Exercice N°1:

Calculer l'intégrale $I = \iint_D \frac{x^2}{y+1}dxdy$ Avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / -2 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Solution :

$$I = \int_{x=-2}^{1}\int_{y=0}^{1}\frac{x^2}{y+1}dxdy = \int_{x=-2}^{1}x^2dx\int_{y=0}^{1}\frac{dy}{y+1} = \left|\frac{1}{3}x^3\right|_{-2}^{1} \times |\ln|y+1||_0^1 = 3\ln 2$$

Exercice N°2:

Calculer l'intégrale $I = \iint_D \sin(xy)\,dxdy$ Avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 1 \leq x \leq 2, 0 \leq xy \leq \pi\}$

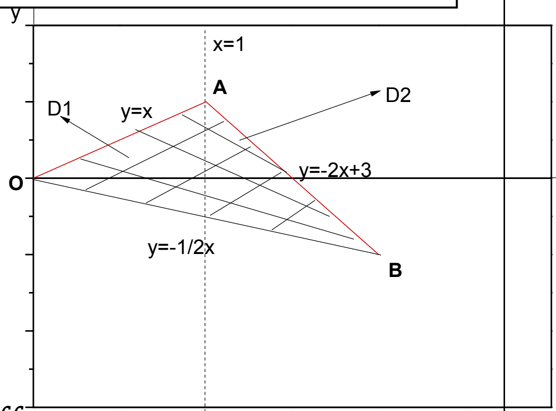
Solution : on peut écrire $D = \left\{(x,y);\ 1 \leq x \leq 2 \ et\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{x}\right\}$

$$I = \int_{x=1}^{2}\int_{y=0}^{\frac{\pi}{x}}\sin(xy)\,dxdy = \int_{x=-2}^{1}\left[\int_{y=0}^{\frac{\pi}{x}}\sin(xy)dy\right]dx = \int_{x=-2}^{1}[-\cos(xy)]_0^{\frac{\pi}{x}}\,dx = \int_{x=-2}^{1}2\,dx = 6$$

Exercice N°3:

Calculer l'intégrale $I = \iint_D (x+2y)^2dxdy$
Avec D est le triangle de sommets $(0,0); (1,1); (2,-1)$

Solution :



La surface D est délimitée par trois segments de droites :
Le segment de droite OA admet une équation : $y = x$
Le segment de droite OB admet une équation : $y = \frac{-1}{2}x$
Le segment de droite AB admet une équation : $y = -2x+3$
Par conséquent on aura :

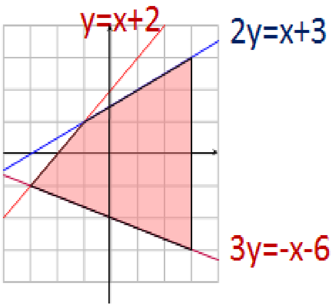
$$\boldsymbol{I} = \iint_D (x+2y)^2dxdy = \iint_{D_1}(x+2y)^2dxdy + \iint_{D_2}(x+2y)^2dxdy$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=\frac{-1}{2}x}^{x}(x+2y)^2dydx + \int_{x=1}^{2}\int_{y=\frac{-1}{2}x}^{-2x+3}(x+2y)^2dydx$$

Où $I = \int_{x=0}^{1}\left[\int_{y=\frac{-1}{2}x}^{x}(x+2y)^2dy\right]dx + \int_{x=1}^{2}\left[\int_{y=\frac{-1}{2}x}^{-2x+3}(x+2y)^2dy\right] =$

$$\int_{x=0}^{1}\left[x^2y+\frac{4}{3}y^3+2xy^2\right]_{y=\frac{-1}{2}x}^{x}dx+\int_{x=1}^{2}\left[x^2y+\frac{4}{3}y^3+2xy^2\right]_{y=\frac{-1}{2}x}^{-2x+3}dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{9}{2}x^3dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{5}{8}x^3-9x^2-36x+27\right)dx=\frac{-2577}{32}$$

Exercice N° 4 : Calculer l'aire de la région coloriée dans la figure ci-dessous:



Solution : l'aire de la région coloriée est $I=\iint_D dxdy$ où D est la région délimitée par les quatre segments de droites :

L'intersection entre les segments de droites $y=x+2$ et $y=-\frac{x}{3}-2$ est le point $(-3-,1)$

L'intersection entre les segments de droites $y=x+2$ et $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ est le point $(-1,1)$

L'intersection entre les segments de droites $x=3$ et $y=-\frac{x}{3}-2$ est le point $(3,-3)$

L'intersection entre les segments de droites $x=3$ et $y=\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$ est le point $(3,3)$

Alors on peut décomposer l'aire D en deux régions comme suite

$$I=\iint_D dxdy=\iint_{D_1} dxdy+\iint_{D_2} dxdy$$

Avec $D_1=\left\{(x,y);\ -3\le x\le -1\ et\ \frac{-x}{3}-2\le y\le x+2\right\}$ et

$D_2=\left\{(x,y);\ -1\le x\le 3\ et\ \frac{-x}{3}-2\le y\le \frac{x}{2}+\frac{3}{2}\right\}$

$$I=\iint_D dxdy=\int_{x=-3}^{-1}\int_{y=\frac{-1}{3}x-2}^{x+2}dydx+\int_{x=-1}^{3}\int_{y=\frac{-1}{3}x-2}^{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}dydx$$

$$I = \int_{x=-3}^{-1} \left[\frac{4}{3}x + 4\right] dx + \int_{x=-1}^{3} \left[\frac{5}{6}x + \frac{7}{2}\right] dx = \frac{8}{3} + \frac{52}{3} = 20$$

Exercice N°5

Calculer l'intégrale $I = \iint_D \frac{dxdy}{(1+x)(1+xy^2)}$ Avec $D = \{(x,y)/0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

Fait le changement des variables $x = u^2 et\ y = \frac{v}{u}$

Solution :

Si on fait le changement des variables $x = u^2 et\ y = \frac{v}{u}$ alors on aura le Jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2u & 0 \\ \frac{-v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{vmatrix} = 2$$

$$\Rightarrow I = \iint_\Delta \frac{2dudv}{(1+u^2)(1+v^2)}$$

Avec $\Delta = \{(u,v);\ \ 0 \leq u \leq 1\ et\ 0 \leq v \leq u\}$; par conséquent on trouve :

$$\Rightarrow I = \int_0^1 \frac{2}{(1+u^2)} \left[\int_0^u \frac{dv}{(1+v^2)}\right] du = \int_0^1 \frac{2 \operatorname{arctg} u}{(1+u^2)} du = 2\left[\frac{1}{2} \operatorname{arctg} u^2\right]_0^1 = \frac{\pi^2}{16}$$

Exercice N° 6:

Calculer l'intégrale $I = \iint_D e^{\left(\frac{x-y}{x+y}\right)} dxdy$ Avec $D = \left\{(x,y)/x > 0, y > 0, \frac{1}{2} \leq x + y \leq 1\right\}$

$fait\ le\ changement\ des\ variables\ x = \frac{1}{2}(u+v) et\ y = \frac{1}{2}(u-v)$

Solution :

Si on fait le changement des variables $x = u^2 et\ y = \frac{v}{u}$ alors on aura le Jacobien

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{-1}{2}$$

$$\Longrightarrow I = \frac{1}{2}\iint_{\Delta} e^{\frac{v}{u}}\,dudv$$

Avec $\Delta = \left\{(u,v);\ \frac{1}{2} \le u \le 1\ et - u \le v \le u\right\}$; par conséquent on trouve :

$$\Longrightarrow I = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{2}\left[\int_{-u}^{u} e^{\frac{v}{u}} dv\right] du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{u}{2}\left[e^{\frac{v}{u}}\right]_{v=-u}^{u} du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{e^{1}-e^{-1}}{2} u du = \frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\left[\frac{1}{2}u^{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$
$$= \frac{3(e^{1}-e^{-1})}{16}$$

Exercice N° 7: Calculer les intégrales : $\iint_{D} x^2 y dxdy$, $\iint_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy$

Avec $D = \{(x,y)/\ x+y \ge 1, x^2+y^2 \le 1\}$ et $\Delta = \{(x,y)/\ y \ge 0, x^2+y^2-x \ge 0, x^2+y^2-2x \le 0\}$

Solution :

1. L'intersection entre les segments de droites $y = 1-x\ et\ le\ cercle\ x^2+y^2 = 1$est le point $(0,1)\ et\ (1,0)$, donc on peut écrire $D = \left\{(x,y);\ \ 0 \le x \le 1\ et\ 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$

$$I = \iint_{D} x^2 y dxdy = \int_{x=0}^{1} x^2\left[\int_{y=1-x}^{\sqrt{1-x^2}} y dy\right] dx = \int_{x=0}^{1} x^2\left[\left|\frac{1}{2}y^2\right|_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}\right] dx = \int_{x=0}^{1} (-x^4+x^3)\, dx = \frac{1}{20}$$

2. $J = \iint_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy$

On fait le changement des variables, en utilisant les coordonnés polaires
$x = \rho\cos\theta\ et\ y = \rho\sin\theta$; Alors on aura le Jacobien $J = \rho$
L'intersection entre $y \ge 0, x^2+y^2-x \ge 0, x^2+y^2-2x \le 0$ donne :

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2};\ \cos\theta \le \rho \le 2\cos\theta$$

Dans ce cas on trouve :

$$J = \iint_{\Delta} \frac{x-y}{x^2+y^2} dxdy = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\int_{\rho=\cos\theta}^{2\cos\theta} (\cos\theta - \sin\theta) d\rho\right] d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2\theta - \sin\theta\cos\theta)]\, d\theta$$
$$= \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) - \sin\theta\cos\theta\right)\right] d\theta = \left|\frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta\right|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Exercice N° 8:

Calculer l'intégrale $I = \iiint_D \cos(x+y+z)\, dxdy\, dz$ Avec $D = \left[0,\frac{\pi}{2}\right]^3$

Solution :

$$I = \iiint\limits_D \cos(x+y+z)\, dxdy\, dz$$

$$= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{z=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x+y+z)\, dz\, dydx = \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y+z)]_{z=0}^{\frac{\pi}{2}} dydx$$

$$= \int_{x=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\int_{y=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{\sin\left(x+y+\frac{\pi}{2}\right)}_{=\cos(x+y)} - \sin(x+y) \right] dy \right] dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin(x+y)+\cos(x+y)]_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{dx} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\underbrace{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\mathrm{cosx}} - \sin x + \underbrace{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{-\mathrm{sinx}} - \cos \mathrm{x} \right] \mathrm{dx}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -2\sin \mathrm{x}\, \mathrm{dx} = [2\cos \mathrm{x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -2$$

Exercice N° 9 Calculer l'intégrale $I = \iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dxdy\, dz$

Avec $D = \{(x,y,z)/x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

Solution :

$$I = \iiint\limits_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dxdy\, dz = \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{1-x} \left[\int_{z=0}^{1-x-y} \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\, dz \right] dy \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{1-x} \left[\frac{-3}{(x+y+z+1)^2} \right]_{z=0}^{1-x-y} dy \right] dx = -3 \int_{x=0}^{1} \left[\int_{y=0}^{1-x} \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(x+y+1)^2} \right] dy \right] dx$$

$$= -3 \int_{x=0}^{1} \left[\left[\frac{y}{4} + \frac{2}{(x+y+1)} \right]_{y=0}^{1-x} \right] dx = -3 \int_{x=0}^{1} \left[\frac{5-x}{4} - \frac{2}{(x+1)} \right] dx = \frac{9}{8} + 2\ln 2$$

Exercice N° 10 Calculer l'intégrale $I = \iiint_D (x^2+y^2)\, dxdy\, dz$

Avec $D = \{(x,y,z)/x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Solution : on a $x^2+y^2+z^2=1$ représente équation de sphère de centre $(0,0,0,)$ et de rayon $R=1$.
On passe en coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = rsin\varphi sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases}$$

Avec $(0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi)$ *et le*Jacobien $J = r^2 sin\varphi$

$$\begin{aligned} I &= \iiint_D (x^2+y^2) dxdy\,dz \\ &= \int_{r=0}^{1}\int_{y=0}^{2\pi}\int_{z=0}^{\pi} (r^2 sin^2\varphi)\, r^2 sin\varphi\, d\varphi\, d\theta dr \\ &= \int_{r=0}^{1} r^4 dr \int_{y=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{\pi} (1-cos^2\varphi)\, sin\varphi\, d\varphi = \left[\frac{1}{5} r^5\right]_0^1 \times [\theta]_0^{2\pi} \times \left[-cos\varphi + \frac{1}{3} cos^3\varphi\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{8\pi}{15} \end{aligned}$$

Exercice N° 11:
Calculer le volume V limité par la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon $R=1$ et le cylindre d'équation $x^2+y^2=y$

Solution :

$$V = \iiint_V dxdy\,dz$$

On passe en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

*Avec le*Jacobien $J = \rho$ ***et***

$$\begin{cases} l'\text{équation du sphére donne} :\ x^2+y^2+z^2 = 1 \Rightarrow \rho^2 + z^2 = 1 \quad alors : -\sqrt{1-\rho^2} \le\ z \le \sqrt{1-\rho^2} \\ l\text{équationdu cylindre}\ :\ x^2+y^2 = y\left(\Leftrightarrow x^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \Rightarrow \rho^2 = \rho\sin\theta\ alors : 0 \le \rho \le \sin\theta \quad et \quad 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$V = \iiint_V dxdy\,dz$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\left[\int_{\rho=0}^{\sin\theta}\left[\int_{z=-\sqrt{1-\rho^2}}^{\sqrt{1-\rho^2}} \rho\,dz\right]d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\left[\int_{\rho=0}^{\sin\theta}\left[2\rho\sqrt{1-\rho^2}\right]d\rho\right]d\theta$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\left[\frac{-2}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^{\sin\theta} d\theta = \frac{-2}{3}\int_{\theta=0}^{\pi}(\cos^3\theta - 1)d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Exercice N° 12:

Calculer l'intégrale $I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdy\,dz$

Avec $D = \{(x,y,z)\ /\ z \geq 0,\ \ x^2+y^2 \leq z^2 et\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

Solution : L'intersection entre le cylindre $x^2+y^2 = z^2\ et\ sphére\ x^2+y^2+z^2 = 1$ et $z \geq 0$donne : $z = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on peut alors décomposer le domaine D en deux domaines le 1er est celui du cylindre et le 2eme est celle du sphère,

- en utilisant les coordonnées cylindriques :$D_1 = \left\{(\rho,\theta,z);\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ;\ 0 \leq z \leq \frac{1}{\sqrt{2}}; 0 \leq \rho \leq z\right\}$
- et $D_2 = \left\{(\rho,\theta,z);\ \ 0 \leq \theta \leq 2\pi\ ;\ \frac{1}{\sqrt{2}} \leq z \leq 1; 0 \leq \rho \leq \sqrt{1-z^2}\right\}$

$$I = \iiint_D (x^2+y^2+z^2)dxdy\,dz = \iiint_{D_1}(x^2+y^2+z^2)dxdy\,dz + \iiint_{D_2}(x^2+y^2+z^2)dxdy\,dz$$

Avec

$$I_1 = \iiint_{D_1}(x^2+y^2+z^2)dxdy\,dz = \iiint_{D_1}\rho(\rho^2+z^2)d\rho dz\,d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta\left[\int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[\frac{1}{2}\int_{\rho=0}^{z} 2\rho(\rho^2+z^2)\,d\rho\right]dz\right] = 2\pi \times \left[\int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\rho^2+z^2)^2\right]_{\rho=0}^{z} dz\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \int_{z=0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(3z^4)dz = \frac{3\pi}{40\sqrt{2}}$$

Et

$$I_2 = \iiint_{D_2} (x^2 + y^2 + z^2) dxdy\, dz = \iiint_{D_2} \rho(\rho^2 + z^2) d\rho dz\, d\theta =$$

$$= \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left[\int_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left[\frac{1}{2} \int_{\rho=0}^{\sqrt{1-z^2}} 2\rho(\rho^2 + z^2)\, d\rho \right] dz \right] = 2\pi \times \left[\int_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (\rho^2 + z^2)^2 \right]_{\rho=0}^{\sqrt{1-z^2}} dz \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \times \int_{z=\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} (1 - z^4) dz = \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{5} - \frac{19}{20\sqrt{2}} \right)$$

Par conséquent on trouve :

$$I = I_1 + I_2 = \frac{3\pi}{40\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{4}{5} - \frac{19}{20\sqrt{2}} \right) = \frac{2\pi}{5} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$