p(z/s_1) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

$$H_2 : p(z/s_2) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_0^2} - \frac{(z-a_1)^2}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1 \Rightarrow \exp\left[\frac{z^2 + a_2^2 - 2za_2 - (z^2 + a_1^2 - 2za_1)}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

$$\Rightarrow \exp\left[\frac{z(a_1 - a_2)}{\sigma_0^2} - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2\sigma_0^2}\right] \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 1$$

appliquant le *ln* :

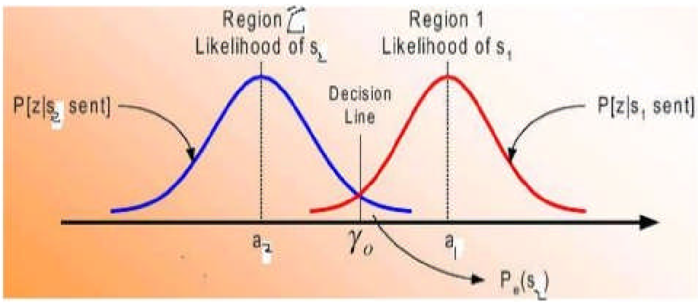
$$\Rightarrow \frac{z(a_1 - a_2)}{\sigma_0^2} - \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2\sigma_0^2} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

$$\Rightarrow \frac{z(a_1 - a_2)}{\sigma_0^2} \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2\sigma_0^2} = \frac{(a_1 + a_2)(a_1 - a_2)}{2\sigma_0^2}$$

$$\Rightarrow z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{(a_1 + a_2)}{2} = \gamma \; (seuil\; de\; détection)$$

Pour des signaux antipodaux : $s_1(t) = -s_2(t) \Rightarrow a_1 = -a_2$

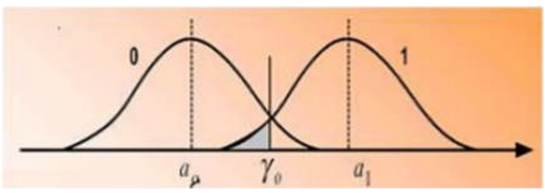
$$\Rightarrow z \underset{H_2}{\overset{H_1}{\gtrless}} 0$$

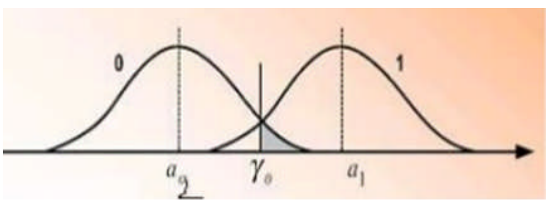


Probabilité d'erreur

Les erreurs sont produites si :

$$p(H_2 / s_1) = p(e / s_1) = \int_{-\infty}^{\gamma} p(z / s_1) dz$$





$$p(H_1/s_2) = p(e/s_2) = \int_{\gamma}^{+\infty} p(z/s_2)dz$$

Donc la probabilité d'erreur totale est :

$$\begin{aligned}
p_B &= \sum_{i=1}^{2} p(e, s_i) \\
&= p(e, s_1) + p(e, s_2) \\
&= p(e/s_1)\,p(s_1) + p(e/s_2)\,p(s_2) \\
&= p(H_1/s_2)\,p(s_2) + p(H_1/s_2)\,p(s_2)
\end{aligned}$$

Si les deux signaux sont équiprobables :

$$p_B = \frac{1}{2}p(e/s_1) + \frac{1}{2}p(e/s_2) = p(e/s_2)\ (la\,symétrie)$$

$$p_B = \int_{\gamma}^{+\infty} p(z/s_2)dz = \int_{\gamma}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(z-a_2)^2}{2\sigma_0^2}\right]dz$$

Pour résoudre cette intégrale on utilise la fonction Q(x) définie par :

$$Q(x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right]du$$

On pose : $u = \dfrac{z-a_2}{\sigma_0} \Rightarrow dz = \sigma_0 du$

$$z \to +\infty \Rightarrow u \to +\infty$$

$$z = \gamma = \frac{a_1+a_2}{2} \Rightarrow u = \frac{z-a_2}{\sigma_0} = \frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}$$

$$p_B = \int_{\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{u^2}{2}\right]\sigma_0 du$$

$$p_B = Q\left(\frac{a_1-a_2}{2\sigma_0}\right)$$

z	Q(z)	z	Q(z)	z	Q(z)
0.0	0.5	1.0	0.15866	2.0	0.02275
0.1	0.46017	1.1	0.13567	2.1	0.01785
0.2	0.42074	1.2	0.11507	2.2	0.01390
0.3	0.38029	1.3	0.09680	2.3	0.01072
0.4	0.34458	1.4	0.08076	2.4	0.00820
0.5	0.30854	1.5	0.06681	2.5	0.00620
0.6	0.27425	1.6	0.05480	2.6	0.00466
0.7	0.24196	1.7	0.04457	2.7	0.00347
0.8	0.21186	1.8	0.03593	2.8	0.00256
0.9	0.18406	1.9	0.02872	2.9	0.00187

Table for computing of Q-Functions

La fonction Q(x) peut être calculée par la relation approximative :

$$Q(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$$

La probabilité par bit $p_B = Q\left(\frac{a_1 - a_2}{2\sigma_0}\right)$ peut être exprimée par E_d l'énergie de la différence entre les deux points s_1 et s_2 : $E_d = (a_1 - a_2)^2$ et $\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2}$:

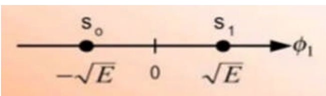
$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_d}{2N_0}}\right)$$

$$E_d = \int_0^T [s_1(t) - s_2(t)]^2 dt = \int_0^T s_1^{\,2}(t)dt + \int_0^T s_2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt$$

On a trois cas :

Signaux antipodaux :

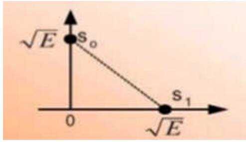
$$\Rightarrow s_1(t) = -s_2(t)$$



$$E_d = \int_0^T s_1^{\,2}(t)dt + \int_0^T s_2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = E_b + E_b + 2E_b = 4E_b$$

$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

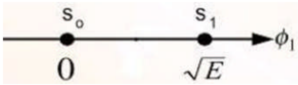
Signaux orthogonaux :



$$E_d = \int_0^T s_1^{\,2}(t)dt + \int_0^T s_2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = E_b + E_b + 0 = 2E_b$$

$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Signaux unipolaires : (OOK)



$$E_d = \int_0^T s_1^{\,2}(t)dt + \int_0^T s_2(t)dt - 2\int_0^T s_1(t)s_2(t)dt = E_b + 0 + 0 = E_b$$

$$\Rightarrow p_B = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right)$$

Remarque :

Les signaux antipodaux offrent une meilleure performance par rapport aux signaux orthogonaux.