Chapitre II

Notions élémentaires de la géométrie différentielle

II.1. DEFINITIONS

Soit le système non linéaire [2] :

$$\dot{x} = f(x) + g(x)\,u \tag{II.1}$$

Avec : $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$

II.1.1. Les champs de vecteurs

f et g associés au système ci-dessus sont définie par :

$$\begin{aligned} F = f &= \sum_{n}^{i=1} f_i \frac{\partial}{\partial x_i} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \\ G = g &= \sum_{n}^{i=1} g_i \frac{\partial}{\partial x_i} = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots + g_n \frac{\partial}{\partial x_n} \end{aligned} \tag{II.2}$$

II.1.2. La dérivée de Lie

Par rapport à un champ de vecteur :

$$\begin{aligned} L_f \mathsf{a}(x) &= \sum_{n}^{i=1} \frac{\partial \mathsf{a}}{\partial x_i} f_i = \frac{\partial \mathsf{a}(x)}{\partial x_1} f_1(x) + \frac{\partial \mathsf{a}(x)}{\partial x_2} f_2(x) + \cdots + \frac{\partial \mathsf{a}(x)}{\partial x_n} f_n(x) = \frac{\partial \mathsf{a}(x)}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) \\ L_g(L_f \mathsf{a}(x)) &= \frac{\partial (L_f \mathsf{a}(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} g(x) \end{aligned} \tag{II.3}$$

Si $\mathsf{a}(x)$ est différencie k fois suivant le champ de vecteur f, par récurrence en trouve :

$$L_f^k \mathsf{a}(x) = \frac{\partial (L_f^{k-1} \mathsf{a}(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) \quad \text{avec} \quad L_f^0 \mathsf{a}(x) = \mathsf{a}(x) \tag{II.4}$$

II.1.3. Le crochet de Lie (produit de Lie)

Le crochet de Lie est une combinaison de deux champs de vecteur qui donne un nouveau champ de vecteur, on peut crocheter le crochet de Lie avec un champ de vecteur autant de fois pour donner naissance à des nouveaux champs de vecteurs, $[f \quad g]$, $[f \quad [f\ g]]$… avec :

$$[f \quad g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x) \tag{II.5}$$

$$[f \quad g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \frac{\partial g_n}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}$$

Dans le but d'éviter la notation précédente qui peut conduise à des confusions, la notation suivante est adoptée :

$$ad^k f\, g(x) = \left[f \quad ad^{k-1} f\, g\right] \text{ avec } k \geq 1 \text{ et } ad^0 f\, g(x) = g(x) \tag{II.6}$$

$k = 1 \Rightarrow ad^1 f\, g(x) = \left[f \quad ad^0 f\, g\right] = [f \quad g]$

$k = 2 \Rightarrow ad^2 f\, g(x) = \left[f \quad adf\, g\right] = [f \quad [f\ g]]$

$k = 3 \Rightarrow ad^3 f\, g(x) = \left[f \quad ad^2 f\, g\right] = [f \ [f \quad [f\ g]]]$

A) <u>Proposition 1</u>

Soit f_1, f_2, g_1 et g_2 des champs de vecteurs r_1 et r_2 des réelles :

i) Associativité :

$$[r_1 f_1 + r_2 f_2 \quad g_1] = r_1[f_1 \quad g_1] + r_2[f_2 \quad g_1] \tag{II.7}$$

ii) Commutativité :

$$[f \quad g] = -[g \quad f] \tag{II.8}$$

iii) Identité de Jacobi, soit *f, g, p* des champs de vecteurs :

$$[f \quad [g\ p]] + [g \quad [p\ f]] + [p \quad [f\ g]] = 0 \tag{II.9}$$

B) <u>Proposition 2</u>

i) Soient $\sim(x)$ et ª(x) des fonctions réelles, f un champ de vecteur :

$$L_{\sim f}\, ª(x) = (L_f\, ª(x))\sim(x) \tag{II.10}$$

ii) Soient $f(x)$ et $g(x)$ des champs de vecteurs, ª(x) une fonction réelle :

$$L_{[f\,g]}\, ª(x) = L_f L_g\, ª(x) - L_g L_f\, ª(x) \tag{II.11}$$

iii) Soit *f* un champ de vecteur et ª(x) une fonction réelle :

$$L_f\, dª(x) = dL_f\, ª(x) \tag{II.12}$$

II.1.4. Exemple

Soit un satellite rigide non sphérique propulsé par un couple (voir chapitre I):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \tag{II.13}$$

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \ \text{ avec } \ f(x) = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{II.14}$$

1- Ecrire le champ de vecteur f et g

2- Soit $\alpha(x) = (x_1 + x_2)^2$, calculer $L_f \alpha(x),\ L_g L_f \alpha(x),\ L_f^2 \alpha(x)$.

3- Calculer le crochet de Lie $[f \quad g]$, $[f \quad [f\ g]]$ et leur champ de vecteur.

Solution :

1- Champ de vecteur de f et g *:*

$$F = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F = a_1 x_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 x_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 x_1 x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$G = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$G = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

2- Calcule de $L_f \alpha(x),\ L_g L_f \alpha(x),\ L_f^2 \alpha(x)$

a) $$L_f \alpha(x) = \frac{\partial \alpha(x)}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \alpha(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \alpha(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial \alpha(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ f_3(x) \end{pmatrix}$$

$$L_f \alpha(x) = \begin{pmatrix} 2(x_1 + x_2) & 2(x_1 + x_2) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} = 2(x_1 + x_2)(a_1 x_2 x_3 + a_2 x_1 x_3)$$

b) $$L_g(L_f \alpha(x)) = \frac{\partial (L_f \alpha(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} g(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial L_f \alpha(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial L_f \alpha(x)}{\partial x_2} & \dfrac{\partial L_f \alpha(x)}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ g_3(x) \end{pmatrix}$$

c) $$L_f^2 \alpha(x) = L_f(L_f \alpha(x)) = \frac{\partial (L_f \alpha(x))}{\partial \mathrm{x}^{\mathrm{T}}} f(x)$$

3- Calcule de crochet de Lie $[f \quad g]$

$$[f \quad g] = \frac{\partial g}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$$

$$[f \quad g] = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_1 b_2 x_3 \\ -a_2 b_1 x_3 \\ -a_3 b_1 x_2 - a_3 b_2 x_1 \end{pmatrix}$$

Le champ de vecteur $[f \quad g]$

$$F' = -a_1 b_2 x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - a_2 b_1 x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} - (a_3 b_1 x_2 + a_3 b_2 x_1) \frac{\partial}{\partial x_3}$$

II.2. CHANGEMENT DE BASE (DE REPERE)

Le changement de base pour l'analyse et la synthèse de commande non linéaire est très important pour résoudre certain problème de réglage tel que la stabilité et le découplage [2], [6].

II.2.1. Cas des systèmes linéaires

Soit le système linéaire :

$$\begin{cases} \dot{x} = A \cdot x + B \cdot u \\ y = C \cdot x \end{cases} \tag{II.15}$$

Et soit la transformation $Z = T \cdot x \Rightarrow x = T^{-1} Z$

$$\dot{Z} = T \cdot \dot{x} = T(A \cdot x + B \cdot u) = TA \cdot x + TB \cdot u = \underbrace{TAT^{-1}}_{\overline{T}} Z + \underbrace{TB}_{\overline{B}} \cdot u$$

$$y = C \cdot x = \underbrace{CT^{-1}}_{\overline{C}} Z$$

Dans ce cas en obtiens le nouveau système:

$$\begin{cases} \dot{Z} = \overline{T} \cdot Z + \overline{B} \cdot u \\ y = \overline{C} \cdot Z \end{cases} \tag{II.16}$$

II.2.2. Cas des systèmes non linéaires

Soit le système non linéaire suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x) \cdot u \\ y = h(x) \end{cases} \tag{II.15}$$

Le changement de coordonnées se fait à travers :

$$z = ¨(x) \text{ tel que } \begin{cases} z_1 = ¨_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \vdots \\ z_n = ¨_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases} \tag{II.16}$$

Ou $¨(x)$ est inversible tel que $\exists ¨^{-1}(z) / x = ¨^{-1}(¨(x))$

Une transformation de ce type est appelé *Difféomorphisme globale.*

$$z = ¨(x) \Rightarrow \dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{\partial ¨}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial ¨}{\partial x}(f(x) + g(x)\cdot u)$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial ¨}{\partial x} f(x)\Big|_{x=¨^{-1}(z)} + \frac{\partial ¨}{\partial x} g(x)\Big|_{x=¨^{-1}(z)} .u \\ &= \bar{f}(z) + \bar{g}(z).u \end{aligned} \tag{II.17}$$

$$y = h(x)\big|_{x=¨^{-1}(z)} = \bar{h}(z) \tag{II.18}$$

II.3. NOTIONS

II.3.1. Notion de courbe intégrale :

Soit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots x_n) \end{cases}$

$¥(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t))$ est la courbe intégrale du champ de vecteur g avec:

$$\mathrm{g} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n} \tag{II.19}$$

Exemple :

Soit : $\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = a_2 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1(t) = k_1 e^{a_1 t} \\ x_2(t) = k_2 e^{a_2 t} \end{cases}$

$¥(t) = (x_1(t), x_2(t))$ est la courbe intégrale d'un champ de vecteur g avec: $\mathrm{g} = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \Rightarrow \mathrm{g} = a_1 x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 x_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$

II.3.2. Notion de distribution :

Une distribution Δ est une espace vectorielle ou sous espace engendré par une base formé par les champs de vecteurs [7]:

$$\Delta = span\{f_1, f_2, \ldots, f_d\} \tag{II.20}$$

$\Delta(x)$ est la distribution associée au $x \in \Re^n$

$$\Delta(x) = span\{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_d(x)\} \tag{II.21}$$

II.3.3. Notion d'involutivité:

Une distribution Δ est dite involutive si est seulement si elle est stable par le crochet de Lie c-à-d si est seulement si pour toutes champs de vecteurs X et Y appartenant à Δ, le crochet de Lie $[\mathrm{X\ Y}]$ est encore un élément de Δ.

II.3.4. Exemples:

<u>*Exercice 1*</u> : soit 3 champs de vecteurs :

$$f_1=\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix},f_3=\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}$$

Etudier l'involutivité de Δ.

Exercice 2 : soit dans $\Re^3$ la distribution suivante, étudier l'involutivité de Δ.

$$\Delta=span\{f_1,f_2\}\text{ avec }f_1=\begin{pmatrix}2x_2\\1\\0\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}1\\0\\x_2\end{pmatrix}$$

Exercice 3 : étudier l'involutivité de Δ dans ce cas :

$$\Delta=span\{f_1,f_2\}\text{ avec }f_1=\begin{pmatrix}2x_3\\-1\\0\end{pmatrix},f_2=\begin{pmatrix}-x_1\\-2x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

II.3.5. Solutions:

Exercice 1

$$[f_1\quad f_2]=\frac{\partial f_2}{\partial x}f_1(x)-\frac{\partial f_1}{\partial x}f_2(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2\\-x_1\\0\end{pmatrix}=f_3$$

$$[f_1\quad f_3]=\frac{\partial f_3}{\partial x}f_1(x)-\frac{\partial f_1}{\partial x}f_3(x)=\begin{pmatrix}-x_3\\0\\x_1\end{pmatrix}=f_2$$

$$[f_2\quad f_3]=\frac{\partial f_3}{\partial x}f_2(x)-\frac{\partial f_2}{\partial x}f_3(x)=\begin{pmatrix}0\\x_3\\-x_2\end{pmatrix}=f_1$$

Donc $\forall X,Y\to[X\ Y]\in\Delta=span\{f_1,\quad f_2,\quad f_3\}$ donc Δ est involutive.

Exercice 2

$$[f_1\quad f_2]=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x_2\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

On à: $\det\begin{pmatrix}2x_2&1&0\\1&0&0\\0&x_2&1\end{pmatrix}=-1\neq0$ donc les vecteurs sont linéairement indépendant.

$\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\notin\Delta$, c-à-d Δ n'est pas involutive.

Exercice 3

$$[f_1 \quad f_2] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 2x_3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2f_1 \in \Delta$$

$\Delta = span\{f_1 \quad f_2\}$ donc Δ est involutive.

Aussi on peut calculer le déterminant de la matrice :

$$\det \begin{pmatrix} 2x_3 & -x_1 & -4x_3 \\ -1 & -2x_2 & 2 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ pour dire que } \Delta \text{ est involutive.}$$

II.3.6. Notion d'intégrabilité complète:

$\Delta = span\{f_1, \ \ldots, \ f_d\}$ définie sur une variété V avec $d \leq n$ est dit complètement intégrable si pour tout x de V, il existe une sous variété M_x de V de dimension *d,* telle que à chaque point *y* de M_x l'espace tangent à M_x en *y*.
T_y, M_x est engendré par $\{f_1, \ \ldots, \ f_d\}$ (voir Isidori pp.25).

II.3.7. Théorème de Frobenius:

Une distribution non singulière Δ est complètement intégrable si est seulement si elle est involutive.

II.4. CONDITIONS DE COMMANDABILITE DES SYSTEMES

L'outil géométrique différentiel à permis l'établissement d'une condition nécessaire et suffisante d'une commandabilité faible [6].
Soit $\dot{x} = f(x,u)$ un système NL, l'analytique général est une sous ensemble de M (variété différentiel).

II.4.1. U-accessible :

Un point x_1 est U-accessible à partir de x_0 s'il existe une commande admissible $u[t_0,t_1] \rightarrow \Re^d$ tel que $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ et $x(t)$ reste dans u $\forall t \in [t_0,t_1]$. Noté x_0, au x_1

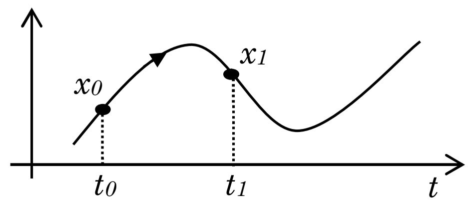

Figure II.1. U-accessibilité

II.4.2. Faible U-accessibilité :

Un point x' est faiblement U-accessible à partir de x'' s'il existe une suite $x_0, x_1, \cdots, x_k$ avec :

* $x_0 = x'$ et $x_k = x''$

** $\forall\, i = 1,2,\cdots,k$ on à soit x_i au x_{i-1} soit x_{i-1} au x_i

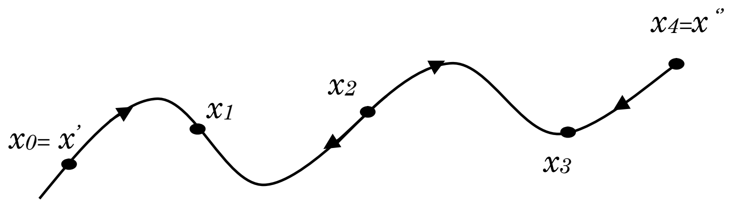

Figure II.2. Faible U-accessibilité

Les points x' et x'' peuvent être commenté par une suite de trajectoire continue mais qui non pas la même orientation.

II.4.3. Commandabilité Faible :

Un système est dit faiblement commandable si est seulement si pour tout points x_M, l'ensemble des points faiblement U-accessible à partir de x est égale à la variante de toute entière *M*.

<u>*Théorème :*</u>

Un système analytique général est faiblement localement commandable si est seulement si pour touts points $x_0(M)$ à l'intérieur de l'ensemble des points U-accessible pour tout voisinage U est non vide.

II.4.4. Critère de commandabilité des systèmes non linéaires :

Soit le système NL analytique général :

$$\begin{cases} \dot{x} = f_0(x) + \sum_{i=1}^{d} u^i f_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \tag{II.22}$$

<u>*Théorème :*</u>

Un système est localement commandable en x_0 si est seulement si le rang de Lie $J(f_0, f_1, ..., f_d)(x_0)$, engendré par les champs de vecteurs $f_1, f_2, ..., f_d$ est égale a n

L'algèbre de Lie engendré par les champs $(f_0, f_1, ..., f_d)$

$$J(f_0, f_1, ..., f_d) = \{f_1, \ldots, f_d, [f_0\ f_1], [f_0\ f_d], [f_i\ [f_j\ f_k]]\} \tag{II.23}$$

<u>*Exemple*</u>

Soit le système et le point de fonctionnement $x_0(0,0,0)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1 x_2 x_3 + b_1 u \\ \dot{x}_2 = a_2 x_1 x_3 + b_2 u \\ \dot{x}_3 = a_3 x_1 x_2 \end{cases} \tag{II.24}$$

Avec : $f_0(x) = \begin{pmatrix} a_1x_2x_3 \\ a_2x_1x_3 \\ a_3x_1x_2 \end{pmatrix}$, $f_1(x) = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les Champ de vecteur de f_0 et f_1 *:*

$$F_0 = a_1x_2x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2x_1x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3x_1x_2 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$F_1 = b_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

Commandabilité locale :

$$[f_0 \quad f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_0(x) - \frac{\partial f_0}{\partial x} f_1(x) = \begin{pmatrix} -a_1b_2x_3 \\ -a_2b_1x_3 \\ -a_3(b_1x_2 + b_2x_1) \end{pmatrix} = f_2$$

$$[f_1 \quad f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1(x) - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2a_3b_1b_2 \end{pmatrix} = f_3$$

$$[f_2 \quad f_3] = \frac{\partial f_3}{\partial x} f_2(x) - \frac{\partial f_2}{\partial x} f_3(x) = \begin{pmatrix} 2a_1a_3b_1b_2^2 \\ 2a_2a_3b_1^2b_2 \\ 0 \end{pmatrix} = f_4$$

$J = (f_1, f_2, f_3) = (f_1, f_2, f_4) = (f_1, f_3, f_4)$ aux choix,

$$J = (f_1, f_3, f_4) = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 2a_1a_3b_1b_2^2 \\ b_2 & 0 & 2a_2a_3b_1^2b_2 \\ 0 & -2a_3b_1b_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J = 4a_2a_3^2b_1^4b_2^2 - 4a_1a_3^2b_1^2b_2^4$$

$\det J \neq 0 \Rightarrow rang\ J = 3$ Car $a_3 \neq 0$ et $a_1b_2^2 \neq a_2b_1^2$.

Dans ce cas le système (II.24) est commandable.

II.5. CONCLUSION

Ce chapitre présent, dans un premier temps, une brève introduction sur les notions élémentaires de la géométrie différentielle pour les systèmes non linéaires et du vocabulaire qu'il comporte. Ces notions de bases sont nécessaires à la compréhension des subtilités de la théorie de la géométrie différentielle et, dans un deuxième temps, il introduit les conditions de commandabilité des systèmes non linéaires avec quelque exemple simple pour la bonne compréhension de critère de commandabilité.